

Giuseppe De Marco

# Analisi **Uno**

Teoria ed esercizi

Terza edizione



**MATEMATICA** **ZANICHELLI**

Giuseppe De Marco

# Analisi Uno

**Teoria ed esercizi**

Terza edizione

**Se vuoi accedere alle risorse online riservate**

1. Vai su **my.zanichelli.it**
2. Clicca su *Registrati*.
3. Scegli *Studente*.
4. Segui i passaggi richiesti per la registrazione.
5. Riceverai un'email: clicca sul link per completare la registrazione.
6. Cerca il tuo codice di attivazione stampato in verticale sul bollino argentato in questa pagina.
7. Inseriscilo nella tua area personale su **my.zanichelli.it**

Se sei già registrato, per accedere ai contenuti riservati ti serve solo il codice di attivazione.

I diritti di elaborazione in qualsiasi forma o opera, di memorizzazione anche digitale su supporti di qualsiasi tipo (inclusi magnetici e ottici), di riproduzione e di adattamento totale o parziale con qualsiasi mezzo (compresi i microfilm e le copie fotostatiche), i diritti di noleggio, di prestito e di traduzione sono riservati per tutti i paesi. L'acquisto della presente copia dell'opera non implica il trasferimento dei suddetti diritti né li esaurisce.

Le fotocopie per uso personale (cioè privato e individuale, con esclusione quindi di strumenti di uso collettivo) possono essere effettuate, nei limiti del 15% di ciascun volume, dietro pagamento alla S.I.A.E del compenso previsto dall'art. 68, commi 4 e 5, della legge 22 aprile 1941 n. 633. Tali fotocopie possono essere effettuate negli esercizi commerciali convenzionati S.I.A.E. o con altre modalità indicate da S.I.A.E. Per le riproduzioni ad uso non personale (ad esempio: professionale, economico, commerciale, strumenti di studio collettivi, come dispense e simili) l'editore potrà concedere a pagamento l'autorizzazione a riprodurre un numero di pagine non superiore al 15% delle pagine del presente volume.

Le richieste vanno inoltrate a:  
Centro Licenze e Autorizzazioni per le Riproduzioni Editoriali (CLEARedi),  
Corso di Porta Romana 108, 20122 Milano  
e-mail: autorizzazioni@clearedi.org e sito web: www.clearedi.org

L'autorizzazione non è concessa per un limitato numero di opere di carattere didattico riprodotte nell'elenco che si trova all'indirizzo <https://www.zanichelli.it/chi-siamo/fotocopie-e-permessi>

L'editore, per quanto di propria spettanza, considera rare le opere fuori del proprio catalogo editoriale. La loro fotocopia per i soli esemplari esistenti nelle biblioteche è consentita, oltre il limite del 15%, non essendo concorrenziale all'opera. Non possono considerarsi rare le opere di cui esiste, nel catalogo dell'editore, una successiva edizione, le opere presenti in cataloghi di altri editori o le opere antologiche. Nei contratti di cessione è esclusa, per biblioteche, istituti di istruzione, musei ed archivi, la facoltà di cui all'art. 71-ter legge diritto d'autore. Per permessi di riproduzione, anche digitali, diversi dalle fotocopie rivolgersi a: [ufficicontratti@zanichelli.it](mailto:ufficicontratti@zanichelli.it)

#### Soluzioni degli esercizi e altri svolgimenti di compiti assegnati

Le soluzioni degli esercizi, compresi i passaggi che portano ai risultati e gli altri svolgimenti di compiti assegnati, sono tutelate dalla legge sul diritto d'autore in quanto elaborazioni di esercizi a loro volta considerati opere creative tutelate, e pertanto non possono essere diffuse, comunicate a terzi e/o utilizzate economicamente, se non a fini esclusivi di attività didattica.

#### Solutions of the exercises

The solutions of the exercises, including the steps leading to the results and other forms of treatment of the assigned exercises, are protected by Copyright Law (L.633/1941) as a modification of the exercises deemed original creative intellectual property work and therefore may not be used economically or disseminated to third parties, except for the exclusive purpose of teaching activities.

#### Diritto di TDM

L'estrazione di dati da questa opera o da parti di essa e le attività connesse non sono consentite, salvi i casi di utilizzazioni libere ammessi dalla legge.

L'editore può concedere una licenza. La richiesta va indirizzata a [tdm@zanichelli.it](mailto:tdm@zanichelli.it)

Data mining out of this work or parts thereof and connected uses are not allowed, unless for free uses permitted by law.

Publisher may agree to license specific uses. The request may be sent to [tdm@zanichelli.it](mailto:tdm@zanichelli.it)

*Redazione:* Chiara Lambertini

*Impaginazione e disegni:* CompoMat, Configni (RI)

*Copertina:*

– *Progetto grafico:* Falcinelli & Co., Roma

– *Immagine di copertina:* © MarcelC/iStockphoto

Prima edizione Zanichelli/Decibel: settembre 1995

Seconda edizione Zanichelli/Decibel: novembre 1996

Terza edizione Zanichelli: febbraio 2022

Ristampa: **prima tiratura**

5    4    3    2    1                    2022    2023    2024    2025    2026

Realizzare un libro è un'operazione complessa, che richiede numerosi controlli:

sul testo, sulle immagini e sulle relazioni che si stabiliscono tra essi.

L'esperienza suggerisce che è praticamente impossibile pubblicare un libro

privo di errori. Saremo quindi grati ai lettori che vorranno segnalarceli.

Per segnalazioni o suggerimenti relativi a questo libro scrivere al seguente indirizzo:

Zanichelli editore S.p.A.  
Via Irnerio 34  
40126 Bologna  
fax 051293322  
e-mail: [linea\\_universitaria@zanichelli.it](mailto:linea_universitaria@zanichelli.it)  
sito web: [www.zanichelli.it](http://www.zanichelli.it)

Prima di effettuare una segnalazione è possibile verificare se questa sia già stata inviata in precedenza, identificando il libro interessato all'interno del nostro catalogo online per l'Università.

Per comunicazioni di tipo commerciale: [universita@zanichelli.it](mailto:universita@zanichelli.it)

Stampa:

per conto di Zanichelli editore S.p.A.  
Via Irnerio 34, 40126 Bologna

# Indice generale

<b>Prefazioni</b>	<b>x</b>
<b>0 Analisi zero</b>	<b>1</b>
0.1 Il linguaggio degli insiemi	1
0.2 I vari tipi di numeri	3
0.3 Geometria e numeri reali	14
0.4 Funzioni	23
0.5 Descrizione assiomatica di $\mathbb{R}$ . Assioma di completezza	66
0.6 Funzioni circolari. Funzioni periodiche	81
0.7 Logica	90
0.8 Teoria degli insiemi	93
0.9 Alcuni complementi di teoria degli insiemi	94
0.10 Inverse sinistre e destre di funzioni	95
0.11 Terne ordinate, $n$ -ple ordinate, insieme prodotto di una famiglia di insiemi	98
<b>1 Numeri complessi</b>	<b>99</b>
1.1 Introduzione	99
1.2 Numeri complessi	100
1.3 Reali e immaginari puri	101
1.4 Parte reale, coefficiente dell'immaginario; piano di Argand-Gauss	102
1.5 Coniugato	103
1.6 Modulo	104
1.7 Forma polare	106
1.8 Interpretazione geometrica della moltiplicazione	108
1.9 Notazione esponenziale	110
1.10 Potenze e radici	110
1.11 Radici quadrate dei numeri complessi	115
1.12 Equazioni algebriche nel campo complesso	117
1.13 Distanza nei complessi e geometria piana	121
<b>2 Gruppi, anelli, corpi</b>	<b>125</b>
2.1 Operazioni binarie	125
2.2 Associatività, commutatività, elementi neutri, semigrupperi	125
2.3 Simmetrico	127
2.4 Gruppi	128
2.5 Sottogruppi di un gruppo	129
2.6 Omomorfismi, isomorfismi	130
2.7 Anelli e corpi	133
2.8 Sottoanelli e sottocorpi. Omomorfismi e isomorfismi di anelli e di corpi	135

2.9	Automorfismi di $\mathbb{Q}$ e di $\mathbb{R}$	137
2.10	Funzioni polinomiali	138
2.11	Il principio di identità dei polinomi	140
2.12	Relazioni binarie su un insieme	141
2.13	Relazioni di equivalenza	141
2.14	Relazioni d'ordine	144
<b>3</b>	<b>Il principio di induzione</b>	<b>147</b>
3.1	Introduzione	147
3.2	Applicazioni	148
3.3	Applicazione alle permutazioni	149
3.4	La media aritmetica è maggiore della media geometrica	150
3.5	La successione $n \mapsto (1 + x/n)^n$	152
3.6	Principio di induzione: seconda forma	153
<b>4</b>	<b>Numero di elementi di un insieme</b>	<b>156</b>
4.1	Introduzione	156
4.2	Ordine naturale dei cardinali	157
4.3	Insiemi finiti	159
4.4	Addizione di cardinali	161
4.5	Moltiplicazione di cardinali	165
4.6	Esponenziazione di cardinali	167
4.7	Il simbolo di sommatoria	168
4.8	Prodotti	173
4.9	Formula di Abel	173
<b>5</b>	<b>Alcune formule di combinatoria</b>	<b>176</b>
5.1	Disposizioni e combinazioni	176
5.2	La formula del binomio	178
5.3	Applicazione del teorema del binomio	181
5.4	Altre formule di combinatoria	182
5.5	Altre formule algebriche di tipo combinatorio	183
<b>6</b>	<b>La topologia della retta reale</b>	<b>185</b>
6.1	Introduzione	185
6.2	Aperti della retta reale	185
6.3	Intervalli centrati	186
6.4	Estremi e topologia	187
6.5	Proprietà insiemistiche della topologia	187
6.6	Intorni di un punto in $\mathbb{R}$	188
6.7	Topologia della retta estesa	189
<b>7</b>	<b>Limite di una successione di numeri reali</b>	<b>190</b>
7.1	Nozione di limite per una successione reale	190
7.2	Unicità del limite	192
7.3	Sottosuccessioni di una successione	193
7.4	Teorema della permanenza del segno	194
7.5	Teorema del confronto	194
7.6	Successioni limitate	195

