Giuseppe De Marco

Analisi Uno

Teoria ed esercizi

Terza edizione

MATEMATICA ZANICHELLI

Giuseppe De Marco

Analisi Uno

Teoria ed esercizi

Terza edizione

Se vuoi accedere alle risorse online riservate

1. Vai su **my.zanichelli.it**
2. Clicca su *Registrati*.
3. Scegli *Studente*.
4. Segui i passaggi richiesti per la registrazione.
5. Riceverai un'email: clicca sul link per completare la registrazione.
6. Cerca il tuo codice di attivazione stampato in verticale sul bollino argentato in questa pagina.
7. Inseriscilo nella tua area personale su **my.zanichelli.it**

Se sei già registrato, per accedere ai contenuti riservati ti serve solo il codice di attivazione.

MATEMATICA ZANICHELLI

Redazione: Chiara Lambertini

Impaginazione e disegni: CompoMat, Configni (RI)

Copertina:
– *Progetto grafico*: Falcinelli & Co., Roma
– *Immagine di copertina*: © MarcelC/iStockphoto

Prima edizione Zanichelli/Decibel: settembre 1995
Seconda edizione Zanichelli/Decibel: novembre 1996
Terza edizione Zanichelli: febbraio 2022

Ristampa: **prima tiratura**

5 4 3 2 1 2022 2023 2024 2025 2026

Realizzare un libro è un'operazione complessa, che richiede numerosi controlli: sul testo, sulle immagini e sulle relazioni che si stabiliscono tra essi. L'esperienza suggerisce che è praticamente impossibile pubblicare un libro privo di errori. Saremo quindi grati ai lettori che vorranno segnalarceli.
Per segnalazioni o suggerimenti relativi a questo libro scrivere al seguente indirizzo:

Zanichelli editore S.p.A.
Via Irnerio 34
40126 Bologna
fax 051293322
e-mail: linea_universitaria@zanichelli.it
sito web: www.zanichelli.it

Prima di effettuare una segnalazione è possibile verificare se questa sia già stata inviata in precedenza, identificando il libro interessato all'interno del nostro catalogo online per l'Università.

Per comunicazioni di tipo commerciale: universita@zanichelli.it

Stampa:

per conto di Zanichelli editore S.p.A.
Via Irnerio 34, 40126 Bologna

Indice generale

Prefazioni

PREFAZIONE ALLA PRIMA EDIZIONE

Questo libro si concentra sulle nozioni più importanti dell'analisi elementare, che sono limiti, derivate, integrali. Specie all'inizio degli studi universitari è auspicabile che lo sforzo del principiante si rivolga all'apprendimento di tali concetti. Una buona organizzazione di queste nozioni è indispensabile: per la maggior parte degli utenti, siano essi matematici, fisici, ingegneri, statistici o altro, il calcolo differenziale ed integrale è uno strumento di lavoro da usare nel resto della carriera. È quindi opportuno che esso venga appreso senza troppi fronzoli e generalizzazioni inutili, ma anche con linguaggio corretto; è sbagliato credere che semplificare l'esposizione voglia dire raccontare le cose in modo incompleto o addirittura errato.

La topologia, pur essendo trattata col linguaggio generale, è qui soltanto topologia della retta e del piano; il modo astratto (e più sofisticato, ma più semplice, una volta che chi studia ha conquistato le difficoltà di terminologia, e si è formato un repertorio di esempi) di vedere i limiti ed in generale la topologia è meglio lasciato al secondo anno di corso. A mio avviso, anche la teoria dei numeri reali è meglio svolta solo per via assiomatica: le costruzioni classiche dei reali a partire dai razionali sono in questo libro fatte solo in appendice (appendice B). La teoria dei numeri reali è (secondo me) tipico argomento di matematica elementare da svolgere da un punto di vista superiore; la nozione che c'è sotto, di completamento, sia esso per l'ordine o alla Cauchy, è raffinata e difficile; ritengo che ci si debba limitare a mostrare come tante delle cose che si fanno nei reali sarebbero impossibili nei razionali.

L'opportunità di disporre fin dall'inizio delle nozioni riguardanti le funzioni elementari fa sì che alcuni sviluppi in serie, quelli dell'esponenziale e delle funzioni circolari, siano fatti abbastanza presto; la naturalità delle nozioni non è forse in questo modo sempre rispettata, ma si guadagna in concisione: i limiti più importanti si presentano poi spontanei.

Ho preferito seguire la via classica, facendo prima le derivate, e dopo gli integrali, cercando tuttavia di far in modo che i due argomenti vengano trattati in rapida successione, come è giusto; il libro è strutturato in modo che, volendo, un docente può far prima gli integrali, almeno la definizione, e poi le derivate; il consiglio è di fare gli integrali dopo la definizione di derivata, ma prima dei teoremi classici del calcolo differenziale (Rolle, Lagrange, ecc.). Gli integrali generalizzati sono qui ampiamente trattati per la loro grande importanza applicativa. Le equazioni differenziali, i più semplici tipi tra esse, e cioè le equazioni lineari del primo ordine e lineari del secondo ordine a coefficienti costanti sono qui risolte in modo completo e rigoroso, pur senza utilizzare teoremi generali di esistenza ed unicità; lo scopo è quello di fornire applicazioni significative ed utili delle tecniche di derivazione ed integrazione prima studiate; ci sono anche cenni, sia pure minimi, alle equazioni a variabili separabili.

Le nozioni preliminari comprendono: il principio di induzione, caposaldo del ragionamento matematico, con esempi ed applicazioni anche algebriche e combinatorie; la nozione di cardinale di un insieme, con enfasi ovviamente sulle cardinalità usate da tutti, e cioè finito, numerabile e continuo; alcune nozioni di algebra, per chiarire cosa sia un'operazione binaria, e le proprietà formali di un'operazione; il principio di identità dei polinomi. La nozione di gruppo, anello, corpo, omomorfismo, isomorfismo, con numerosi esempi, viene pure fornita; a questo livello gli esempi sono naturalmente quasi più importanti della nozione stessa; si parla anche di relazioni di equivalenza e di relazioni di ordine. Si consiglia al docente di sviluppare tali nozioni via via che se ne presenta la necessità; il loro uso esplicito nel libro è marginale; per studenti di matematica, che hanno in simultanea un corso di algebra, l'intero capitolo può ovviamente essere omesso. La nozione di successione di Cauchy e di completezza metrica viene data, e se ne sottolinea l'importanza teorica, ma essa non è utilizzata per alcun teorema; similmente, si definiscono le funzioni uniformemente continue, e si dimostrano i soliti teoremi su tali funzioni, più in omaggio alla tradizione che per reale necessità.

