Giulio Cesare Barozzi, Giovanni Dore, Enrico Obrecht

Elementi di analisi matematica - Volume 2

Zanichelli

9 Richiami introduttivi algebrici e geometrici

Dimostrazioni

9.1.25. Teorema. Sia V uno s. v. di dimensione finita, diverso dallo spazio banale $\{\mathbf{0}\}$. Allora V ha una base e tutte le sue basi hanno lo stesso numero di elementi.

Dimostrazione. Proviamo anzitutto che se F e G sono sottoinsiemi finiti di V tali che $F \subseteq G$, F è linearmente indipendente e G genera V, allora esiste una base B di V tale che $F \subseteq B \subseteq G$.

Sia $F = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_p\}$.

Se F è una base di V allora scegliamo $B = F$.

In caso contrario $l(F) \neq V$. Pertanto G non è sottoinsieme di $l(F)$, perché altrimenti ogni combinazione lineare di elementi di G sarebbe anche combinazione lineare di elementi di F. Quindi esiste $\boldsymbol{w}_1 \in G \setminus l(F)$. L'insieme $F \cup \{\boldsymbol{w}_1\}$ è linearmente indipendente. Infatti, siano $c_1, c_2, \ldots, c_{p+1} \in \mathbb{K}$, tali che

$$\sum_{i=1}^{p} c_i\, \boldsymbol{v}_i + c_{p+1}\, \boldsymbol{w}_1 = \mathbf{0}\,.$$

Se fosse $c_{p+1} \neq 0$, allora $\boldsymbol{w}_1 = -(1/c_{p+1}) \sum_{i=1}^{p} c_i\, \boldsymbol{v}_i \in l(F)$, contrariamente all'ipotesi. Allora $c_{p+1} = 0$ e quindi $\sum_{i=1}^{p} c_i\, \boldsymbol{v}_i = \mathbf{0}$; poiché F è linearmente indipendente, ne consegue che tutti i c_k sono nulli, come si voleva. Pertanto $F \cup \{\boldsymbol{w}_1\}$ è linearmente indipendente ed è contenuto in G.

Se $F \cup \{\boldsymbol{w}_1\}$ genera V, esso è una base, quindi scegliamo $B = F \cup \{\boldsymbol{w}_1\}$. In caso contrario sia $\boldsymbol{w}_2 \in G$ che non sia combinazione lineare di elementi di $F \cup \{\boldsymbol{w}_1\}$; possiamo ripetere il ragionamento precedente.

Iterando questa procedura o otteniamo un insieme linearmente indipendente che genera V, e quindi una base, oppure esauriamo gli elementi di G, ma in questo caso G è linearmente indipendente e quindi è una base.

Poiché V è uno s. v. di dimensione finita, esiste un insieme G che lo genera contenente solo vettori non nulli. Se $\boldsymbol{v} \in G$, allora $\{\boldsymbol{v}\}$ è linearmente indipendente e $\{\boldsymbol{v}\} \subseteq G$, pertanto ciò che abbiamo appena dimostrato assicura l'esistenza di una base di V.

Proviamo ora che se F e G sono sottoinsiemi finiti di V tali che F è linearmente indipendente e G genera V, allora il numero di elementi di F è minore o uguale del numero di elementi di G.

Per semplificare la notazione, utilizziamo il simbolo $\#$ per indicare il numero di elementi di un insieme finito.

Sia $F = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_p\}$ e poniamo $m = \#G$; dobbiamo dimostrare che $p \le m$.

Se $\boldsymbol{v}_1 \in G$, poniamo $F_1 = G$. In caso contrario, $\{\boldsymbol{v}_1\}$ è linearmente indipendente, perché contenuto nell'insieme linearmente indipendente F, e $G \cup \{\boldsymbol{v}_1\}$ genera V, perché contiene G che genera V. Quindi, per quanto dimostrato sopra, esiste F_1, base di V, tale che $\{\boldsymbol{v}_1\} \subseteq F_1 \subseteq G \cup \{\boldsymbol{v}_1\}$. Poiché $\boldsymbol{v}_1 \in V = l(G)$, per il Teor. 9.1.12, $G \cup \{\boldsymbol{v}_1\}$ è linearmente dipendente, quindi $F_1 \ne G \cup \{\boldsymbol{v}_1\}$; pertanto $\#F_1 < \#\big(G \cup \{\boldsymbol{v}_1\}\big) = m + 1$, cioè $\#F_1 \le m$. In ogni caso F_1 genera V e risulta $\{\boldsymbol{v}_1\} \subseteq F_1$, $\#F_1 \le m$.