7.7	Teorema dei carabinieri	195
7.8	Infinitesimi	196
7.9	Operazioni con i limiti finiti	197
7.10	Operazioni con i limiti infiniti: somma	198
7.11	Operazioni con limiti infiniti: prodotto	198
7.12	Operazioni con i limiti infiniti: reciproco e quoziente	199
7.13	Forme indeterminate	200
7.14	Successioni monotòne	200
7.15	La successione aritmetica e la successione geometrica	202
7.16	L'esponenziale naturale	203
7.17	Digressione importante: le funzioni elementari	206
<b>8</b>	<b>La topologia del piano</b>	<b>210</b>
8.1	Introduzione	210
8.2	Aperti del piano	210
8.3	Aperti e distanza euclidea	211
8.4	Limite di una successione complessa	212
8.5	Successioni complesse e successioni reali	213
8.6	Operazioni con i limiti complessi	213
8.7	Infinitesimi e infiniti complessi; operazioni con limiti infiniti	214
8.8	La successione geometrica	215
8.9	Sottosuccessioni convergenti in $\mathbb{C}$	215
<b>9</b>	<b>Serie numeriche</b>	<b>217</b>
9.1	Introduzione	217
9.2	Definizioni	218
9.3	Il termine generale di una serie convergente	221
9.4	Condizioni per la convergenza	222
9.5	Convergenza assoluta	224
9.6	Serie a termini complessi	224
9.7	Convergenza assoluta di serie complesse	226
9.8	Criteri del rapporto e della radice	226
9.9	Il criterio di condensazione di Cauchy	230
9.10	Successioni a variazione finita	232
9.11	Serie a termini di segno alterno	232
9.12	Esponenziale complesso	234
9.13	Proprietà di omomorfismo dell'esponenziale complesso	236
9.14	Coseno e seno	237
9.15	Proprietà commutativa per le serie numeriche	239
9.16	Proprietà associativa/dissociativa per le serie	241
9.17	Sviluppi in base $b$	242
9.18	Somme infinite non ordinate: cenni	246
9.19	Il criterio di Raabe	247

<b>10 Altre nozioni di topologia</b>	<b>249</b>
10.1 Chiusura	249
10.2 Punti di accumulazione e punti isolati	250
10.3 Successioni e punti di accumulazione	251
10.4 Successioni e chiusura	252
10.5 Compatti per successioni	252
10.6 Compattezza	253
10.7 Chiusura e punti di accumulazione in $\mathbb{R}^2$	254
10.8 Complementi ed esercizi	254
10.9 Interno di un insieme	256
10.10 Frontiera	256
<b>11 Limite per funzioni reali di una variabile reale</b>	<b>258</b>
11.1 Limiti delle funzioni reali di una variabile reale	258
11.2 Casi particolari	260
11.3 Funzioni convergenti e divergenti	261
11.4 Limiti delle restrizioni; limiti destri e sinistri	262
11.5 Limiti delle funzioni monotone	264
11.6 Teoremi sui limiti	265
11.7 Forme indeterminate	266
11.8 Limiti notevoli	269
<b>12 Continuità per funzioni reali di una variabile</b>	<b>271</b>
12.1 Definizione di continuità	271
12.2 Operazioni con funzioni continue	272
12.3 Limiti e continuità delle funzioni composte	273
12.4 Continuità delle restrizioni e delle estensioni	274
12.5 Continuità in tutto il dominio	275
12.6 Prolungamento per continuità	276
12.7 Topologia indotta	278
12.8 Immagini continue di intervalli sono intervalli	280
12.9 Continuità delle funzioni monotone	281
12.10 Omeomorfismi	282
12.11 Applicazione alle funzioni trigonometriche; il numero $\pi$	285
12.12 Inverse locali di coseno e seno	287
12.13 Argomento principale	287
12.14 Funzioni iperboliche	288
12.15 Punti di discontinuità	290
12.16 Funzioni bilanciate, funzioni a scalino	291
12.17 Estremanti assoluti	294
12.18 Estremanti locali	294
12.19 Funzioni continue su compatti	297
<b>13 Confronto locale tra funzioni</b>	<b>299</b>
13.1 Relazioni di confronto forte	299
13.2 Asintoticità	301
13.3 Criterio di asintoticità per la convergenza assoluta di una serie	302
13.4 Sviluppi asintotici delle funzioni elementari	304
13.5 Composizione di funzioni e confronto forte	307

13.6	Scale di confronto, parti principali, sviluppi asintotici	307
13.7	Relazioni di confronto debole: $O$ grande	311
13.8	Metodo per lo studio della convergenza di alcune serie	312
<b>14</b>	<b>Derivate</b>	<b>315</b>
14.1	Variazione di una funzione relativamente alla variabile indipendente	315
14.2	Derivata di una funzione reale di una variabile reale	316
14.3	Derivate destre e sinistre	317
14.4	La derivabilità implica la continuità	317
14.5	Funzione derivata; derivate delle funzioni elementari	318
14.6	Linearità della derivazione	320
14.7	Derivazione dei prodotti	321
14.8	Derivazione del reciproco e del quoziente	322
14.9	Derivazione delle composizioni: regola della catena	323
14.10	Derivata del modulo di una funzione	325
14.11	Derivazione delle funzioni inverse	325
14.12	Diffeomorfismi	326
14.13	Derivata di arco coseno, arco seno e arco tangente	327
14.14	Derivata nulla e funzioni costanti	328
14.15	Una funzione continua mai derivabile	329
14.16	Teorema del valor medio	331
<b>15</b>	<b>Integrale secondo Riemann</b>	<b>333</b>
15.1	Integrale delle funzioni a scalino su intervalli compatti	333
15.2	Funzioni Riemann integrabili	335
15.3	Prime proprietà dell'integrale	340
15.4	Un'altra condizione di integrabilità	341
15.5	Altre proprietà dell'integrale	343
15.6	Integrale e area del trapezoide	344
15.7	Funzioni localmente integrabili	346
15.8	Integrale esteso a un intervallo orientato	347
15.9	Integrale indefinito	348
15.10	Primitive, o antiderivate; teorema fondamentale del calcolo	350
15.11	Integrali indefiniti	351
15.12	Integrazione delle funzioni razionali; primi cenni	353
15.13	Integrazione per parti	355
15.14	Integrazione per sostituzione	359
15.15	Integrazione definita per parti e per sostituzione	364
15.16	Il logaritmo come quadratura dell'iperbole	364
15.17	La serie logaritmica	365
15.18	Media di una funzione integrabile	367
15.19	Funzioni generalmente continue	368
15.20	Un'estensione del teorema fondamentale del calcolo	369

<b>16 Teoremi classici del calcolo differenziale</b>	<b>373</b>
16.1 Derivate ed estremi locali	373
16.2 Teorema di Rolle, versione classica	374
16.3 Teorema del valor medio, versione classica	375
16.4 Corollari del teorema del valor medio	375
16.5 Il teorema degli incrementi finiti	380
16.6 La regola di de l'Hôpital	381
16.7 Corollari	383
16.8 Derivate successive	383
16.9 Altre considerazioni	385
16.10 Punti di estremo locale interno e derivate successive	388
16.11 Funzioni convesse e concave	390
16.12 Asintoti	393
16.13 Sviluppi asintotici e derivate successive; la formula di Taylor con il resto nella forma di Peano	397
16.14 Applicazioni	399
<b>17 Derivate e integrali di funzioni a valori complessi</b>	<b>402</b>
17.1 Funzioni complesse di una variabile reale	402
17.2 Funzioni complesse di variabile complessa	405
17.3 Funzioni razionali	408
17.4 Integrazione delle funzioni razionali	413
17.5 Alcune sostituzioni importanti	415
17.6 Integrazione delle funzioni complesse di variabile reale	422
17.7 Funzioni non elementarmente integrabili	425
17.8 Primitive di ordine superiore al primo	426
17.9 Serie di Taylor	428
17.10 La serie binomiale	430
17.11 Formula di Taylor con il resto nella forma di Lagrange	431
17.12 Esercizi di integrazione	432
17.13 L'integrale come limite delle somme di Riemann	439
17.14 Ancora sulle funzioni convesse	441
<b>18 Integrali generalizzati</b>	<b>446</b>
18.1 Definizione e primi risultati	446
18.2 Criteri di convergenza	455
18.3 Altre considerazioni	456
18.4 Integrali generalizzati e serie	460
18.5 Criterio di Abel-Dirichlet	462
18.6 Esercizi ricapitolativi	467
18.7 Il teorema della convergenza monotona	480
18.8 Il logaritmo complesso	484
<b>19 Complementi di vario genere</b>	<b>488</b>
19.1 Diametro di un sottoinsieme di $C$	488
19.2 Successioni di Cauchy	489
19.3 Criterio di convergenza di Cauchy: caso delle successioni	489
19.4 Criterio di convergenza di Cauchy per le serie numeriche	491
19.5 Criterio di convergenza di Cauchy per le funzioni	491