In appendice sono state aggiunte varie nozioni di teoria degli insiemi, per il lettore curioso; c'è anche la costruzione del corpo reale $\mathbb{R}$, sia con le sezioni di Dedekind che con le successioni di Cauchy. È bene avvertire subito che l'appendice è tenuta ad un livello più elevato del resto del libro, e più che ai principianti si rivolge a quelli che riprendono in mano il libro di testo dopo due o tre anni di Università (o anche dopo la laurea): lo scopo principale è far capire che le questioni riguardanti i fondamenti sono molto interessanti, e possono essere discusse e dimostrate, ma che la cosa richiede fatica.

L'opera è estremamente ricca di esempi ed esercizi, molti dei quali sono risolti; esempi ed esercizi, in numero di 538, sono una discreta frazione del libro (più di 150 pagine); ci sono anche una ventina di pagine di esercizi sulla convergenza uniforme, argomento non svolto in questo libro.

Alcuni esercizi, ma talvolta anche intere sezioni, o alcuni teoremi, sono segnati con gli "occhietti". Questi simboli significano:

- esercizi standard, utili per il controllo di comprensione della teoria; si consiglia di farli tutti;
- materiale importante, da leggere e capire a fondo: non tutto il materiale importante è così segnato, altre volte il contesto dovrebbe far capire l'importanza dell'argomento;
- materiale più astratto, a carattere teorico, o generale; complementi;
- si consiglia di ometterlo in prima lettura; non essenziale per la comprensione del resto;
- esercizio difficile.

Un ringraziamento particolare a Carlo Mariconda, che ha fornito molti esercizi, oltre a numerosi consigli e suggerimenti.

PREFAZIONE ALLA SECONDA EDIZIONE

In questa seconda edizione le modifiche importanti sono due: è stata incorporata l'Analisi Zero come preliminare al libro, ed è stato tolto un capitolo di esercizi alla fine, che è divenuto invece parte di un testo autonomo. L'Analisi Zero contiene la nomenclatura essenziale sulle funzioni e sui numeri reali; era prima prerequisito indispensabile al volume, e l'opera è in tal modo autosufficiente; l'Analisi Zero ha comunque subito alcune revisioni, qualche taglio, e qualche aggiunta. Il capitolo di esercizi tolto appesantiva considerevolmente un volume che ne è già ricco; questi esercizi hanno migliore collocazione in un volume apposito. Altre piccole modifiche sono state apportate; alcune dimostrazioni sono state cambiate, ed alcuni argomenti hanno cambiato posto; vari errori di stampa sono stati corretti.

Le parti in carattere piccolo sono principalmente esempi ed esercizi che si consiglia di affrontare subito; quelle contrassegnate con una stellina sono considerazioni o dimostrazioni che possono essere omesse in prima lettura.

Devo ancora ringraziare Carlo Mariconda, che ha dato molti importanti suggerimenti.

PREFAZIONE ALLA TERZA EDIZIONE

In questa terza edizione la modifica più rilevante riguarda il Capitolo 15, *Integrale secondo Riemann*, che è stato interamente riscritto. Sono state anche aggiunte alcune versioni più generali del teorema del valor medio, e sono stati corretti alcuni errori.

0 Analisi zero

0.1 IL LINGUAGGIO DEGLI INSIEMI

In questa sezione fissiamo alcune definizioni e alcuni simboli che useremo spesso. Essi saranno un po' il nostro linguaggio, che integra quello comune, e lo sostituisce nelle situazioni in cui questo presenta ambiguità. Come quando si apprende una nuova lingua, le definizioni qui date vanno prese alla lettera: esse non sono nulla di più di quanto affermano di essere, e non celano niente di particolarmente profondo.

0.1.1 Insiemi

Un *insieme* è una collezione di oggetti. Gli oggetti di questa collezione si chiamano *elementi dell'insieme*: se A è un insieme e a un suo elemento, per indicare questo fatto si scrive $a \in A$ (o anche $A \ni a$) e si dice che *a appartiene ad A*. Se l'insieme A è costituito dagli oggetti $a, b, c, d, \dots$, si scrive $A = \{ a, b, c, d, \dots \}$. Per indicare che l'oggetto a *non* è elemento dell'insieme A si scrive $a \notin A$ (o $A \not\ni a$) e si dice che *a non appartiene* ad A. Si ammette l'esistenza di un insieme *privo di elementi*. Esso si chiama *insieme vuoto* e si indica con il simbolo $\emptyset$. Quindi per ogni oggetto x si ha $x \notin \emptyset$. Un insieme è definito dai suoi elementi: due insiemi A, B sono uguali quando sono formati dalla medesima collezione di oggetti; cioè si ha $A = B$ se e solo se ogni elemento di A è anche elemento di B e inoltre ogni elemento di B è anche elemento di A.

0.1.2 Sottoinsiemi

Se A, B sono insiemi ed *ogni* elemento di A è anche elemento di B, si dice che A è sottoinsieme di B; si scrive $A \subseteq B$ (oppure $B \supseteq A$), che si legge *A contenuto in B* (oppure *B contiene A*). Per esempio, se Π è il piano della geometria elementare, pensato come insieme dei suoi punti, tutte le rette di Π (pensate pure come insieme dei loro punti) sono sottoinsiemi di Π. Sono sottoinsiemi di Π anche quelli formati dai singoli punti: se P è un punto di Π (cioè se $P \in \Pi$), allora $\{ P \} \subseteq \Pi$. Attenzione a non confondere fra loro elementi e sottoinsiemi di un dato insieme, cosa che il linguaggio comune tende spesso a fare. Nel contesto *suddetto*, sarebbe errato dire che una retta che giace in Π appartiene a Π (è corretto dire che è contenuta in Π); naturalmente questi abusi di linguaggio sono permessi, salvo nei casi in cui è importante essere precisi. Sarebbe sbagliato scrivere sia $P \subseteq \Pi$, sia $\{ P \} \in \Pi$: un sottoinsieme di un insieme in generale non è elemento dell'insieme, e un elemento di un insieme in generale non è sottoinsieme dell'insieme stesso. Osserviamo subito anche che per varie ragioni conviene considerare un oggetto e l'insieme che ha quell'oggetto come unico elemento come cose diverse fra loro: $x \neq \{ x \}$.