Consideriamo ora $\boldsymbol{v}_2$. Se $\boldsymbol{v}_2 \in F_1$, poniamo $F_2 = F_1$. In caso contrario $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ è linearmente indipendente, perché contenuto in F; inoltre $F_1 \cup \{\boldsymbol{v}_2\}$ genera V, perché contiene F_1 che genera V. Quindi esiste F_2, base di V, tale che $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\} \subseteq F_2 \subseteq F_1 \cup \{\boldsymbol{v}_2\}$. Poiché $\boldsymbol{v}_2 \in l(F_1)$, $F_1 \cup \{\boldsymbol{v}_2\}$ è linearmente dipendente, quindi $F_2 \ne F_1 \cup \{\boldsymbol{v}_2\}$; pertanto $\#F_2 < \#\big(F_1 \cup \{\boldsymbol{v}_2\}\big) \le m + 1$, cioè $\#F_2 \le m$. In ogni caso F_2 genera V e risulta $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\} \subseteq F_2$, $\#F_2 \le m$.

Ripetendo più volte questo ragionamento otteniamo un insieme F_p, che contiene $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_p\}$ e tale che $\#F_p \le m$. Pertanto $p \le m$.

Siano ora B_1 e B_2 basi di V. Poiché B_1 è linearmente indipendente e B_2 genera V, per ciò che abbiamo appena dimostrato $\#B_1 \le \#B_2$. Scambiando il ruolo di B_1 e B_2 si ottiene $\#B_2 \le \#B_1$, pertanto B_1 e B_2 hanno lo stesso numero di elementi.

Il teorema è così provato. ■

9.1.32. Teorema. Siano V uno s. v. ed E un suo sottoinsieme finito. Allora $\dim l(E)$ è uguale al massimo numero di vettori di E linearmente indipendenti.

DIMOSTRAZIONE. Siano p il massimo numero di vettori di E linearmente indipendenti ed F un sottoinsieme di E linearmente indipendente con p elementi.

Poiché F è una base di $l(F)$, si ha $\dim l(F) = p$.

Inoltre, aggiungendo un vettore di $E \setminus F$ a F, si ottiene un sottoinsieme di E con $p + 1$ elementi, che quindi è linearmente dipendente; perciò ogni elemento di $E \setminus F$ è combinazione lineare degli elementi di F, cioè $E \subseteq l(F)$, da cui $l(E) \subseteq l(F)$. Ma $l(F) \subseteq l(E)$, perché $F \subseteq E$, quindi $l(E) = l(F)$. Pertanto $\dim l(E) = \dim l(F) = p$. ■

9.1.33. Teorema. Siano V uno s. v. di dimensione finita e F un suo sottoinsieme finito linearmente indipendente. Se F non è una base di V, allora esiste un sottoinsieme finito H di V, tale che $F \cup H$ è una base di V.

DIMOSTRAZIONE. Sia G un insieme finito che genera V; allora anche $F \cup G$ genera V. Per quanto si è provato nel corso della dimostrazione del Teor. 9.1.25, esiste una base B di V tale che $F \subseteq B \subseteq F \cup G$. Evidentemente, posto $H = B \setminus F$, $F \cup H$ è una base di V ■

9.3.28. Teorema. Sia $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Allora la dimensione del sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^m$ generato dalle colonne di $\boldsymbol{A}$ è uguale alla dimensione del sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^n$ generato dalle righe di $\boldsymbol{A}$.

DIMOSTRAZIONE. Proviamo anzitutto che se $\boldsymbol{B} \in \mathcal{M}_{p,q+1}(\mathbb{K})$ è tale che la sua j-esima colonna è combinazione lineare delle altre e $\boldsymbol{C} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ è ottenuta da $\boldsymbol{B}$ eliminando tale colonna, allora il sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^{q+1}$ generato dalle righe di $\boldsymbol{B}$ e quello di $\mathbb{K}^q$ generato dalle righe di $\boldsymbol{C}$ hanno la stessa dimensione.

Per semplificare la notazione supponiamo che $\boldsymbol{C}$ si ottenga eliminando l'ultima colonna di $\boldsymbol{B}$.

Per ipotesi l'ultima colonna di $\boldsymbol{b}$ è combinazione lineare delle prime q; indichiamo con $c_1, c_2, \ldots, c_q \in \mathbb{K}$ i coefficienti di tale combinazione lineare. Posto

$$\boldsymbol{T}\colon \mathbb{K}^q \to \mathbb{K}^{q+1}, \qquad \boldsymbol{T}(x_1, x_2, \ldots, x_q) = \left(x_1, x_2, \ldots, x_q, \sum_{i=1}^{q} c_i x_i\right),$$

la funzione $\boldsymbol{T}$ è lineare ed evidentemente iniettiva; inoltre associa a ogni riga di $\boldsymbol{C}$ la corrispondente riga di $\boldsymbol{B}$. Pertanto $\boldsymbol{T}$ fa corrispondere a ogni combinazione lineare di righe di $\boldsymbol{C}$ una combinazione lineare di righe di $\boldsymbol{B}$. Quindi se V è il sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^q$ generato dalle righe di $\boldsymbol{C}$, allora $\boldsymbol{T}(V)$ è il sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^{q+1}$ generato dalle righe di $\boldsymbol{B}$. Poiché $\boldsymbol{T}$ è iniettiva, per il Teor. 9.2.19 $\dim \boldsymbol{T}(V) = \dim V$.