19.6	La funzione di oscillazione e la continuità	492
19.7	Continuità uniforme	494
19.8	Estendibilità delle funzioni uniformemente continue	496
19.9	Continuità uniforme sui compatti	496
19.10	Massimo e minimo limite	497
19.11	Complementi sulle successioni: i teoremi di Cesàro	500
19.12	Alcuni complementi sulle successioni	503
19.13	Alcune equazioni funzionali	505
<b>20</b>	<b>Alcune equazioni differenziali</b>	<b>508</b>
20.1	Introduzione	508
20.2	Equazione lineare omogenea del primo ordine	508
20.3	Equazione lineare non omogenea del primo ordine	510
20.4	Operatori differenziali	512
20.5	Equazioni lineari del secondo ordine	512
20.6	Esempi ed esercizi	517
20.7	Tecniche risolutive per alcune equazioni non omogenee	521
20.8	Appendice sulle funzioni sinusoidali	533
20.9	Equazioni differenziali a variabili separabili	536
<b>Appendici</b>		<b>539</b>
<b>A</b>	<b>Altre versioni dell'assioma della scelta: il lemma di Zorn</b>	<b>541</b>
A.1	Prime conseguenze dell'assioma della scelta	544
<b>B</b>	<b>Completezza e numeri reali</b>	<b>547</b>
B.1	Introduzione	547
B.2	Completamento di insiemi ordinati $\eta_0$	550
<b>C</b>	<b>Ordinali, cardinali, numeri naturali</b>	<b>559</b>
C.1	Insiemi bene ordinati	559
C.2	Numeri naturali	560
<b>D</b>	<b>Assiomi della teoria degli insiemi</b>	<b>564</b>
	<b>Formulario di Analisi Uno</b>	<b>567</b>

# Prefazioni

## ■ PRAFAZIONE ALLA PRIMA EDIZIONE

Questo libro si concentra sulle nozioni più importanti dell'analisi elementare, che sono limiti, derivate, integrali. Specie all'inizio degli studi universitari è auspicabile che lo sforzo del principiante si rivolga all'apprendimento di tali concetti. Una buona organizzazione di queste nozioni è indispensabile: per la maggior parte degli utenti, siano essi matematici, fisici, ingegneri, statistici o altro, il calcolo differenziale ed integrale è uno strumento di lavoro da usare nel resto della carriera. È quindi opportuno che esso venga appreso senza troppi fronzoli e generalizzazioni inutili, ma anche con linguaggio corretto; è sbagliato credere che semplificare l'esposizione voglia dire raccontare le cose in modo incompleto o addirittura errato.

La topologia, pur essendo trattata col linguaggio generale, è qui soltanto topologia della retta e del piano; il modo astratto (e più sofisticato, ma più semplice, una volta che chi studia ha conquistato le difficoltà di terminologia, e si è formato un repertorio di esempi) di vedere i limiti ed in generale la topologia è meglio lasciato al secondo anno di corso. A mio avviso, anche la teoria dei numeri reali è meglio svolta solo per via assiomatica: le costruzioni classiche dei reali a partire dai razionali sono in questo libro fatte solo in appendice (appendice B). La teoria dei numeri reali è (secondo me) tipico argomento di matematica elementare da svolgere da un punto di vista superiore; la nozione che c'è sotto, di completamento, sia esso per l'ordine o alla Cauchy, è raffinata e difficile; ritengo che ci si debba limitare a mostrare come tante delle cose che si fanno nei reali sarebbero impossibili nei razionali.

L'opportunità di disporre fin dall'inizio delle nozioni riguardanti le funzioni elementari fa sì che alcuni sviluppi in serie, quelli dell'esponenziale e delle funzioni circolari, siano fatti abbastanza presto; la naturalità delle nozioni non è forse in questo modo sempre rispettata, ma si guadagna in concisione: i limiti più importanti si presentano poi spontanei.

Ho preferito seguire la via classica, facendo prima le derivate, e dopo gli integrali, cercando tuttavia di far in modo che i due argomenti vengano trattati in rapida successione, come è giusto; il libro è strutturato in modo che, volendo, un docente può far prima gli integrali, almeno la definizione, e poi le derivate; il consiglio è di fare gli integrali dopo la definizione di derivata, ma prima dei teoremi classici del calcolo differenziale (Rolle, Lagrange, ecc.). Gli integrali generalizzati sono qui ampiamente trattati per la loro grande importanza applicativa. Le equazioni differenziali, i più semplici tipi tra esse, e cioè le equazioni lineari del primo ordine e lineari del secondo ordine a coefficienti costanti sono qui risolte in modo completo e rigoroso, pur senza utilizzare

teoremi generali di esistenza ed unicità; lo scopo è quello di fornire applicazioni significative ed utili delle tecniche di derivazione ed integrazione prima studiate; ci sono anche cenni, sia pure minimi, alle equazioni a variabili separabili.

Le nozioni preliminari comprendono: il principio di induzione, caposaldo del ragionamento matematico, con esempi ed applicazioni anche algebriche e combinatorie; la nozione di cardinale di un insieme, con enfasi ovviamente sulle cardinalità usate da tutti, e cioè finito, numerabile e continuo; alcune nozioni di algebra, per chiarire cosa sia un'operazione binaria, e le proprietà formali di un'operazione; il principio di identità dei polinomi. La nozione di gruppo, anello, corpo, omomorfismo, isomorfismo, con numerosi esempi, viene pure fornita; a questo livello gli esempi sono naturalmente quasi più importanti della nozione stessa; si parla anche di relazioni di equivalenza e di relazioni di ordine. Si consiglia al docente di sviluppare tali nozioni via via che se ne presenta la necessità; il loro uso esplicito nel libro è marginale; per studenti di matematica, che hanno in simultanea un corso di algebra, l'intero capitolo può ovviamente essere omissivo. La nozione di successione di Cauchy e di completezza metrica viene data, e se ne sottolinea l'importanza teorica, ma essa non è utilizzata per alcun teorema; similmente, si definiscono le funzioni uniformemente continue, e si dimostrano i soliti teoremi su tali funzioni, più in omaggio alla tradizione che per reale necessità.

In appendice sono state aggiunte varie nozioni di teoria degli insiemi, per il lettore curioso; c'è anche la costruzione del corpo reale  $\mathbb{R}$ , sia con le sezioni di Dedekind che con le successioni di Cauchy. È bene avvertire subito che l'appendice è tenuta ad un livello più elevato del resto del libro, e più che ai principianti si rivolge a quelli che riprendono in mano il libro di testo dopo due o tre anni di Università (o anche dopo la laurea): lo scopo principale è far capire che le questioni riguardanti i fondamenti sono molto interessanti, e possono essere discusse e dimostrate, ma che la cosa richiede fatica.

L'opera è estremamente ricca di esempi ed esercizi, molti dei quali sono risolti; esempi ed esercizi, in numero di 538, sono una discreta frazione del libro (più di 150 pagine); ci sono anche una ventina di pagine di esercizi sulla convergenza uniforme, argomento non svolto in questo libro.

Alcuni esercizi, ma talvolta anche intere sezioni, o alcuni teoremi, sono segnati con gli "occhietti". Questi simboli significano:

- ◉◉ esercizi standard, utili per il controllo di comprensione della teoria; si consiglia di farli tutti;
- ◉◉ materiale importante, da leggere e capire a fondo: non tutto il materiale importante è così segnato, altre volte il contesto dovrebbe far capire l'importanza dell'argomento;
- ◉◉ materiale più astratto, a carattere teorico, o generale; complementi;
- ◉◉ si consiglia di ometterlo in prima lettura; non essenziale per la comprensione del resto;
- ◉◉ esercizio difficile.

Un ringraziamento particolare a Carlo Mariconda, che ha fornito molti esercizi, oltre a numerosi consigli e suggerimenti.

## ■ PRAFAZIONE ALLA SECONDA EDIZIONE

In questa seconda edizione le modifiche importanti sono due: è stata incorporata l'Analisi Zero come preliminare al libro, ed è stato tolto un capitolo di esercizi alla fine, che è divenuto invece parte di un testo autonomo. L'Analisi Zero contiene la nomenclatura essenziale sulle funzioni e sui numeri reali; era prima requisito indispensabile al volume, e l'opera è in tal modo autosufficiente; l'Analisi Zero ha comunque subito alcune revisioni, qualche taglio, e qualche aggiunta. Il capitolo di esercizi tolto appesantiva considerevolmente un volume che ne è già ricco; questi esercizi hanno migliore collocazione in un volume apposito. Altre piccole modifiche sono state apportate; alcune dimostrazioni sono state cambiate, ed alcuni argomenti hanno cambiato posto; vari errori di stampa sono stati corretti.

★ Le parti in carattere piccolo sono principalmente esempi ed esercizi che si consiglia di affrontare subito; quelle contrassegnate con una stellina sono considerazioni o dimostrazioni che possono essere omesse in prima lettura.

Devo ancora ringraziare Carlo Mariconda, che ha dato molti importanti suggerimenti.

## ■ PRAFAZIONE ALLA TERZA EDIZIONE

In questa terza edizione la modifica più rilevante riguarda il Capitolo 15, *Integrale secondo Riemann*, che è stato interamente riscritto. Sono state anche aggiunte alcune versioni più generali del teorema del valor medio, e sono stati corretti alcuni errori.

