Giulio Cesare Barozzi, Giovanni Dore, Enrico Obrecht

Elementi di analisi matematica - Volume 1

Zanichelli

1 Successioni e loro limiti

Esercizi

1.2. Successioni convergenti

1.2.1. Esercizio Dimostrare, verificando la definizione di limite, che:

(1) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n+4}{n^2+1} = 0\,;$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+4}{n^2+n-1} = 1\,;$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right) = 0\,.$

1.3. Successioni divergenti

1.3.1. Esercizio Dimostrare, verificando la definizione di limite, che:

(1) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n^2+n+1} = +\infty\,;$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2-3n-5}{-2n} = -\infty\,.$

1.3.2. Esercizio Mostrare un esempio di successione inferiormente illimitata, ma che non tende a $-\infty$.

1.4. Limiti di successioni e relazione d'ordine

1.4.1. Esercizio Siano $m, M \in \mathbb{R}_+^*$, con $m < M$ e $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{R}$, tale che $\forall n \in \mathbb{N}$, $m \le a_n \le M$. Dimostrare che la successione $\left(\sqrt[n]{a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ è regolare e calcolarne il limite.

1.4.2. Esercizio Sia $a \in \mathbb{R}_+^*$ e poniamo

$$b_n = \begin{cases} \sqrt[n+1]{a}\,, & \text{se } n \text{ è dispari} \\ \sqrt[n]{a}\,, & \text{se } n \text{ è pari e positivo.} \end{cases}$$

$$c_n = \begin{cases} \sqrt[n+1]{a}\,, & \text{se } n \text{ è dispari,} \\ \sqrt[n-1]{a}\,, & \text{se } n \text{ è pari e positivo.} \end{cases}$$

Determinare se le successioni $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ e $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sono regolari e, in caso affermativo, calcolarne il limite.

1.7. Alcuni importanti esempi di successioni - parte 1

1.7.1. Esercizio Calcolare (se esiste) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ con:

(1) $a_n = n^4 - 10n^3\,;$

(2) $a_n = -3n^3 + 2n^2 + n + 1/n\,;$

(3) $a_n = n^5 - 2n^4 - 5n - (1/2)^n\,;$

(4) $a_n = \dfrac{3n^2 - 7n + 1}{2n^3 + 5n^2}\,;$

(5) $a_n = \dfrac{4n^4 - 7n^2 + 1}{-3n^3 + n^2 - n}\,;$

(6) $a_n = \dfrac{4n^4 - 3n^3}{2n^4 + 7n^3 - 5}\,;$

(7) $a_n = \sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 + 4}\,;$

(8) $a_n = 2^{3n+1} - 3^{2n}\,;$

(9) $a_n = n^2 - \sqrt{3n^3 + 2}\,;$

(10) $a_n = n^2 - \sqrt{2n^4 + 5n^3 + 2}\,;$

(11) $a_n = (-1)^n \dfrac{\sqrt{n^6 + 2}}{n^3 + 1}\,;$

(12) $a_n = \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}\right)\sqrt{n}\,;$

(13) $a_n = \dfrac{5^{n+1} + 4^{n+1}}{3^n + 2^n}\,;$

(14) $a_n = \dfrac{n^{-2} + 3n^{-1}}{n^{-4} + n^{-1}}\,;$

(15) $a_n = \dfrac{5^{n+2} - 2^{2n+3}}{5^n + 12}\,;$

(16) $a_n = \dfrac{5^{-n} + 2^{-n}}{3^{-n} + 4^{-n}}\,;$

(17) $a_n = \dfrac{n}{(n^3 + 1)^{1/3}}\,;$

(18) $a_n = \dfrac{\sqrt{3n^2 - n} - n}{n + 1}\,;$

(19) $a_n = \dfrac{n^2 - \sqrt{n^4 + 1}}{n^2 - \sqrt{n^4 + 2}}\,;$

(20) $a_n = \dfrac{\sqrt{n^3 + 5} + n^2 + 5n}{\sqrt{n^4 + n} + n}\,.$

1.9. La serie geometrica e la rappresentazione decimale dei numeri reali

1.9.1. Esercizio Scrivere in forma di frazione i seguenti numeri razionali:

(1) $0.325\overline{414}$;
(2) $0.12\overline{01}$;
(3) $0.111\overline{12}$.