Indichiamo ora con c la dimensione del sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^m$ generato dalle colonne di $\boldsymbol{A}$ e con r la dimensione del sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^n$ generato dalle righe di $\boldsymbol{A}$.

Se $\boldsymbol{A}$ è la matrice nulla entrambi i sottospazi sono banali e $c = r = 0$.

Supponiamo $\boldsymbol{A}$ diversa dalla matrice nulla. Fissata una base per lo s. v. generato dalle colonne di $\boldsymbol{A}$, costituita da c di tali colonne, sia $\boldsymbol{C}$ la sottomatrice di $\boldsymbol{A}$ di tipo $m \times c$ formata da queste. Poiché $\boldsymbol{C}$ si ottiene da $\boldsymbol{A}$ eliminando colonne che sono combinazione lineare delle rimanenti, per quanto già provato il sottospazio vettoriale generato dalle righe di $\boldsymbol{C}$ ha dimensione r. Ma esso è un sottospazio di $\mathbb{K}^c$, pertanto $r \leq c$.

Scambiando il ruolo di righe e colonne si ha $c \leq r$; ciò prova il teorema. ■

9.4.24. Teorema (di Kronecker). Siano $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ e $p \in \mathbb{N}^*$ tale che $p \leq \min\{m, n\}$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

teorema di Kronecker

(1) $r(\boldsymbol{A}) = p$;
(2) esiste un minore di $\boldsymbol{A}$ di ordine p non nullo, mentre tutti i minori di ordine maggiore di p sono nulli;
(3) esiste $\boldsymbol{B}$, sottomatrice quadrata di ordine p di $\boldsymbol{A}$, con $\det \boldsymbol{B} \neq 0$ e ogni sottomatrice quadrata di ordine $p+1$ che contiene $\boldsymbol{B}$ ha determinante nullo.

DIMOSTRAZIONE. Se $r(\boldsymbol{A}) = p$ allora, per il Teor. 9.4.22, esiste un minore di ordine p non nullo e, per lo stesso teorema, ogni minore di ordine maggiore di p è nullo. Pertanto da (1) segue (2).

Se vale (2) allora è evidente che vale anche (3).

Dimostriamo che da (3) segue (1). Per semplificare le notazioni supponiamo che la sottomatrice $\boldsymbol{B}$ con determinante non nullo sia costituita dalla prime p righe e dalle prime p colonne di $\boldsymbol{A}$, cioè

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pp} & \dots & a_{pn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mp} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pp} \end{pmatrix}.$$

Fissati $j \in \{p+1, p+2, \dots, m\}$ e $k \in \{p+1, p+2, \dots, n\}$, sia $\boldsymbol{C}$ la matrice quadrata ottenuta aggiungendo a $\boldsymbol{B}$ la j-esima riga e la k-esima colonna di $\boldsymbol{A}$, cioè

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pp} & a_{pk} \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jp} & a_{jk} \end{pmatrix}.$$

Poiché $\boldsymbol{C}$ ha ordine $p+1$ e contiene $\boldsymbol{B}$, per ipotesi $\det \boldsymbol{C} = 0$, quindi, per il Teorema di caratterizzazione delle matrici invertibili 9.4.16, $r(\boldsymbol{C}) < p+1$; pertanto le sue colonne sono linearmente dipendenti. Poiché $\det \boldsymbol{B}$ è un minore non nullo di ordine p della matrice costituita dalle prime p colonne di $\boldsymbol{C}$, per il Teor. 9.4.22 tale matrice ha rango p, quindi le sue colonne sono linearmente indipendenti. Pertanto l'ultima colonna di $\boldsymbol{C}$ è combinazione lineare delle prime p.

Posto

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} & a_{1\,p+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} & a_{2\,p+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pp} & a_{p\,p+1} & \dots & a_{pn} \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jp} & a_{j\,p+1} & \dots & a_{jn} \end{pmatrix},$$

ciascuna colonna di $\boldsymbol{D}$ è combinazione lineare delle prime p. Quindi lo s. v. generato dalle colonne di $\boldsymbol{D}$ ha dimensione p, e, per il Teor. 9.3.28, anche lo s. v. generato dalle righe ha dimensione p. Poiché $\det \boldsymbol{B}$ è un minore non nullo di ordine p della matrice costituita dalle prime p righe di $\boldsymbol{D}$, per il Teor. 9.4.22 tale matrice ha rango p. Pertanto l'ultima riga di $\boldsymbol{D}$ è combinazione lineare delle prime p.

Questo prova che ogni riga di $\boldsymbol{A}$ è combinazione lineare delle prime p, quindi lo s. v. generato dalle righe di $\boldsymbol{A}$ ha dimensione p, pertanto $r(\boldsymbol{A}) = p$ e vale (1). ■