# 0 Analisi zero

## ■ 0.1 IL LINGUAGGIO DEGLI INSIEMI

In questa sezione fissiamo alcune definizioni e alcuni simboli che useremo spesso. Essi saranno un po' il nostro linguaggio, che integra quello comune, e lo sostituisce nelle situazioni in cui questo presenta ambiguità. Come quando si apprende una nuova lingua, le definizioni qui date vanno prese alla lettera: esse non sono nulla di più di quanto affermano di essere, e non celano niente di particolarmente profondo.

### 0.1.1 Insiemi

Un *insieme* è una collezione di oggetti. Gli oggetti di questa collezione si chiamano *elementi dell'insieme*: se  $A$  è un insieme e  $a$  un suo elemento, per indicare questo fatto si scrive  $a \in A$  (o anche  $A \ni a$ ) e si dice che  $a$  *appartiene ad*  $A$ . Se l'insieme  $A$  è costituito dagli oggetti  $a, b, c, d, \dots$ , si scrive  $A = \{a, b, c, d, \dots\}$ . Per indicare che l'oggetto  $a$  *non* è elemento dell'insieme  $A$  si scrive  $a \notin A$  (o  $A \not\ni a$ ) e si dice che  $a$  *non appartiene ad*  $A$ . Si ammette l'esistenza di un insieme *privo di elementi*. Esso si chiama *insieme vuoto* e si indica con il simbolo  $\emptyset$ . Quindi per ogni oggetto  $x$  si ha  $x \notin \emptyset$ . Un insieme è definito dai suoi elementi: due insiemi  $A, B$  sono uguali quando sono formati dalla medesima collezione di oggetti; cioè si ha  $A = B$  se e solo se ogni elemento di  $A$  è anche elemento di  $B$  e inoltre ogni elemento di  $B$  è anche elemento di  $A$ .

### 0.1.2 Sottoinsiemi

Se  $A, B$  sono insiemi ed *ogni* elemento di  $A$  è anche elemento di  $B$ , si dice che  $A$  è sottoinsieme di  $B$ ; si scrive  $A \subseteq B$  (oppure  $B \supseteq A$ ), che si legge *A contenuto in B* (oppure *B contiene A*). Per esempio, se  $\Pi$  è il piano della geometria elementare, pensato come insieme dei suoi punti, tutte le rette di  $\Pi$  (pensate pure come insieme dei loro punti) sono sottoinsiemi di  $\Pi$ . Sono sottoinsiemi di  $\Pi$  anche quelli formati dai singoli punti: se  $P$  è un punto di  $\Pi$  (cioè se  $P \in \Pi$ ), allora  $\{P\} \subseteq \Pi$ . Attenzione a non confondere fra loro elementi e sottoinsiemi di un dato insieme, cosa che il linguaggio comune tende spesso a fare. Nel contesto *suddetto*, sarebbe errato dire che una retta che giace in  $\Pi$  appartiene a  $\Pi$  (è corretto dire che è contenuta in  $\Pi$ ); naturalmente questi abusi di linguaggio sono permessi, salvo nei casi in cui è importante essere precisi. Sarebbe sbagliato scrivere sia  $P \subseteq \Pi$ , sia  $\{P\} \in \Pi$ : un sottoinsieme di un insieme in generale non è elemento dell'insieme, e un elemento di un insieme in generale non è sottoinsieme dell'insieme stesso. Osserviamo subito anche che per

varie ragioni conviene considerare un oggetto e l'insieme che ha quell'oggetto come unico elemento come cose diverse fra loro:  $x \neq \{x\}$ .

Dato un insieme  $A$ , è sottoinsieme di  $A$  anche  $A$  stesso; esso è detto sottoinsieme *improprio* di  $A$ . Se  $B$  è sottoinsieme di  $A$  diverso da  $A$ , si scrive  $B \subset A$  (oppure  $A \supset B$ ) e si dice che  $B$  è contenuto propriamente in  $A$  (per rafforzare si scrive talvolta  $B \subsetneq A$  e cioè  $B$  contenuto in  $A$  e diverso da  $A$ ). Si noti che  $\emptyset \subseteq A$  per ogni insieme  $A$ : l'insieme vuoto è sottoinsieme di ogni insieme. È evidente che si ha  $A = B$  se e solo se  $A \subseteq B$  e anche  $B \subseteq A$ .

### 0.1.3 Insieme delle parti

La parola *insieme* indica, come detto, una collezione di oggetti, considerata come nuovo oggetto singolo. Gli insiemi possono quindi essere a loro volta elementi di altri insiemi: per esempio, dato un piano  $\Pi$ , sempre pensato come insieme dei suoi punti, possiamo formare l'insieme di tutte le rette di  $\Pi$ , che ha queste rette come suoi elementi. Dato l'insieme  $A = \{1, 2\}$ , l'insieme di tutti i suoi sottoinsiemi è  $B = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ .

Dato un qualsiasi insieme  $X$ , si ammette l'esistenza di un insieme  $\mathcal{P}(X)$  detto *insieme delle parti* di  $X$ , i cui elementi sono precisamente i sottoinsiemi di  $X$  ( $\emptyset$  ed  $X$  inclusi). L'insieme  $B$  descritto sopra è  $\mathcal{P}(\{1, 2\})$ . Si noti che è  $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ ; ora  $\{\emptyset\} \neq \emptyset$ : infatti è  $\emptyset \in \{\emptyset\}$ , mentre è  $x \notin \emptyset$  per ogni oggetto  $x$  (a chi ama figurarsi queste cose intuitivamente, suggeriamo di pensare agli insiemi come *scatole* contenenti i loro elementi; l'insieme vuoto è una scatola vuota;  $\{\emptyset\}$  è una scatola contenente una scatola vuota come unico oggetto, quindi  $\{\emptyset\}$  non è una scatola vuota ...).

### 0.1.4 Intersezione, unione e differenza

Se  $A, B$  sono insiemi, l'*intersezione* di  $A$  e  $B$ , indicata con  $A \cap B$ , è l'insieme degli elementi che appartengono sia ad  $A$  che a  $B$ . È chiaro che è  $A \cap B = B \cap A$ . Se  $A \cap B = \emptyset$ ,  $A$  e  $B$  si dicono *disgiunti*. Per esempio, sia  $\Pi$  il piano, e siano  $A, B$  due rette contenute in  $\Pi$ . Dalla geometria elementare sappiamo che sono possibili tre casi per  $A \cap B$ :

- (1)  $A \cap B = \{P\}$  dove  $P \in \Pi$  ( $P$  è il punto di intersezione delle due rette) quando  $A$  e  $B$  non sono parallele;
- (2)  $A \cap B = \emptyset$  quando  $A$  e  $B$  sono parallele e distinte;
- (3)  $A \cap B = A = B$  quando  $A$  e  $B$  coincidono.

Se  $A, B$  sono insiemi, la loro *unione*  $A \cup B$  è l'insieme che ha per elementi gli elementi di  $A$  e gli elementi di  $B$ : cioè  $x \in A \cup B$  se e solo se  $x$  appartiene ad  $A$ , oppure  $x$  appartiene a  $B$ , le due cose potendo essere vere entrambe. Per esempio  $\{1, 2, 3\} \cup \{1, 5\} = \{1, 2, 3, 5\}$ . Una retta è sempre unione delle due semirette nelle quali è divisa da un suo punto. Chiaramente è  $A \cup B = B \cup A$ .

Infine, dati due insiemi  $A, B$ , la loro *differenza*  $A \setminus B$  è l'insieme che ha per elementi quegli elementi di  $A$  che non appartengono a  $B$ : cioè,  $x \in A \setminus B$  se e solo se  $x \in A$  e simultaneamente  $x \notin B$ . In generale è  $B \setminus A \neq A \setminus B$ . Per ogni insieme  $A$  è  $A \setminus A = \emptyset$ . In generale  $A \setminus B = \emptyset$  equivale ad  $A \subseteq B$ .

# 10 Altre nozioni di topologia

## ■ 10.1 CHIUSURA

Se  $E$  è sottoinsieme di  $\mathbb{R}$ , esiste un minimo chiuso di  $\mathbb{R}$  che lo contiene, minimo nel senso dell'inclusione: si prendono tutti i sottoinsiemi chiusi di  $\mathbb{R}$  contenenti  $E$ , fra i quali c'è almeno  $\mathbb{R}$  stesso, e se ne fa l'intersezione,  $\bar{E}$ . Poiché una arbitraria intersezione di chiusi è un chiuso, tale insieme  $\bar{E}$  è chiuso, contiene  $E$ , e ovviamente, se un chiuso di  $\mathbb{R}$  contiene  $E$ , esso contiene anche  $\bar{E}$ . L'insieme  $\bar{E}$  si indica anche con  $\text{cl}_{\mathbb{R}}(E)$  (*chiusura* di  $E$  in  $\mathbb{R}$ ). Si ha insomma, per definizione

$$\text{cl}_{\mathbb{R}}(E) := \bar{E} = \bigcap \{C : C \supseteq E, C \text{ chiuso in } \mathbb{R}\}.$$

**Proposizione 10.1.1.** *Sia  $E \subseteq \mathbb{R}$ . Un punto  $x \in \mathbb{R}$  appartiene alla chiusura di  $E$  in  $\mathbb{R}$  se e solo se, per ogni intorno  $U$  di  $x$  in  $\mathbb{R}$ , si ha  $U \cap E \neq \emptyset$ .*

*Dimostrazione.* Mostriamo che  $x \notin \bar{E}$  se e solo se esiste un intorno di  $x \in \mathbb{R}$  disgiunto da  $E$ . Se  $U$  è intorno di  $x$ , per definizione di intorno esiste un aperto  $A$  di  $\mathbb{R}$  tale che sia  $x \in A \subseteq U$ ; se  $U \cap E = \emptyset$ , si ha anche  $E \cap A = \emptyset$ ; ma allora  $C = \mathbb{R} \setminus A \supseteq E$  è un chiuso di  $\mathbb{R}$  contenente  $E$  e non contenente  $x$ , per cui  $x \notin \bar{E}$ . Se poi  $x \notin \bar{E}$ , esiste un chiuso  $C$  contenente  $E$  tale che  $x \notin C$ ; ma allora  $A = \mathbb{R} \setminus C$  è un intorno di  $x$  (è aperto, e contiene  $x$ ) disgiunto da  $E$ .  $\square$

Quanto detto per la chiusura in  $\mathbb{R}$  si ripete per la chiusura in  $\tilde{\mathbb{R}}$  di un sottoinsieme di  $\tilde{\mathbb{R}}$ : se  $E \subseteq \tilde{\mathbb{R}}$ , si pone

$$\text{cl}_{\tilde{\mathbb{R}}}(E) = \bigcap \{C : C \supseteq E, C \text{ chiuso in } \tilde{\mathbb{R}}\}.$$

La proposizione precedente resta vera, con  $\tilde{\mathbb{R}}$  al posto di  $\mathbb{R}$ , intorni in  $\tilde{\mathbb{R}}$  anziché intorni in  $\mathbb{R}$ , ecc.

