Giulio Cesare Barozzi, Giovanni Dore, Enrico Obrecht

Elementi di analisi matematica - Volume 2

Zanichelli

10 Continuità e limiti per funzioni di più variabili

Dimostrazioni

10.6.11. Teorema. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$. Se $B \subseteq \mathbb{R}^2$ è un insieme connesso, tale che $A \cap B \neq \emptyset$ e $\complement A \cap B \neq \emptyset$, allora $\partial A \cap B \neq \emptyset$. Pertanto, se un insieme connesso B è disgiunto da ∂A, allora $B \subseteq A$ oppure $B \subseteq \complement A$.

DIMOSTRAZIONE. Per ipotesi esistono $\boldsymbol{c} \in A \cap B$ e $\boldsymbol{d} \in \complement A \cap B$. Poiché B è connesso, esiste un cammino $\varphi\colon [a,b] \to B$, tale che $\varphi(a) = \boldsymbol{c}$ e $\varphi(b) = \boldsymbol{d}$. Consideriamo l'insieme $E = \{\, t \in [a,b] \mid \varphi(t) \in A \}$, che è non vuoto, perché $a \in E$, ed è ovviamente limitato. Posto $\tau = \sup E$, risulta $\tau \in [a,b]$.

Per definizione di estremo superiore, esiste una successione $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $[a,b]$ convergente a τ, tale che $\varphi(t_k) \in A$, $\forall k \in \mathbb{N}$ (se $\tau = a$ tutti i termini della successione coincidono con τ). Per la continuità di φ in τ, $\varphi(t_k) \to \varphi(\tau)$ e quindi, per il Teor. 10.4.14, $\varphi(\tau) \in \overline{A}$.

Proviamo che $\varphi(\tau) \notin \operatorname{int} A$. Supponiamo, per assurdo, $\varphi(\tau) \in \operatorname{int} A$; allora $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^*_+$ tale che $I_\varepsilon\big(\varphi(\tau)\big) \subseteq A$. Inoltre, $\tau < b$, visto che $\varphi(b) = \boldsymbol{d} \in \complement A$. Per la continuità di φ, $\exists \delta_\varepsilon \in \mathbb{R}^*_+$, tale che $\tau + \delta_\varepsilon \leq b$ e $\varphi\big([\tau, \tau+\delta_\varepsilon]\big) \subseteq I_\varepsilon\big(\varphi(\tau)\big)$; ne consegue che $\varphi(\tau+\delta_\varepsilon) \in A$, contrariamente al fatto che $\tau = \sup E$.

Pertanto $\varphi(\tau) \in \big(\overline{A} \setminus \operatorname{int} A\big) \cap B = \partial A \cap B$. ■