1.9.2. Esercizio Determinare gli estremi inferiore e superiore dell'insieme A costituito dai numeri $1.c_1c_2c_3\ldots$, dove ciascuna cifra c_k può assumere solo i valori 0 e 1.

1.10. Un numero reale definito tramite una successione

1.10.1. Esercizio Calcolare, se esiste, $\lim_{n\to+\infty} a_n$, con:

(1) $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{2n}\right)^n$;

(2) $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)^n$.

1.11. Alcuni importanti esempi di successioni - parte 2

1.11.1. Esercizio Calcolare (se esiste) $\lim_{n\to+\infty} a_n$ con:

(1) $a_n = \dfrac{4^n + \sqrt{n}}{n^3 + 3}$;

(2) $a_n = \dfrac{2^n + (n+1)^2}{n^3 + e^n + 3}$;

(3) $a_n = \dfrac{e^{-n} + \sqrt{n} + 1}{n^2 + n}$;

(4) $a_n = (-1)^n \dfrac{\sqrt{n} + 1}{n^3 + e^n + 1}$;

(5) $a_n = n^2 3^n - n^3 2^n$;

(6) $a_n = \dfrac{(n+1)!}{n!(n+3) + n^2}$;

(7) $a_n = \dfrac{(n+1)! + n}{n! + 2^n}$;

(8) $a_n = \dfrac{-n!\,2^n + \sqrt{n^3 + 4n}}{(n+2)! + n^4 - 2^n}$;

(9) $a_n = \dfrac{(-1)^n(n^2+1)}{2^n + 1}$;

(10) $a_n = \dfrac{(-1)^n(2^n+1)}{n^2 + 1}$;

(11) $a_n = \dfrac{n^n - n^{n+1}}{3^n + n! + \sqrt{n^4 - 2n}}$;

(12) $a_n = \dfrac{2n^2\,(8^n - 2^n)}{8^n e^{n/2}\left(\sqrt{e^n + n} - \sqrt{e^n - n^2}\right)}$;

(13) $a_n = \dfrac{n^n + 2\,n! - e^{n+3}}{-e^n + 3n^n + 3\,n! + n^8}$;

(14) $a_n = \dfrac{n^{-3} + 3n^{-2}}{2^{-n}}$.

Risultati degli esercizi

1.4.2 $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ e $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sono regolari e hanno limite 1.

1.7.1

(1) $+\infty$;
(2) $-\infty$;
(3) $+\infty$;
(4) 0;
(5) $-\infty$;
(6) 2;
(7) $1/2$;
(8) $-\infty$;
(9) $+\infty$;
(10) $-\infty$;
(11) non esiste;
(12) 1;
(13) $+\infty$;
(14) 3;
(15) 25;
(16) $+\infty$;
(17) 1;
(18) $\dfrac{2}{\sqrt{3}+1}$;
(19) $1/2$;
(20) 1.

1.9.1

(1) $\dfrac{36121}{111000}$;
(2) $\dfrac{1189}{9900}$;
(3) $\dfrac{3667}{33000}$.

1.9.2 $\inf A = 1$, $\sup A = 10/9$.

1.10.1

(1) $\sqrt{e}$;
(2) 1.

1.11.1

(1) $+\infty$;
(2) 0;
(3) 0;
(4) 0;
(5) $+\infty$;
(6) 1;
(7) $+\infty$;

(8) $-\infty$;
(9) 0;
(10) non esiste;
(11) $-\infty$;
(12) 4;
(13) $1/3$;
(14) $+\infty$.