---

### Esempio 10.1.2.

$\mathbb{N}$  e  $\mathbb{Z}$  sono chiusi in  $\mathbb{R}$ , pertanto  $\text{cl}_{\mathbb{R}}(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$  e  $\text{cl}_{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ ; invece è  $\text{cl}_{\tilde{\mathbb{R}}}(\mathbb{N}) = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ ,  $\text{cl}_{\tilde{\mathbb{R}}}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}$ .

---

●● **Esercizio 10.1.3.** Sia  $E \subseteq \mathbb{R}$  non vuoto; se  $E$  è superiormente limitato, allora  $\sup E \in \text{cl } E$ , ed analogamente  $\inf E \in \text{cl } E$  se  $E$  è inferiormente limitato.

#### Risoluzione

Se  $b = \sup E$ , per ogni  $r > 0$   $B(b, r) \cap E$  è non vuoto: infatti, essendo  $b - r < b$ , esiste  $x \in E$  tale che sia  $b - r < x$ ; e, poiché  $x \leq b$ , si ha  $b - r < x < b + r$ ; ciò prova che  $b \in \text{cl } E$ ; analogamente per  $\inf E$ .

.....

**Esercizio 10.1.4.** Mostrare che la chiusura in  $\mathbb{R}$  di un intervallo non vuoto  $I$  si ottiene aggiungendo ad  $I$  i suoi estremi superiore ed inferiore, se questi sono in  $\mathbb{R}$ ; e la chiusura in  $\mathbb{R}$  si ottiene aggiungendo  $\sup_{\mathbb{R}} I$  ed  $\inf_{\mathbb{R}} I$ .

**Esercizio 10.1.5.** Sia  $E \subseteq \mathbb{R}$ , non vuoto; mostrare che  $+\infty$  (risp.  $-\infty$ ) appartiene alla chiusura in  $\widetilde{\mathbb{R}}$  di  $E$  se e solo se  $E$  non è superiormente (risp. inferiormente) limitato. Mostrare che un sottoinsieme di  $\mathbb{R}$  è chiuso in  $\widetilde{\mathbb{R}}$  se e solo se è chiuso in  $\mathbb{R}$ , ed è limitato. Mostrare che la chiusura in  $\widetilde{\mathbb{R}}$  di un sottoinsieme  $E$  di  $\mathbb{R}$  coincide con la chiusura in  $\mathbb{R}$ , con aggiunto  $+\infty$  se  $E$  non è superiormente limitato, e  $-\infty$  se  $E$  non è inferiormente limitato.

## ■ 10.2 PUNTI DI ACCUMULAZIONE E PUNTI ISOLATI

Strettamente legata alla nozione di chiusura è la nozione di punto di accumulazione.

**Definizione 10.2.1.** Sia  $E \subseteq \mathbb{R}$ . Un punto  $p \in \mathbb{R}$  si dice di *accumulazione* per  $E$  in  $\mathbb{R}$  se in ogni intorno di  $p$  in  $\mathbb{R}$  cadono punti di  $E$  distinti da  $p$ .

Detto in altro modo,  $p$  è di accumulazione per  $E$  se  $(U \setminus \{p\}) \cap E \neq \emptyset$  per ogni intorno  $U$  di  $p$  in  $\mathbb{R}$ . Si ha quindi:  $p$  è di accumulazione per  $E$  se e solo se appartiene alla chiusura di  $E \setminus \{p\}$ . I punti di accumulazione di un insieme possono appartenere, o non appartenere, all'insieme stesso: ad esempio, l'insieme dei punti di accumulazione di  $E = [0, 1[$  è  $\bar{E} = [0, 1]$ , ed 1 non sta in  $E$ . Se un punto di  $E$  non è di accumulazione per  $E$ , esso si dice *punto isolato* di  $E$ . Dalla proposizione 10.1.1 risulta che la chiusura di  $E$  in  $\mathbb{R}$  è formata dai punti di  $E$ , e dai punti di accumulazione di  $E$  in  $\mathbb{R}$ . Pertanto vale quanto segue.

**Proposizione 10.2.2.** *Un sottoinsieme di  $\mathbb{R}$  è chiuso in  $\mathbb{R}$  se e solo se contiene tutti i suoi punti di accumulazione in  $\mathbb{R}$ .*

*Dimostrazione.* Fatta sopra. Si noti piuttosto che un insieme privo di punti di accumulazione è in particolare chiuso.  $\square$

La definizione di punto di accumulazione in  $\widetilde{\mathbb{R}}$  si dà allo stesso modo, cioè  $p \in \widetilde{\mathbb{R}}$  si dice di accumulazione per il sottoinsieme  $E$  di  $\widetilde{\mathbb{R}}$  se ogni intorno di  $p$  in  $\widetilde{\mathbb{R}}$  contiene punti di  $E$  diversi da  $p$ . È facile vedere che  $p \in \mathbb{R}$  è di accumulazione per  $E$  in  $\widetilde{\mathbb{R}}$  se e solo se  $p$  è di accumulazione in  $\mathbb{R}$  per  $E \cap \mathbb{R}$ ; inoltre  $+\infty$  (risp.  $-\infty$ ) è di accumulazione per  $E$  in  $\widetilde{\mathbb{R}}$  se e solo se  $E \cap \mathbb{R}$  è superiormente (risp. inferiormente) non limitato, e non è vuoto. E si noti anche che dalla definizione segue subito che se  $a$  è di accumulazione per un sottoinsieme  $S$  di  $E$ , allora  $a$  è di accumulazione per  $E$ .

**Esercizio 10.2.3.** Sia  $E \subseteq \mathbb{R}$  non vuoto; se  $E$  è superiormente limitato e non ha massimo, allora  $\sup E$  è di accumulazione per  $E$ ; e se  $E$  è inferiormente limitato e non ha minimo, allora  $\inf E$  è di accumulazione per  $E$  (vedi anche 10.1.3).

■ 10.3 SUCCESIONI E PUNTI DI ACCUMULAZIONE

Un'utile caratterizzazione dei punti di accumulazione è la seguente.

**Teorema 10.3.1.** *Sia  $E$  sottoinsieme di  $\mathbb{R}$ , e  $c \in \mathbb{R}$ . Sono equivalenti:*

- (a)  $c$  è di accumulazione per  $E$ ;
- (b) esiste una successione  $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$  di punti di  $E$  diversi da  $c$  che converge a  $c$ ;
- (c) in ogni intorno di  $c$  cadono infiniti punti di  $E$ .

*Dimostrazione.* Mostriamo che, se  $c$  è di accumulazione per  $E$ , esiste una successione iniettiva  $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$  (talvolta si dice: una successione di punti tutti distinti) in  $E \setminus \{c\}$  che converge a  $c$ ; ciò mostra che (a) implica (b) e (c); è chiaro che (c) e (b) a loro volta implicano (a). La successione si definisce induttivamente come segue: posto  $r_0 = 1$ , si sceglie  $x_0 \in B(c, 1] \cap (E \setminus \{c\})$ , certo esistente per l'ipotesi (a); si scelga poi  $x_1 \in B(c, |x_0 - c|/2] \cap (E \setminus \{c\})$ , cioè tale che  $0 < |x_1 - c| \leq |x_0 - c|/2 < 1/2$ ; si sceglie  $x_2 \in B(c, |x_1 - c|/2] \cap (E \setminus \{c\})$  e così via; cioè, supponendo di aver definito  $x_0, \dots, x_n$  nel modo sopra detto, si sceglie  $x_{n+1} \in B(c, |x_n - c|/2] \cap (E \setminus \{c\})$ ; certamente la successione  $j \mapsto x_j$  è iniettiva, essendo strettamente decrescente la successione  $j \mapsto |x_j - c|$  delle distanze da  $c$  dei suoi punti; inoltre  $0 < |x_n - c| \leq |x_0 - c|/2^n < 1/2^n$  mostra che la successione converge a  $c$ . □

.....

**Esercizio 10.3.2.** Mostrare che  $c$  è di accumulazione per  $E$  in  $\mathbb{R}$  se e solo se esiste una successione in  $E$  che non sia definitivamente costante e che converga a  $c$ .

.....