Dato un insieme A, è sottoinsieme di A anche A stesso; esso è detto sottoinsieme *improprio* di A. Se B è sottoinsieme di A diverso da A, si scrive $B \subset A$ (oppure $A \supset B$) e si dice che B è contenuto propriamente in A (per rafforzare si scrive talvolta $B \subsetneqq A$ e cioè B contenuto in A e diverso da A). Si noti che $\emptyset \subseteq A$ per ogni insieme A: l'insieme vuoto è sottoinsieme di ogni insieme. È evidente che si ha $A = B$ se e solo se $A \subseteq B$ e anche $B \subseteq A$.

0.1.3 Insieme delle parti

La parola *insieme* indica, come detto, una collezione di oggetti, considerata come nuovo oggetto singolo. Gli insiemi possono quindi essere a loro volta elementi di altri insiemi: per esempio, dato un piano Π, sempre pensato come insieme dei suoi punti, possiamo formare l'insieme di tutte le rette di Π, che ha queste rette come suoi elementi. Dato l'insieme $A = \{ 1, 2 \}$, l'insieme di tutti i suoi sottoinsiemi è $B = \{ \emptyset, \{ 1 \}, \{ 2 \}, \{ 1, 2 \} \}$.

Dato un qualsiasi insieme X, si ammette l'esistenza di un insieme $\mathcal{P}(X)$ detto *insieme delle parti* di X, i cui elementi sono precisamente i sottoinsiemi di X ($\emptyset$ ed X inclusi). L'insieme B descritto sopra è $\mathcal{P}(\{ 1, 2 \})$. Si noti che è $\mathcal{P}(\emptyset) = \{ \emptyset \}$; ora $\{ \emptyset \} \neq \emptyset$: infatti è $\emptyset \in \{ \emptyset \}$, mentre è $x \notin \emptyset$ per ogni oggetto x (a chi ama figurarsi queste cose intuitivamente, suggeriamo di pensare agli insiemi come *scatole* contenenti i loro elementi; l'insieme vuoto è una scatola vuota; $\{ \emptyset \}$ è una scatola contenente una scatola vuota come unico oggetto, quindi $\{ \emptyset \}$ non è una scatola vuota ...).

0.1.4 Intersezione, unione e differenza

Se A, B sono insiemi, l'*intersezione* di A e B, indicata con $A \cap B$, è l'insieme degli elementi che appartengono sia ad A che a B. È chiaro che è $A \cap B = B \cap A$. Se $A \cap B = \emptyset$, A e B si dicono *disgiunti*. Per esempio, sia Π il piano, e siano A, B due rette contenute in Π. Dalla geometria elementare sappiamo che sono possibili tre casi per $A \cap B$:

(*1*) $A \cap B = \{ P \}$ dove $P \in \Pi$ (P è il punto di intersezione delle due rette) quando A e B non sono parallele;

(*2*) $A \cap B = \emptyset$ quando A e B sono parallele e distinte;

(*3*) $A \cap B = A = B$ quando A e B coincidono.

Se A, B sono insiemi, la loro *unione* $A \cup B$ è l'insieme che ha per elementi gli elementi di A e gli elementi di B: cioè $x \in A \cup B$ se e solo se x appartiene ad A, oppure x appartiene a B, le due cose potendo essere vere entrambe. Per esempio $\{ 1, 2, 3 \} \cup \{ 1, 5 \} = \{ 1, 2, 3, 5 \}$. Una retta è sempre unione delle due semirette nelle quali è divisa da un suo punto. Chiaramente è $A \cup B = B \cup A$.

Infine, dati due insiemi A, B, la loro *differenza* $A \setminus B$ è l'insieme che ha per elementi quegli elementi di A che non appartengono a B: cioè, $x \in A \setminus B$ se e solo se $x \in A$ e simultaneamente $x \notin B$. In generale è $B \setminus A \neq A \setminus B$. Per ogni insieme A è $A \setminus A = \emptyset$. In generale $A \setminus B = \emptyset$ equivale ad $A \subseteq B$.

10 Altre nozioni di topologia

10.1 CHIUSURA

Se E è sottoinsieme di $\mathbb{R}$, esiste un minimo chiuso di $\mathbb{R}$ che lo contiene, minimo nel senso dell'inclusione: si prendono tutti i sottoinsiemi chiusi di $\mathbb{R}$ contenenti E, fra i quali c'è almeno $\mathbb{R}$ stesso, e se ne fa l'intersezione, $\overline{E}$. Poiché una arbitraria intersezione di chiusi è un chiuso, tale insieme $\overline{E}$ è chiuso, contiene E, e ovviamente, se un chiuso di $\mathbb{R}$ contiene E, esso contiene anche $\overline{E}$. L'insieme $\overline{E}$ si indica anche con $\mathrm{cl}_{\mathbb{R}}(E)$ (*chiusura* di E in $\mathbb{R}$). Si ha insomma, per definizione

$$\mathrm{cl}_{\mathbb{R}}(E) := \overline{E} = \bigcap \{C : C \supseteq E,\ C \text{ chiuso in } \mathbb{R}\}.$$

Proposizione 10.1.1. *Sia $E \subseteq \mathbb{R}$. Un punto $x \in \mathbb{R}$ appartiene alla chiusura di E in $\mathbb{R}$ se e solo se, per ogni intorno U di x in $\mathbb{R}$, si ha $U \cap E \neq \emptyset$.*

Dimostrazione. Mostriamo che $x \notin \overline{E}$ se e solo se esiste un intorno di $x \in \mathbb{R}$ disgiunto da E. Se U è intorno di x, per definizione di intorno esiste un aperto A di $\mathbb{R}$ tale che sia $x \in A \subseteq U$; se $U \cap E = \emptyset$, si ha anche $E \cap A = \emptyset$; ma allora $C = \mathbb{R} \setminus A \supseteq E$ è un chiuso di $\mathbb{R}$ contenente E e non contenente x, per cui $x \notin \overline{E}$. Se poi $x \notin \overline{E}$, esiste un chiuso C contenente E tale che $x \notin C$; ma allora $A = \mathbb{R} \setminus C$ è un intorno di x (è aperto, e contiene x) disgiunto da E. $\square$

Quanto detto per la chiusura in $\mathbb{R}$ si ripete per la chiusura in $\widetilde{\mathbb{R}}$ di un sottoinsieme di $\widetilde{\mathbb{R}}$: se $E \subseteq \widetilde{\mathbb{R}}$, si pone

$$\mathrm{cl}_{\widetilde{\mathbb{R}}}(E) = \bigcap \{C : C \supseteq E,\ C \text{ chiuso in } \widetilde{\mathbb{R}}\}.$$

La proposizione precedente resta vera, con $\widetilde{\mathbb{R}}$ al posto di $\mathbb{R}$, intorni in $\widetilde{\mathbb{R}}$ anziché intorni in $\mathbb{R}$, ecc.