**Esercizio 10.3.3.** Mostrare che un sottoinsieme di  $\mathbb{R}$  ha una successione divergente a  $+\infty$  (risp.:  $-\infty$ ) se e solo se non è superiormente (risp.: inferiormente) limitato. Dedurre che  $c \in \mathbb{R}$  è di accumulazione per il sottoinsieme  $D$  di  $\mathbb{R}$  se e solo se esiste una successione di  $D \setminus \{c\}$  che tende a  $c$  in  $\mathbb{R}$ .

.....

**Esercizio 10.3.4.** Osservare che una successione di  $E \subseteq \mathbb{R}$  converge a un punto isolato di  $E$  se e solo se è definitivamente costante.

.....

⊙⊙ **Esercizio 10.3.5.** Trovare tutti i punti di accumulazione dell'insieme

$$E = \left\{ \frac{1}{m} + \frac{1}{n} : m, n \geq 1, m, n \in \mathbb{N} \right\}$$

e descriverne la chiusura.

.....

**Esercizio 10.3.6.** Mostrare che l'insieme dei punti di accumulazione di  $\mathbb{Q} \cap [a, b]$  è  $[a, b]$ , se  $a, b$ , con  $a < b$ , sono reali. E l'insieme dei punti di accumulazione di  $\mathbb{P} \cap [a, b]$ , dove  $\mathbb{P} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  è l'insieme degli irrazionali? (vedi 6.2.4.)

.....

## ■ 10.4 SUCCESSIONI E CHIUSURA

Si ha subito, dai precedenti risultati, quanto segue.

**Proposizione 10.4.1.** *Un numero reale  $c$  sta nella chiusura di un sottoinsieme  $E$  di  $\mathbb{R}$  se e solo se esiste una successione di punti di  $E$  che converge a  $c$  in  $\mathbb{R}$ .*

*Dimostrazione.* Supponiamo che sia  $c \in \bar{E}$ ; se  $c$  è di accumulazione per  $E$ , esiste una successione di  $E \setminus \{c\}$  (e quindi di  $E$ ) che converge a  $c$  in  $\mathbb{R}$ . Altrimenti, deve essere  $c \in E$ , cioè  $c$  isolato per  $E$ ; in tal caso si prende la successione costantemente  $c$ . Se poi  $(c_j)_{j \in \mathbb{N}}$  è successione di  $E$  che converge a  $c \in \mathbb{R}$  in  $\mathbb{R}$ , allora  $c \in \text{cl}_{\mathbb{R}} E$ ; se infatti  $V$  è intorno di  $c$  in  $\mathbb{R}$ , la successione si trova definitivamente in  $V$ , cioè  $c_j \in V$  per  $j \geq j_V$ ; in particolare  $V \cap E$  non è vuoto, contenendo  $c_j$  per  $j \geq j_V$ .  $\square$

Si noti anche

**Corollario 10.4.2.** *Un sottoinsieme  $E$  di  $\mathbb{R}$  è chiuso in  $\mathbb{R}$  se e solo se per ogni successione  $(c_j)_{j \in \mathbb{N}}$  di  $E$  che abbia limite  $c$  in  $\mathbb{R}$  si ha  $c \in E$ .*

Detto in altre parole, un sottoinsieme di  $\mathbb{R}$  è chiuso in  $\mathbb{R}$  se e solo se contiene i limiti di quelle sue successioni che hanno limite in  $\mathbb{R}$ .

*Dimostrazione.* È contenuta in 10.4.1, quando si ricordi che un sottoinsieme di  $\mathbb{R}$  è chiuso in  $\mathbb{R}$  se e solo se coincide con la sua chiusura in  $\mathbb{R}$ .  $\square$

.....

**Esercizio 10.4.3.** Provare che l'insieme  $F = \{x \in \mathbb{R} : e^x - \log(1 + x^2) + x^5 = 0\}$  è chiuso in  $\mathbb{R}$  (usare la continuità dell'esponenziale, 7.17.1, e del logaritmo, 7.17.3, e i teoremi sui limiti di somma e prodotto).

.....

## ■ 10.5 COMPATTI PER SUCCESSIONI

**Definizione 10.5.1.** Un sottoinsieme  $C$  di  $\mathbb{R}$  si dice *sequenzialmente compatto*, o *compatto per successioni*, se ogni successione di  $C$  ha una sottosuccessione che converge a un elemento di  $C$ .

È della massima importanza il seguente teorema.

**Teorema 10.5.2.** *Un sottoinsieme dei reali è sequenzialmente compatto se e solo se è chiuso e limitato.*

*Dimostrazione.* Sufficienza: sia  $C$  chiuso e limitato; dobbiamo provare che se  $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$  è successione in  $C$ , essa ammette una sottosuccessione convergente a un elemento di  $C$ . Essendo  $C$  limitato, la successione  $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$  è limitata; per 7.14.4 essa ha una sottosuccessione convergente, il cui limite appartiene a  $C$ , che contiene tutti i limiti delle sue successioni convergenti, essendo chiuso (10.4.2).

Necessità: viceversa, proviamo che se  $C$  non è chiuso, o non è limitato, allora non è sequenzialmente compatto. Se  $C$  non è chiuso, c'è una successione  $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$  che converge a un  $c \in \bar{E} \setminus E$ ; tutte le sottosuccessioni di questa convergono a  $c$ , e quindi nessuna sottosuccessione converge a un limite in  $C$ ,

negando quindi la compattezza sequenziale di  $C$ . Se poi  $C$  non è limitato, esso non è superiormente limitato, oppure non è inferiormente limitato; nel primo caso esso ha una successione divergente a  $+\infty$ , nel secondo una successione divergente a  $-\infty$ , in ambo i casi una successione le cui sottosuccessioni sono tutte divergenti.  $\square$

## ■ 10.6 COMPATTEZZA

Oltre che sequenzialmente compatti, i chiusi e limitati di  $\mathbb{R}$  sono anche *compatti*, termine che ora sarà spiegato. Chiamiamo *ricoprimento* di un sottoinsieme  $E$  di  $\mathbb{R}$  ogni famiglia  $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  di sottoinsiemi di  $\mathbb{R}$  la cui unione contenga  $E$ ,  $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \supseteq E$ ; il ricoprimento è detto aperto se tutti gli  $A_\lambda$  sono aperti. Un sottoricoprimento di un ricoprimento  $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  di  $E$  è una sottofamiglia che sia ancora un ricoprimento di  $E$ .

### Esempio 10.6.1.

Sia, per ogni  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A_n = ]-\infty, n[$ ;  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  è un ricoprimento aperto di  $\mathbb{R}$  (e quindi anche di ogni sottoinsieme di  $\mathbb{R}$ ). Ogni sottofamiglia infinita è ancora ricoprimento; le sottofamiglie finite non sono invece sottoricoprimento, né per  $\mathbb{R}$ , né per alcun sottoinsieme superiormente illimitato di  $\mathbb{R}$ .

### Esempio 10.6.2.

Sia  $c \in \mathbb{R}$  fissato; per ogni  $n \in \mathbb{N}$  sia  $A_n = \{x \in \mathbb{R} : |x - c| > 1/(n + 1)\} = \mathbb{R} \setminus [c - 1/(n + 1), c + 1/(n + 1)]$  insieme dei punti che distano più di  $1/(n + 1)$  da  $c$ ;  $A_n$  è aperto essendo complementare del chiuso  $[c - 1/(n + 1), c + 1/(n + 1)]$ ;  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  copre  $\mathbb{R} \setminus \{c\}$  e quindi ogni suo sottoinsieme; ogni sottofamiglia infinita è ricoprimento, ma le sottofamiglie finite non coprono alcun sottoinsieme di  $\mathbb{R}$  che abbia  $c$  come punto di accumulazione, come è immediato vedere.

**Definizione 10.6.3.** Un sottoinsieme di  $\mathbb{R}$  si dice *compatto* se ogni suo ricoprimento aperto ammette un sottoricoprimento finito.

L'esempio 10.6.1 sopra mostra che nessun sottoinsieme illimitato di  $\mathbb{R}$  può essere compatto, e l'esempio 10.6.2 mostra che un sottoinsieme non chiuso certamente non è compatto. Tuttavia, vale il seguente teorema.

**10.6.4. TEOREMA DI HEINE-PINCHERLE-BOREL.** *Ogni sottoinsieme chiuso e limitato di  $\mathbb{R}$  è compatto.*

*Dimostrazione.* Sia  $C$  sottoinsieme chiuso e limitato di  $\mathbb{R}$ , e sia  $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  un ricoprimento aperto di  $C$ . Mostriamo che esso ha un sottoricoprimento finito. Se così non fosse, per ogni sottoinsieme finito  $F$  di  $\Lambda$  l'insieme

$$C(F) = C \setminus \bigcup_{\lambda \in F} A_\lambda$$

sarebbe non vuoto; essendo chiuso e limitato avrebbe allora un minimo  $a(F)$ ; si noti che, se  $F \subseteq G$ , allora  $C(F) \supseteq C(G)$  (l'unione cresce, il complementare

cala) e quindi  $a(F) = \min C(F) \leq \min C(G) = a(G)$ . L'insieme  $S = \{a(F) : F \subseteq \Lambda, F \text{ finito}\}$  è sottoinsieme di  $C$ , e quindi è limitato, e ha allora un estremo superiore  $s$ , che appartiene a  $C$  perché  $C$  è chiuso. Esiste  $\mu \in \Lambda$  tale che  $s \in A_\mu$ , perché gli  $A_\lambda$  coprono  $C$ ; essendo  $A_\mu$  aperto, esiste  $\delta > 0$  tale che  $]s - \delta, s + \delta[ \subseteq A_\mu$ . Per le proprietà dell'estremo superiore, esiste un sottoinsieme finito  $F$  di  $\Lambda$  tale che sia  $s - \delta < a(F)$ . Posto  $G = F \cup \{\mu\}$ ,  $G$  è pure sottoinsieme finito di  $\Lambda$ , e poiché contiene  $F$  deve essere  $a(F) \leq a(G)$ ; inoltre è  $a(G) \leq s$  (perché  $s = \sup S$  ed  $a(G) \in S$ ). Deve allora essere  $s - \delta < a(F) \leq a(G) \leq s < s + \delta$ , e quindi  $a(G) \in ]s - \delta, s + \delta[$ ; e questo è assurdo, perché  $]s - \delta, s + \delta[ \subseteq A_\mu$ , ed  $a(G) \notin A_\mu$ .  $\square$

**Esercizio 10.6.5.** Sia  $(C_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  famiglia di sottoinsiemi chiusi e limitati di  $\mathbb{R}$ . Mostrare che, se  $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda = \emptyset$ , allora esiste un sottoinsieme finito  $F$  di  $\Lambda$  tale che  $\bigcap_{\lambda \in F} C_\lambda = \emptyset$ . In particolare si ha il seguente teorema.

**10.6.6. TEOREMA DI CANTOR.** Se  $C_0 \supseteq C_1 \supseteq \dots \supseteq C_n \supseteq C_{n+1} \supseteq \dots$  è una successione decrescente di sottoinsiemi chiusi, limitati e non vuoti di  $\mathbb{R}$ , allora l'intersezione  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$  non è vuota.

## ■ 10.7 CHIUSURA E PUNTI DI ACCUMULAZIONE IN $\mathbb{R}^2$

Le definizioni di tali nozioni sono identiche a quelle date per la topologia della retta. Si dimostra, come per  $\mathbb{R}$ , quanto segue.

**Proposizione 10.7.1.** Sia  $E \subseteq \mathbb{R}^2$ , e sia  $p = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ . Allora:

- (a)  $p$  appartiene alla chiusura di  $E$  in  $\mathbb{R}^2$  se e solo se esiste una successione  $(x_j, y_j)_{j \in \mathbb{N}}$  di punti di  $E$  che converge ad  $(a, b) = p$ ;
- (b)  $p$  è di accumulazione per  $E$  se e solo se esiste una successione  $(x_j, y_j)_{j \in \mathbb{N}}$  di punti di  $E \setminus \{a\}$  che converge ad  $(a, b) = p$ .

*Dimostrazione.* Imitare quelle fatte in 10.3 e 10.4 per il caso reale.  $\square$

## ★ 10.8 COMPLEMENTI ED ESERCIZI

★ **Esercizio 10.8.1.** (TEOREMA DI BOLZANO) Ogni sottoinsieme limitato e infinito di  $\mathbb{R}$  ha almeno un punto di accumulazione in  $\mathbb{R}$ .

### Risoluzione

Sia  $N$  limitato ed infinito. Poiché  $N$  è infinito, esso non può essere bene ordinato in ambo i sensi (vedi 3.6.2), e qualche sottoinsieme non vuoto  $E$  di  $N$  è pertanto privo di massimo, o di minimo. Essendo  $N$  limitato, anche  $E$  è limitato, pertanto  $\sup E$  ed  $\inf E$  esistono in  $\mathbb{R}$ ; come osservato in 10.2.3, se uno di essi non appartiene ad  $E$ , è di accumulazione per  $E$ , e quindi per  $N$ .

- .....
- ★ **Esercizio 10.8.2.** Mostrare che il sottoinsieme  $F$  di  $\mathbb{R}$  è chiuso in  $\mathbb{R}$  se e solo se per ogni sottoinsieme limitato e non vuoto  $E$  di  $F$  si ha  $\sup_{\mathbb{R}} E \in F$  ed  $\inf_{\mathbb{R}} E \in F$ .

**Risoluzione**

Se  $F$  è chiuso, ed  $E \subseteq F$  è limitato e non vuoto, allora o  $\sup E = \max E \in E \subseteq F$  e quindi  $\sup E \in F$ , oppure  $\sup E \notin E$ , nel qual caso, come visto all'inizio del numero precedente,  $\sup E$  è di accumulazione per  $E$ , e quindi per  $F$ , e allora sta in  $F$ , perché  $F$  è chiuso. Sia poi  $a \in \mathbb{R} \setminus F$ : mostriamo che nelle ipotesi poste esiste un intorno  $]a_1, a_2[$  di  $a$  ( $a_1 < a < a_2$ ) disgiunto da  $F$ , il che mostra che  $F$  è chiuso. Sia  $E_1 = F \cap [a - 1, a]$ ,  $E_2 = F \cap [a, a + 1]$ . Se  $E_1$  non è vuoto,  $a_1 = \sup E_1$  sta in  $F$  per l'ipotesi fatta, e pertanto  $a_1 < a$  (essendo  $a_1 \leq a$ , ma  $a_1 \neq a$  perché  $a \notin F$ ) altrimenti sia  $a_1 = a - 1$ . Similmente, sia  $a_2 = \inf E_2$  se  $E_2$  non è vuoto, altrimenti sia  $a_2 = a + 1$ . Si ha  $a_1 < a < a_2$ , ma  $]a_1, a_2[ \cap F = \emptyset$ .  $\square$

.....

- ★ **Definizione 10.8.3.** Un sottoinsieme  $D$  di  $\mathbb{R}$  si dice *discreto* se non contiene nessuno dei suoi punti di accumulazione.

In altre parole,  $D$  è discreto se e solo se è formato di punti isolati. Si noti che un insieme discreto può avere punti di accumulazione (per esempio  $D = \{1/(n + 1) : n \in \mathbb{N}\}$ ): basta che nessuno di essi appartenga all'insieme stesso.

.....

- ★ **Esercizio 10.8.4.** Sia  $D$  sottoinsieme di  $\mathbb{R}$ . Mostrare che sono equivalenti le condizioni che seguono:

- (i) ogni sottoinsieme di  $D$  è chiuso in  $\mathbb{R}$ ;
  - (ii) l'insieme dei punti di accumulazione di  $D$  è vuoto;
  - (iii)  $D$  è *localmente finito*, cioè per ogni punto  $p$  di  $\mathbb{R}$  c'è un intorno  $U$  di  $p$  che ha intersezione finita con  $D$ ;
  - (iv) ogni sottoinsieme limitato di  $D$  è finito;
  - (v)  $D$  è chiuso e discreto.
- .....

- ★ **Definizioni 10.8.5.** L'insieme dei punti di accumulazione di un sottoinsieme  $E$  di  $\mathbb{R}$  si chiama *derivato* di  $E$  e si indica con  $\text{Der}_{\mathbb{R}} E$ , o più semplicemente con  $\text{Der } E$ . Un insieme  $E$  si dice *denso in sé* se ogni suo punto è di accumulazione per esso, in altre parole  $E \subseteq \text{Der } E$ . Un insieme si dice *perfetto* se è chiuso e denso in sé.
- .....

- ★ **Esercizio 10.8.6.** Mostrare che per ogni sottoinsieme  $E$  di  $\mathbb{R}$  il derivato  $\text{Der } E$  è chiuso. Dedurre che  $\text{Der}(\text{Der } E) \subseteq \text{Der } E$ .

*Suggerimento:* se  $p \notin \text{Der } E$ , esiste un aperto  $U$  di  $\mathbb{R}$  che contiene  $p$  ed è tale che  $U \cap E$  è finito. Allora  $\mathbb{R} \setminus \text{Der } E$  è...

.....

- ★ **Esercizio 10.8.7.** Un insieme è perfetto se e solo se coincide col suo derivato.
- .....

- .....
- ★ **Esercizio 10.8.8.** La chiusura di un insieme denso in sé è un insieme perfetto.
- .....
- ★ **Esercizio 10.8.9.** È vero che  $\text{Der } E = \text{Der}(\text{cl } E)$ , per ogni sottoinsieme  $E$  di  $\mathbb{R}$ ?
- .....
- ★ **Esercizio 10.8.10.** Per ogni chiuso  $F$  di  $\mathbb{R}$  esiste un chiuso  $G$  di  $\mathbb{R}$  tale che  $F = \text{Der } G$ .  
*Suggerimento:* per ogni  $a \in F$  che sia isolato in  $F$  si considerino i punti  $a + 1/(n+1)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ; sia  $G$  l'insieme ottenuto aggiungendo tali punti ad  $F$ ...
- .....
- ★ **Esercizio 10.8.11.** Trovare un sottoinsieme limitato di  $\mathbb{R}$  tale che  $\text{Der}^3(E) = \text{Der}(\text{Der}(\text{Der } E))$  sia vuoto, ma  $\text{Der}^2(E) = \text{Der}(\text{Der } E) \neq \emptyset$ .
- .....
- ★ **Esercizio 10.8.12.** Dare una dimostrazione alternativa, basata sul fatto che gli insiemi finiti sono chiusi e che un punto  $p$  è di accumulazione per l'insieme  $E$  se e solo se in ogni intorno di  $p$  cadono infiniti punti di  $E$ .