Esempio 10.1.2.

$\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ sono chiusi in $\mathbb{R}$, pertanto $\mathrm{cl}_{\mathbb{R}}(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$ e $\mathrm{cl}_{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$; invece è $\mathrm{cl}_{\widetilde{\mathbb{R}}}(\mathbb{N}) = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, $\mathrm{cl}_{\widetilde{\mathbb{R}}}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

◑◑ **Esercizio 10.1.3.** Sia $E \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto; se E è superiormente limitato, allora $\sup E \in \mathrm{cl}\, E$, ed analogamente $\inf E \in \mathrm{cl}\, E$ se E è inferiormente limitato.

Risoluzione

Se $b = \sup E$, per ogni $r > 0$ $B\,(b, r[\cap E$ è non vuoto: infatti, essendo $b - r < b$, esiste $x \in E$ tale che sia $b - r < x$; e, poiché $x \leq b$, si ha $b - r < x < b + r$; ciò prova che $b \in \mathrm{cl}\, E$; analogamente per $\inf E$.

Esercizio 10.1.4. Mostrare che la chiusura in $\mathbb{R}$ di un intervallo non vuoto I si ottiene aggiungendo ad I i suoi estremi superiore ed inferiore, se questi sono in $\mathbb{R}$; e la chiusura in $\widetilde{\mathbb{R}}$ si ottiene aggiungendo $\sup_{\widetilde{\mathbb{R}}} I$ ed $\inf_{\widetilde{\mathbb{R}}} I$.

Esercizio 10.1.5. Sia $E \subseteq \mathbb{R}$, non vuoto; mostrare che $+\infty$ (risp. $-\infty$) appartiene alla chiusura in $\widetilde{\mathbb{R}}$ di E se e solo se E non è superiormente (risp. inferiormente) limitato. Mostrare che un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ è chiuso in $\widetilde{\mathbb{R}}$ se e solo se è chiuso in $\mathbb{R}$, ed è limitato. Mostrare che la chiusura in $\widetilde{\mathbb{R}}$ di un sottoinsieme E di $\mathbb{R}$ coincide con la chiusura in $\mathbb{R}$, con aggiunto $+\infty$ se E non è superiormente limitato, e $-\infty$ se E non è inferiormente limitato.

10.2 PUNTI DI ACCUMULAZIONE E PUNTI ISOLATI

Strettamente legata alla nozione di chiusura è la nozione di punto di accumulazione.

Definizione 10.2.1. Sia $E \subseteq \mathbb{R}$. Un punto $p \in \mathbb{R}$ si dice di *accumulazione* per E in $\mathbb{R}$ se in ogni intorno di p in $\mathbb{R}$ cadono punti di E distinti da p.

Detto in altro modo, p è di accumulazione per E se $(U \smallsetminus \{p\}) \cap E \neq \emptyset$ per ogni intorno U di p in $\mathbb{R}$. Si ha quindi: p è di accumulazione per E se e solo se appartiene alla chiusura di $E \smallsetminus \{p\}$. I punti di accumulazione di un insieme possono appartenere, o non appartenere, all'insieme stesso: ad esempio, l'insieme dei punti di accumulazione di $E = [0,1[$ è $\overline{E} = [0,1]$, ed 1 non sta in E. Se un punto di E non è di accumulazione per E, esso si dice *punto isolato* di E. Dalla proposizione 10.1.1 risulta che la chiusura di E in $\mathbb{R}$ è formata dai punti di E, e dai punti di accumulazione di E in $\mathbb{R}$. Pertanto vale quanto segue.

Proposizione 10.2.2. *Un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ è chiuso in $\mathbb{R}$ se e solo se contiene tutti i suoi punti di accumulazione in $\mathbb{R}$.*

Dimostrazione. Fatta sopra. Si noti piuttosto che un insieme privo di punti di accumulazione è in particolare chiuso. $\square$

La definizione di punto di accumulazione in $\widetilde{\mathbb{R}}$ si dà allo stesso modo, cioè $p \in \widetilde{\mathbb{R}}$ si dice di accumulazione per il sottoinsieme E di $\widetilde{\mathbb{R}}$ se ogni intorno di p in $\widetilde{\mathbb{R}}$ contiene punti di E diversi da p. È facile vedere che $p \in \mathbb{R}$ è di accumulazione per E in $\widetilde{\mathbb{R}}$ se e solo se p è di accumulazione in $\mathbb{R}$ per $E \cap \mathbb{R}$; inoltre $+\infty$ (risp. $-\infty$) è di accumulazione per E in $\widetilde{\mathbb{R}}$ se e solo se $E \cap \mathbb{R}$ è superiormente (risp. inferiormente) non limitato, e non è vuoto. E si noti anche che dalla definizione segue subito che se a è di accumulazione per un sottoinsieme S di E, allora a è di accumulazione per E.

Esercizio 10.2.3. Sia $E \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto; se E è superiormente limitato e non ha massimo, allora $\sup E$ è di accumulazione per E; e se E è inferiormente limitato e non ha minimo, allora $\inf E$ è di accumulazione per E (*vedi* anche 10.1.3).

10.3 SUCCESSIONI E PUNTI DI ACCUMULAZIONE

Un'utile caratterizzazione dei punti di accumulazione è la seguente.

Teorema 10.3.1. *Sia E sottoinsieme di $\mathbb{R}$, e $c \in \mathbb{R}$. Sono equivalenti:*

(a) *c è di accumulazione per E;*

(b) *esiste una successione $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ di punti di E diversi da c che converge a c;*

(c) *in ogni intorno di c cadono infiniti punti di E.*

Dimostrazione. Mostriamo che, se c è di accumulazione per E, esiste una successione iniettiva $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ (talvolta si dice: una successione di punti tutti distinti) in $E \smallsetminus \{c\}$ che converge a c; ciò mostra che (a) implica (b) e (c); è chiaro che (c) e (b) a loro volta implicano (a). La successione si definisce induttivamente come segue: posto $r_0 = 1$, si sceglie $x_0 \in B\,(c, 1[\cap (E \smallsetminus \{c\})$, certo esistente per l'ipotesi (a); si scelga poi $x_1 \in B\,(c, |x_0 - c|/2[\cap (E \smallsetminus \{c\})$, cioè tale che $0 < |x_1 - c| \le |x_0 - c|/2 < 1/2$; si sceglie $x_2 \in B\,(c, |x_1 - c|/2[\cap (E \smallsetminus \{c\})$ e così via; cioè, supponendo di aver definito $x_0, \dots, x_n$ nel modo sopra detto, si sceglie $x_{n+1} \in B\,(c, |x_n - c|/2[\cap (E \smallsetminus \{c\})$; certamente la successione $j \mapsto x_j$ è iniettiva, essendo strettamente decrescente la successione $j \mapsto |x_j - c|$ delle distanze da c dei suoi punti; inoltre $0 < |x_n - c| \le |x_0 - c|/2^n < 1/2^n$ mostra che la successione converge a c. $\square$

Esercizio 10.3.2. Mostrare che c è di accumulazione per E in $\mathbb{R}$ se e solo se esiste una successione in E che non sia definitivamente costante e che converga a c.

Esercizio 10.3.3. Mostrare che un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ ha una successione divergente a $+\infty$ (risp.: $-\infty$) se e solo se non è superiormente (risp.: inferiormente) limitato. Dedurne che $c \in \widetilde{\mathbb{R}}$ è di accumulazione per il sottoinsieme D di $\widetilde{\mathbb{R}}$ se e solo se esiste una successione di $D \smallsetminus \{c\}$ che tende a c in $\widetilde{\mathbb{R}}$.

Esercizio 10.3.4. Osservare che una successione di $E \subseteq \mathbb{R}$ converge a un punto isolato di E se e solo se è definitivamente costante.

⦿⦿ **Esercizio 10.3.5.** Trovare tutti i punti di accumulazione dell'insieme

$$E = \left\{ \frac{1}{m} + \frac{1}{n} : m, n \ge 1,\ m, n \in \mathbb{N} \right\}$$

e descriverne la chiusura.

Esercizio 10.3.6. Mostrare che l'insieme dei punti di accumulazione di $\mathbb{Q} \cap [a, b]$ è $[a, b]$, se a, b, con $a < b$, sono reali. E l'insieme dei punti di accumulazione di $\mathbb{P} \cap [a, b]$, dove $\mathbb{P} = \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}$ è l'insieme degli irrazionali? (*vedi* 6.2.4.)

10.4 SUCCESSIONI E CHIUSURA

Si ha subito, dai precedenti risultati, quanto segue.

Proposizione 10.4.1. *Un numero reale c sta nella chiusura di un sottoinsieme E di $\mathbb{R}$ se e solo se esiste una successione di punti di E che converge a c in $\mathbb{R}$.*

Dimostrazione. Supponiamo che sia $c \in \overline{E}$; se c è di accumulazione per E, esiste una successione di $E \setminus \{c\}$ (e quindi di E) che converge a c in $\mathbb{R}$. Altrimenti, deve essere $c \in E$, cioè c isolato per E; in tal caso si prende la successione costantemente c. Se poi $(c_j)_{j\in\mathbb{N}}$ è successione di E che converge a $c \in \mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, allora $c \in \mathrm{cl}_{\mathbb{R}} E$; se infatti V è intorno di c in $\mathbb{R}$, la successione si trova definitivamente in V, cioè $c_j \in V$ per $j \geq j_V$; in particolare $V \cap E$ non è vuoto, contenendo c_j per $j \geq j_V$. $\square$

Si noti anche

Corollario 10.4.2. *Un sottoinsieme E di $\mathbb{R}$ è chiuso in $\mathbb{R}$ se e solo se per ogni successione $(c_j)_{j\in\mathbb{N}}$ di E che abbia limite c in $\mathbb{R}$ si ha $c \in E$.*

Detto in altre parole, un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ è chiuso in $\mathbb{R}$ se e solo se contiene i limiti di quelle sue successioni che hanno limite in $\mathbb{R}$.

Dimostrazione. È contenuta in 10.4.1, quando si ricordi che un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ è chiuso in $\mathbb{R}$ se e solo se coincide con la sua chiusura in $\mathbb{R}$. $\square$

Esercizio 10.4.3. Provare che l'insieme $F = \{x \in \mathbb{R} : e^x - \log(1 + x^2) + x^5 = 0\}$ è chiuso in $\mathbb{R}$ (usare la continuità dell'esponenziale, 7.17.1, e del logaritmo, 7.17.3, e i teoremi sui limiti di somma e prodotto).

10.5 COMPATTI PER SUCCESSIONI

Definizione 10.5.1. Un sottoinsieme C di $\mathbb{R}$ si dice *sequenzialmente compatto*, o *compatto per successioni*, se ogni successione di C ha una sottosuccessione che converge *a un elemento di C*.

È della massima importanza il seguente teorema.

Teorema 10.5.2. *Un sottoinsieme dei reali è sequenzialmente compatto se e solo se è chiuso e limitato.*

Dimostrazione. Sufficienza: sia C chiuso e limitato; dobbiamo provare che se $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ è successione in C, essa ammette una sottosuccessione convergente a un elemento di C. Essendo C limitato, la successione $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ è limitata; per 7.14.4 essa ha una sottosuccessione convergente, il cui limite appartiene a C, che contiene tutti i limiti delle sue successioni convergenti, essendo chiuso (10.4.2).

Necessità: viceversa, proviamo che se C non è chiuso, o non è limitato, allora non è sequenzialmente compatto. Se C non è chiuso, c'è una successione $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ che converge a un $c \in \overline{E} \setminus E$; tutte le sottosuccessioni di questa convergono a c, e quindi nessuna sottosuccessione converge a un limite in C, negando quindi la compattezza sequenziale di C. Se poi C non è limitato, esso non è superiormente limitato, oppure non è inferiormente limitato; nel primo caso esso ha una successione divergente a $+\infty$, nel secondo una successione divergente a $-\infty$, in ambo i casi una successione le cui sottosuccessioni sono tutte divergenti. $\square$

10.6 COMPATTEZZA

Oltre che sequenzialmente compatti, i chiusi e limitati di $\mathbb{R}$ sono anche *compatti*, termine che ora sarà spiegato. Chiamiamo *ricoprimento* di un sottoinsieme E di $\mathbb{R}$ ogni famiglia $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ la cui unione contenga E, $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \supseteq E$; il ricoprimento è detto aperto se tutti gli A_λ sono aperti. Un sottoricoprimento di un ricoprimento $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ di E è una sottofamiglia che sia ancora un ricoprimento di E.