#### Risoluzione

La condizione chiaramente implica che  $p$  è di accumulazione per  $E$  (fra gli infiniti punti di  $E$  appartenenti all'intorno, ce ne sono certamente di diversi da  $p$ !). Supponiamo che un punto  $p$  sia tale che in un suo intorno  $U$ , che possiamo supporre aperto, cada solo un insieme finito di punti di  $E$  distinti da  $p$ , siano essi  $a_1, \dots, a_N$ . Poiché ogni insieme finito è chiuso (vedi 6.5.3),  $V = U \setminus \{a_1, \dots, a_N\} = U \cap (\mathbb{R} \setminus \{a_1, \dots, a_N\})$  è aperto, e contenendo  $p$  è intorno di  $p$ ; e  $V \cap E$  contiene al più il punto  $p$ . Ne segue che  $p$  non è di accumulazione per  $E$ .  $\square$

.....

### ★ 10.9 INTERNO DI UN INSIEME

Diremo che un punto  $p$  è *interno* (in  $\mathbb{R}$ ) ad un sottoinsieme  $E$  di  $\mathbb{R}$  se  $E$  è intorno di  $p$ , cioè se esiste un aperto  $A$  di  $\mathbb{R}$  tale che  $p \in A \subseteq E$ ; equivalentemente  $p$  è interno a  $E$  se esiste  $\delta > 0$  tale che  $B(p, \delta) \subseteq E$ . Identica è la definizione di punto interno (in  $\mathbb{R}^2$ ) a un sottoinsieme  $E \subseteq \mathbb{R}^2$ . L'*interno* (in  $\mathbb{R}$ ) di un  $E \subseteq \mathbb{R}$  è l'insieme dei suoi punti interni:

$$\text{int}_{\mathbb{R}} E := \{p \in \mathbb{R} : E \text{ è intorno di } p \text{ in } \mathbb{R}\}; \quad \text{e analogamente in } \mathbb{R}^2.$$

La nozione di interno è duale di quella di chiusura: si verifica facilmente che l'interno di  $E$  è l'unione di tutti i sottoinsiemi aperti di  $\mathbb{R}$  contenuti in  $E$ , ed è quindi il massimo (nel senso dell'inclusione) aperto di  $\mathbb{R}$  contenuto in  $E$ . Tutto ciò vale anche per  $\mathbb{R}^2$ . Dato un intervallo  $I$  di  $\mathbb{R}$ , il suo interno è l'intervallo  $I$  privato degli estremi. L'interno di  $\mathbb{Q}$  e di  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  in  $\mathbb{R}$  è vuoto.

### ★ 10.10 FRONTIERA

Un'altra nozione per la quale avremo qui un uso marginale, ma che aiuta a chiarire le idee sulla topologia, è quella di *frontiera* di un insieme.

★ **Definizione 10.10.1.** Sia  $E \subseteq \mathbb{R}$ ; un punto  $p \in \mathbb{R}$  si dice *di frontiera* per  $E$  (in  $\mathbb{R}$ ) se  $p$  non è interno a  $E$ , e nemmeno al complementare di  $E$ . Identica la definizione di punto di frontiera in  $\mathbb{R}^2$ , per un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^2$ . L'insieme di tutti i punti di  $\mathbb{R}$  ( $\mathbb{R}^2$ ) che sono di frontiera per  $E$  in  $\mathbb{R}$  (in  $\mathbb{R}^2$ ) si chiama *frontiera* di  $E$  in  $\mathbb{R}$  (in  $\mathbb{R}^2$ ) e si indica con il simbolo

$$\text{fr}_{\mathbb{R}} E \quad \text{oppure} \quad \text{fr}_{\mathbb{R}^2} E.$$

Se  $p$  è di frontiera per  $E$ , e  $U$  è intorno di  $p$ ,  $U$  non può essere contenuto in  $E$  (perché altrimenti  $p$  sarebbe interno a  $E$ ) e quindi  $U \cap (\mathbb{R} \setminus E) \neq \emptyset$ ; similmente  $U$  non è contenuto in  $\mathbb{R} \setminus E$  e quindi  $U \cap E \neq \emptyset$ ;  $p$  è di frontiera per  $E$  se e solo se ogni intorno di  $p$  contiene sia punti di  $E$  che punti del complementare di  $E$ ; in altre parole,  $p$  è di frontiera per  $E$  se e solo se  $p$  appartiene alla chiusura di  $E$  e anche alla chiusura di  $\mathbb{R} \setminus E$ :

$$\text{fr}_{\mathbb{R}} E = \text{cl}_{\mathbb{R}} E \cap \text{cl}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R} \setminus E), \quad \text{e analogamente in } \mathbb{R}^2.$$

.....

★ **Esercizio 10.10.2.** Un insieme è aperto se e solo se non contiene alcun punto della sua frontiera; un insieme è chiuso se e solo se contiene tutti i suoi punti di frontiera.

.....

★ La frontiera di un intervallo in  $\mathbb{R}$  consiste esattamente di quegli estremi dell'intervallo che sono finiti; più generalmente si ha quanto segue.

.....

★ **☉☉ Esercizio 10.10.3.** Sia  $E$  sottoinsieme non vuoto di  $\mathbb{R}$ ; se  $E$  è superiormente limitato, allora  $\sup E$  è di frontiera per  $E$  in  $\mathbb{R}$ ; se  $E$  è inferiormente limitato,  $\inf E$  è di frontiera per  $E$  in  $\mathbb{R}$ .

.....

★ **☉☉ Esercizio 10.10.4.** Sia  $E \subseteq \mathbb{R}$ . Mostrare che se un intervallo  $I$  di  $\mathbb{R}$  contiene un punto di  $E$  e un punto di  $\mathbb{R} \setminus E$  allora  $I$  contiene un punto di frontiera di  $E$ . Dedurne che gli unici sottoinsiemi di  $\mathbb{R}$  simultaneamente chiusi e aperti sono  $\emptyset$  ed  $\mathbb{R}$ .

**Risoluzione**

Sia  $a \in I \cap E$ ,  $b \in I \cap (\mathbb{R} \setminus E)$ . Mostriamo che l'intervallo chiuso di estremi  $a$  e  $b$  (il quale è contenuto in  $I$ , per definizione di intervallo) contiene almeno un punto della frontiera di  $E$ ; per fissare le idee, supponiamo  $a < b$ . Sia  $F = E \cap [a, b]$ ;  $F$  non è vuoto e  $c = \sup F$  sta in  $[a, b]$ ; per l'esercizio precedente  $c$  è di frontiera per  $F$ ; ma si vede subito che è di frontiera anche per  $E$ . Il resto è facile.

.....

★ **Esercizio 10.10.5.** Mostrare che in  $\mathbb{C}$  la frontiera dei dischi di centro  $z$  e raggio  $r > 0$  è esattamente la circonferenza di centro  $z$  e raggio  $r$ :

$$\text{fr}_{\mathbb{C}} B(z, r) = \text{fr}_{\mathbb{C}} B(z, r) = S(z, r) = \{w \in \mathbb{C} : |w - z| = r\}.$$

.....

★ **Esercizio 10.10.6.** Si ha  $\text{fr}_{\mathbb{R}} \mathbb{Q} = \text{fr}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \mathbb{R}$ .

.....

Giuseppe De Marco

# Analisi Uno

## Teoria ed esercizi

Terza edizione

*Analisi Uno* prende avvio dalle conoscenze di matematica delle scuole superiori – che riprende nel capitolo iniziale «Analisi Zero» e integra con nozioni di base non sempre note a chi inizia l'università (funzioni iniettive, suriettive, monotone) – per portare in breve tempo studenti e studentesse a una conoscenza operativa della nozione di limite e del calcolo differenziale e integrale. L'enfasi è posta sull'applicazione e sul calcolo, più che sull'astrazione, così come gli esercizi e gli esempi (oltre 500 interamente svolti) puntano a rendere chi studia autonomo fin dall'inizio.

Alle nozioni topologiche sono dedicati tre capitoli: «La topologia della retta reale», «La topologia del piano» e «Altre nozioni di topologia»; questo

livello di approfondimento in un testo introduttivo è inusuale e controbilanciato da istruzioni grafiche molto pratiche per differenziare gli argomenti. Sono segnalati con icone differenti gli esercizi standard, gli argomenti importanti, gli argomenti di carattere astratto, gli esercizi più difficili e le parti secondarie, così come sono evidenziati da una stellina gli argomenti più avanzati, che comportano un passo in più nello studio e nella comprensione della materia.

*Analisi Uno* risulta quindi un manuale molto utile, un testo di base completo, in grado di spingere verso argomenti più impegnativi, se necessario, senza perdere mai di vista la struttura essenziale della disciplina.

---

**Giuseppe De Marco** è stato professore di Analisi Matematica presso il Dipartimento di Matematica "Tullio Levi-Civita" dell'Università degli Studi di Padova.

Con Decibel/Zanichelli ha pubblicato: *Analisi Due* (1993), *Analisi Zero* (1997), *Esercizi di Analisi Due* (1998) ed *Esercizi di calcolo in una variabile* (2001).

### Le risorse multimediali



[online.universita.zanichelli.it/demarco-analisi](https://online.universita.zanichelli.it/demarco-analisi)

A questo indirizzo sono disponibili le risorse multimediali di complemento al libro. Per accedere alle risorse protette è necessario registrarsi su [my.zanichelli.it](https://my.zanichelli.it) inserendo il codice di attivazione personale contenuto nel libro.

### Libro con ebook



Chi acquista il libro può scaricare gratuitamente l'**ebook**, seguendo le istruzioni presenti nel sito. L'ebook si legge con l'applicazione *Booktab Z*, che si scarica gratis da App Store (sistemi operativi Apple) o da Google Play (sistemi operativi Android).

DEMARCO\*ANALISI UNO 3ED LUM

ISBN 978-88-08-29978-9



9 788808 299789

3 4 5 6 7 8 9 0 1 (60B)