Esempio 10.6.1.
Sia, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $A_n =]-\infty, n[$; $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è un ricoprimento aperto di $\mathbb{R}$ (e quindi anche di ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}$). Ogni sottofamiglia infinita è ancora ricoprimento; le sottofamiglie finite non sono invece sottoricoprimento, né per $\mathbb{R}$, né per alcun sottoinsieme superiormente illimitato di $\mathbb{R}$.

Esempio 10.6.2.
Sia $c \in \mathbb{R}$ fissato; per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $A_n = \{x \in \mathbb{R} : |x-c| > 1/(n+1)\} = \mathbb{R} \smallsetminus [c-1/(n+1), c+1/(n+1)]$ insieme dei punti che distano più di $1/(n+1)$ da c; A_n è aperto essendo complementare del chiuso $[c-1/(n+1), c+1/(n+1)]$; $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ copre $\mathbb{R}\smallsetminus\{c\}$ e quindi ogni suo sottoinsieme; ogni sottofamiglia infinita è ricoprimento, ma le sottofamiglie finite non coprono alcun sottoinsieme di $\mathbb{R}$ che abbia c come punto di accumulazione, come è immediato vedere.

Definizione 10.6.3. Un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ si dice *compatto* se ogni suo ricoprimento aperto ammette un sottoricoprimento finito.

L'esempio 10.6.1 sopra mostra che nessun sottoinsieme illimitato di $\mathbb{R}$ può essere compatto, e l'esempio 10.6.2 mostra che un sottoinsieme non chiuso certamente non è compatto. Tuttavia, vale il seguente teorema.

10.6.4. TEOREMA DI HEINE-PINCHERLE-BOREL. *Ogni sottoinsieme chiuso e limitato di $\mathbb{R}$ è compatto.*

Dimostrazione. Sia C sottoinsieme chiuso e limitato di $\mathbb{R}$, e sia $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ una ricoprimento aperto di C. Mostriamo che esso ha un sottoricoprimento finito. Se così non fosse, per ogni sottoinsieme finito F di Λ l'insieme

$$C(F) = C \smallsetminus \bigcup_{\lambda\in F} A_\lambda$$

sarebbe non vuoto; essendo chiuso e limitato avrebbe allora un minimo $a(F)$; si noti che, se $F \subseteq G$, allora $C(F) \supseteq C(G)$ (l'unione cresce, il complementare cala) e quindi $a(F) = \min C(F) \leq \min C(G) = a(G)$. L'insieme $S = \{a(F) : F \subseteq \Lambda,\ F \text{ finito}\}$ è sottoinsieme di C, e quindi è limitato, e ha allora un estremo superiore s, che appartiene a C perché C è chiuso. Esiste $\mu \in \Lambda$ tale che $s \in A_\mu$, perché gli A_λ coprono C; essendo A_μ aperto, esiste $\delta > 0$ tale che $]s-\delta, s+\delta[\subseteq A_\mu$. Per le proprietà dell'estremo superiore, esiste un sottoinsieme finito F di Λ tale che sia $s - \delta < a(F)$. Posto $G = F \cup \{\mu\}$, G è pure sottoinsieme finito di Λ, e poiché contiene F deve essere $a(F) \leq a(G)$; inoltre è $a(G) \leq s$ (perché $s = \sup S$ ed $a(G) \in S$). Deve allora essere $s - \delta < a(F) \leq a(G) \leq s < s + \delta$, e quindi $a(G) \in]s-\delta, s+\delta[$; e questo è assurdo, perché $]s-\delta, s+\delta[\subseteq A_\mu$, ed $a(G) \notin A_\mu$. □

Esercizio 10.6.5. Sia $(C_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ famiglia di sottoinsiemi chiusi e limitati di $\mathbb{R}$. Mostrare che, se $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} C_\lambda = \emptyset$, allora esiste un sottoinsieme finito F di Λ tale che $\bigcap_{\lambda\in F} C_\lambda = \emptyset$. In particolare si ha il seguente teorema.

10.6.6. Teorema di Cantor. *Se $C_0 \supseteq C_1 \supseteq \cdots \supseteq C_n \supseteq C_{n+1} \supseteq \cdots$ è una successione decrescente di sottoinsiemi chiusi, limitati e non vuoti di $\mathbb{R}$, allora l'intersezione $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$ non è vuota.*

10.7 CHIUSURA E PUNTI DI ACCUMULAZIONE IN $\mathbb{R}^2$

Le definizioni di tali nozioni sono identiche a quelle date per la topologia della retta. Si dimostra, come per $\mathbb{R}$, quanto segue.

Proposizione 10.7.1. *Sia $E \subseteq \mathbb{R}^2$, e sia $p = (a,b) \in \mathbb{R}^2$. Allora:*

(a) *p appartiene alla chiusura di E in $\mathbb{R}^2$ se e solo se esiste una successione $(x_j, y_j)_{j\in\mathbb{N}}$ di punti di E che converge ad $(a,b) = p$;*

(b) *p è di accumulazione per E se e solo se esiste una successione $(x_j, y_j)_{j\in\mathbb{N}}$ di punti di $E \setminus \{a\}$ che converge ad $(a,b) = p$.*

Dimostrazione. Imitare quelle fatte in 10.3 e 10.4 per il caso reale. □

10.8 COMPLEMENTI ED ESERCIZI

Esercizio 10.8.1. (Teorema di Bolzano) Ogni sottoinsieme limitato e infinito di $\mathbb{R}$ ha almeno un punto di accumulazione in $\mathbb{R}$.

Risoluzione

Sia N limitato ed infinito. Poiché N è infinito, esso non può essere bene ordinato in ambo i sensi (*vedi* 3.6.2), e qualche sottoinsieme non vuoto E di N è pertanto privo di massimo, o di minimo. Essendo N limitato, anche E è limitato, pertanto $\sup E$ ed $\inf E$ esistono in $\mathbb{R}$; come osservato in 10.2.3, se uno di essi non appartiene ad E, è di accumulazione per E, e quindi per N.

Esercizio 10.8.2. Mostrare che il sottoinsieme F di $\mathbb{R}$ è chiuso in $\mathbb{R}$ se e solo se per ogni sottoinsieme limitato e non vuoto E di F si ha $\sup_{\mathbb{R}} E \in F$ ed $\inf_{\mathbb{R}} E \in F$.

Risoluzione

Se F è chiuso, ed $E \subseteq F$ è limitato e non vuoto, allora o $\sup E = \max E \in E \subseteq F$ e quindi $\sup E \in F$, oppure $\sup E \notin E$, nel qual caso, come visto all'inizio del numero precedente, $\sup E$ è di accumulazione per E, e quindi per F, e allora sta in F, perché F è chiuso. Sia poi $a \in \mathbb{R} \setminus F$: mostriamo che nelle ipotesi poste esiste un intorno $]a_1, a_2[$ di a ($a_1 < a < a_2$) disgiunto da F, il che mostra che F è chiuso. Sia $E_1 = F \cap [a-1, a]$, $E_2 = F \cap [a, a+1]$. Se E_1 non è vuoto, $a_1 = \sup E_1$ sta in F per l'ipotesi fatta, e pertanto $a_1 < a$ (essendo $a_1 \leq a$, ma $a_1 \neq a$ perché $a \notin F$) altrimenti sia $a_1 = a - 1$. Similmente, sia $a_2 = \inf E_2$ se E_2 non è vuoto, altrimenti sia $a_2 = a + 1$. Si ha $a_1 < a < a_2$, ma $]a_1, a_2[\cap F = \emptyset$. □

Definizione 10.8.3. Un sottoinsieme D di $\mathbb{R}$ si dice *discreto* se non contiene nessuno dei suoi punti di accumulazione.

In altre parole, D è discreto se e solo se è formato di punti isolati. Si noti che un insieme discreto può avere punti di accumulazione (per esempio $D = \{1/(n+1) : n \in \mathbb{N}\}$): basta che nessuno di essi appartenga all'insieme stesso.

Esercizio 10.8.4. Sia D sottoinsieme di $\mathbb{R}$. Mostrare che sono equivalenti le condizioni che seguono:

(*i*) ogni sottoinsieme di D è chiuso in $\mathbb{R}$;

(*ii*) l'insieme dei punti di accumulazione di D è vuoto;

(*iii*) D è *localmente finito*, cioè per ogni punto p di $\mathbb{R}$ c'è un intorno U di p che ha intersezione finita con D;

(*iv*) ogni sottoinsieme limitato di D è finito;

(*v*) D è chiuso e discreto.

Definizioni 10.8.5. L'insieme dei punti di accumulazione di un sottoinsieme E di $\mathbb{R}$ si chiama *derivato* di E e si indica con $\operatorname{Der}_{\mathbb{R}} E$, o più semplicemente con $\operatorname{Der} E$. Un insieme E si dice *denso in sé* se ogni suo punto è di accumulazione per esso, in altre parole $E \subseteq \operatorname{Der} E$. Un insieme si dice *perfetto* se è chiuso e denso in sé.

Esercizio 10.8.6. Mostrare che per ogni sottoinsieme E di $\mathbb{R}$ il derivato $\operatorname{Der} E$ è chiuso. Dedurne che $\operatorname{Der}(\operatorname{Der} E) \subseteq \operatorname{Der} E$.

Suggerimento: se $p \notin \operatorname{Der} E$, esiste un aperto U di $\mathbb{R}$ che contiene p ed è tale che $U \cap E$ è finito. Allora $\mathbb{R} \setminus \operatorname{Der} E$ è...

Esercizio 10.8.7. Un insieme è perfetto se e solo se coincide col suo derivato.

Esercizio 10.8.8. La chiusura di un insieme denso in sé è un insieme perfetto.

Esercizio 10.8.9. È vero che $\operatorname{Der} E = \operatorname{Der}(\operatorname{cl} E)$, per ogni sottoinsieme E di $\mathbb{R}$?

Esercizio 10.8.10. Per ogni chiuso F di $\mathbb{R}$ esiste un chiuso G di $\mathbb{R}$ tale che $F = \operatorname{Der} G$.

Suggerimento: per ogni $a \in F$ che sia isolato in F si considerino i punti $a+1/(n+1)$, $n \in \mathbb{N}$; sia G l'insieme ottenuto aggiungendo tali punti ad F...

Esercizio 10.8.11. Trovare un sottoinsieme limitato di $\mathbb{R}$ tale che $\operatorname{Der}^3(E) = \operatorname{Der}(\operatorname{Der}(\operatorname{Der} E))$ sia vuoto, ma $\operatorname{Der}^2(E) = \operatorname{Der}(\operatorname{Der} E) \neq \emptyset$.

Esercizio 10.8.12. Dare una dimostrazione alternativa, basata sul fatto che gli insiemi finiti sono chiusi e che un punto p è di accumulazione per l'insieme E se e solo se in ogni intorno di p cadono infiniti punti di E.

Risoluzione

La condizione chiaramente implica che p è di accumulazione per E (fra gli infiniti punti di E appartenenti all'intorno, ce ne sono certamente di diversi da p!). Supponiamo che un punto p sia tale che in un suo intorno U, che possiamo supporre aperto, cada solo un insieme finito di punti di E distinti da p, siano essi $a_1, \dots, a_N$. Poiché ogni insieme finito è chiuso (*vedi* 6.5.3), $V = U \setminus \{a_1, \dots, a_N\} = U \cap (\mathbb{R} \setminus \{a_1, \dots, a_N\})$ è aperto, e contenendo p è intorno di p; e $V \cap E$ contiene al più il punto p. Ne segue che p non è di accumulazione per E. $\square$

10.9 INTERNO DI UN INSIEME

Diremo che un punto p è *interno* (in $\mathbb{R}$) ad un sottoinsieme E di $\mathbb{R}$ se E è intorno di p, cioè se esiste un aperto A di $\mathbb{R}$ tale che $p \in A \subseteq \mathbb{R}$; equivalentemente p è interno a E se esiste $\delta > 0$ tale che $B(c, \delta] \subseteq E$. Identica è la definizione di punto interno (in $\mathbb{R}^2$) a un sottoinsieme $E \subseteq \mathbb{R}^2$. L'*interno* (in $\mathbb{R}$) di un $E \subseteq \mathbb{R}$ è l'insieme dei suoi punti interni:

$$\operatorname{int}_{\mathbb{R}} E := \{p \in \mathbb{R} : E \text{ è intorno di } p \text{ in } \mathbb{R}\}; \qquad \text{e analogamente in } \mathbb{R}^2.$$

La nozione di interno è duale di quella di chiusura: si verifica facilmente che l'interno di E è l'unione di tutti i sottoinsiemi aperti di $\mathbb{R}$ contenuti in E, ed è quindi il massimo (nel senso dell'inclusione) aperto di $\mathbb{R}$ contenuto in E. Tutto ciò vale anche per $\mathbb{R}^2$. Dato un intervallo I di $\mathbb{R}$, il suo interno è l'intervallo I privato degli estremi. L'interno di $\mathbb{Q}$ e di $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ è vuoto.

10.10 FRONTIERA

Un'altra nozione per la quale avremo qui un uso marginale, ma che aiuta a chiarire la idee sulla topologia, è quella di *frontiera* di un insieme.

Definizione 10.10.1. Sia $E \subseteq \mathbb{R}$; un punto $p \in \mathbb{R}$ si dice *di frontiera* per E (in $\mathbb{R}$) se p non è interno a E, e nemmeno al complementare di E. Identica la definizione di punto di frontiera in $\mathbb{R}^2$, per un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$. L'insieme di tutti i punti di $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}^2$) che sono di frontiera per E in $\mathbb{R}$ (in $\mathbb{R}^2$) si chiama *frontiera* di E in $\mathbb{R}$ (in $\mathbb{R}^2$) e si indica con il simbolo

$$\operatorname{fr}_{\mathbb{R}} E \qquad \text{oppure} \qquad \operatorname{fr}_{\mathbb{R}^2} E.$$

Se p è di frontiera per E, e U è intorno di p, U non può essere contenuto in E (perché altrimenti p sarebbe interno a E) e quindi $U \cap (\mathbb{R} \setminus E) \neq \emptyset$; similmente U non è contenuto in $\mathbb{R} \setminus E$ e quindi $U \cap E \neq \emptyset$; p è di frontiera per E se e solo se ogni intorno di p contiene sia punti di E che punti del complementare di E; in altre parole, p è di frontiera per E se e solo se p appartiene alla chiusura di E e anche alla chiusura di $\mathbb{R} \setminus E$:

$$\operatorname{fr}_{\mathbb{R}} E = \operatorname{cl}_{\mathbb{R}} E \cap \operatorname{cl}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R} \setminus E), \qquad \text{e analogamente in } \mathbb{R}^2.$$

Esercizio 10.10.2. Un insieme è aperto se e solo se non contiene alcun punto della sua frontiera; un insieme è chiuso se e solo se contiene tutti i suoi punti di frontiera.

La frontiera di un intervallo in $\mathbb{R}$ consiste esattamente di quegli estremi dell'intervallo che sono finiti; più generalmente si ha quanto segue.

Esercizio 10.10.3. Sia E sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$; se E è superiormente limitato, allora $\sup E$ è di frontiera per E in $\mathbb{R}$; se E è inferiormente limitato, $\inf E$ è di frontiera per E in $\mathbb{R}$.

Esercizio 10.10.4. Sia $E \subseteq \mathbb{R}$. Mostrare che se un intervallo I di $\mathbb{R}$ contiene un punto di E e un punto di $\mathbb{R} \setminus E$ allora I contiene un punto di frontiera di E. Dedurne che gli unici sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ simultaneamente chiusi e aperti sono $\emptyset$ ed $\mathbb{R}$.

Risoluzione

Sia $a \in I \cap E$, $b \in I \cap (\mathbb{R} \setminus E)$. Mostriamo che l'intervallo chiuso di estremi a e b (il quale è contenuto in I, per definizione di intervallo) contiene almeno un punto della frontiera di E; per fissare le idee, supponiamo $a < b$. Sia $F = E \cap [a, b]$; F non è vuoto e $c = \sup F$ sta in $[a, b]$; per l'esercizio precedente c è di frontiera per F; ma si vede subito che è di frontiera anche per E. Il resto è facile.

Esercizio 10.10.5. Mostrare che in $\mathbb{C}$ la frontiera dei dischi di centro z e raggio $r > 0$ è esattamente la circonferenza di centro z e raggio r:

$$\operatorname{fr}_{\mathbb{C}} B\,(z, r[= \operatorname{fr}_{\mathbb{C}} B(z, r] = S(z, r) = \{w \in \mathbb{C} : |w - z| = r\}.$$

Esercizio 10.10.6. Si ha $\operatorname{fr}_{\mathbb{R}} \mathbb{Q} = \operatorname{fr}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \mathbb{R}$.

Giuseppe De Marco

Analisi Uno

Teoria ed esercizi

Terza edizione

Analisi Uno prende avvio dalle conoscenze di matematica delle scuole superiori – che riprende nel capitolo iniziale «Analisi Zero» e integra con nozioni di base non sempre note a chi inizia l'università (funzioni iniettive, suriettive, monotone) – per portare in breve tempo studenti e studentesse a una conoscenza operativa della nozione di limite e del calcolo differenziale e integrale. L'enfasi è posta sull'applicazione e sul calcolo, più che sull'astrazione, così come gli esercizi e gli esempi (oltre 500 interamente svolti) puntano a rendere chi studia autonomo fin dall'inizio.

Alle nozioni topologiche sono dedicati tre capitoli: «La topologia della retta reale», «La topologia del piano» e «Altre nozioni di topologia»; questo livello di approfondimento in un testo introduttivo è inusuale e controbilanciato da istruzioni grafiche molto pratiche per differenziare gli argomenti. Sono segnalati con icone differenti gli esercizi standard, gli argomenti importanti, gli argomenti di carattere astratto, gli esercizi più difficili e le parti secondarie, così come sono evidenziati da una stellina gli argomenti più avanzati, che comportano un passo in più nello studio e nella comprensione della materia.

Analisi Uno risulta quindi un manuale molto duttile, un testo di base completo, in grado di spingersi verso argomenti più impegnativi, se necessario, senza perdere mai di vista la struttura essenziale della disciplina.

Giuseppe De Marco è stato professore di Analisi Matematica presso il Dipartimento di Matematica "Tullio Levi-Civita" dell'Università degli Studi di Padova.
Con Decibel/Zanichelli ha pubblicato: *Analisi Due* (1993), *Analisi Zero* (1997), *Esercizi di Analisi Due* (1998) ed *Esercizi di calcolo in una variabile* (2001).

Le risorse multimediali

online.universita.zanichelli.it/demarco-analisi1
A questo indirizzo sono disponibili le risorse multimediali di complemento al libro. Per accedere alle risorse protette è necessario registrarsi su **my.zanichelli.it** inserendo il codice di attivazione personale contenuto nel libro.

Libro con ebook

Chi acquista il libro può scaricare gratuitamente l'**ebook**, seguendo le istruzioni presenti nel sito. L'ebook si legge con l'applicazione *Booktab Z*, che si scarica gratis da App Store (sistemi operativi Apple) o da Google Play (sistemi operativi Android).

DEMARCO*ANALISI UNO 3ED LUM
ISBN 978-88-08-29978-9
9 788808 299789
3 4 5 6 7 8 9 0 1 (60B)