

Capitolo 1

Introduzione

Questo volume contiene le prove d'esame e le relative soluzioni per il Corso di Metodi Matematici per la Fisica dei Sistemi Complessi della Laurea Magistrale in Fisica inter-ateneo dell'Università di Torino e del Piemonte Orientale. Il programma del corso negli anni ha subito alcune modifiche, ma sostanzialmente ha sempre coperto i seguenti argomenti: equazioni differenziali alle derivate parziali (circa 60% del corso) e analisi complessa avanzata (restante 40%).

L'idea alla base del corso e del presente volume è quella di descrivere in dettaglio alcuni metodi matematici e la loro applicazione diretta attraverso diversi esercizi.

Tali esercizi sono tutti originali e presentano vari gradi di difficoltà coprendo tutto lo spettro della teoria spiegata. Spesso il metodo da utilizzare per risolvere un esercizio deve essere scelto sulla base delle caratteristiche del problema e la strada più vantaggiosa per arrivare alla soluzione completa richiede una buona esperienza. Vengono messi a confronto vari metodi in modo da evidenziare quali siano più vantaggiosi nella soluzione di certi problemi. Nel caso delle equazioni differenziali alle derivate parziali, mancando un metodo generale per la loro soluzione (la teoria delle equazioni differenziali alle derivate parziali è tutt'ora incompleta), la soluzione può essere ottenuta per strade diverse e più o meno efficienti, come per esempio la scelta di un sistema di coordinate adattate al sistema. Nel caso dell'analisi complessa, la scelta di un cammino di integrazione è in generale arbitraria, ma la più vantaggiosa ed efficace per risolvere l'integrale è frutto dell'esperienza maturata. Il presente volume non riporta i teoremi e la teoria, che si possono trovare nella letteratura classica sull'argomento. Nella bibliografia sono riportati alcuni testi di riferimento utili per approfondire le tematiche.

La parte di equazioni differenziali comprende: equazioni differenziali alle derivate parziali di primo grado (in due o più variabili), metodo delle curve caratteristiche e problemi di Cauchy, sistemi di equazioni differenziali di primo grado ed equazioni di secondo grado, tecniche di risoluzione basate su metodi analitici, geometrici e algebrici. I metodi analizzati sono, per le equazioni differenziali di primo grado, quello delle curve caratteristiche, del teorema di Fröbenius, della forma implicita, del metodo del fattore

integrante, delle forme differenziali e della funzione di Green. Per le equazioni differenziali di grado superiore al primo, sono impiegati i metodi delle curve caratteristiche, delle coordinate adattate al problema, dell'estensione analitica, degli invarianti di Riemann e delle trasformazioni odografiche. Per i sistemi di equazioni differenziali sono utilizzati i metodi degli invarianti di Riemann, delle condizioni di consistenza e il metodo delle forme differenziali. Per ogni tipo di equazione si sono studiati vari problemi al contorno, la loro consistenza e la soluzione del problema con le appropriate condizioni al contorno. Per le equazioni differenziali lineari esistono dei metodi generali per la soluzione, mentre per quelle non lineari si ha disposizione un bagaglio piuttosto limitato di strumenti. Nel presente volume si è voluto dare enfasi soprattutto a quelle non lineari.

La parte di analisi complessa comprende i seguenti argomenti: funzioni polidrome (logaritmi, radici, funzioni trigonometriche inverse), residuo del punto all'infinito, trasformazioni conformi e calcolo di serie con il metodo dei residui. Si danno per assimilati i concetti di funzione analitica, meromorfa, descrizione delle singolarità, integrale oloomorfo, teorema dei residui, formula di Cauchy, espansione di Taylor e di Laurent. Nel programma del corso viene contemplata un'introduzione alla teoria delle distribuzioni. Inoltre si danno per acquisite le nozioni di base della teoria delle distribuzioni in una o più variabili.

All'inizio del capitolo 3 e del capitolo 4 del libro, si trova un elenco dei metodi risolutivi impiegati e degli esercizi in cui, all'interno del testo, vengono applicati tali metodi.

Le soluzioni che seguono alla formulazione dei problemi forniscono una guida alla soluzione con più varianti per avere diverse alternative alla risoluzione dell'esercizio. Vengono presentati anche una spiegazione sommaria sulla strategia di risoluzione e i relativi calcoli in modo dettagliato. Sono tuttavia omessi alcuni passaggi algebrici elementari.

Nella prima parte del volume sono state raccolte formule e teoremi utili per la risoluzione degli esercizi (senza la pretesa di essere esaustivi) e nella sezione delle referenze vengono riportate le principali referenze bibliografiche utilizzate per preparare alcuni dei testi presenti nel volume.

Si ringraziano tutti gli studenti che negli anni hanno contribuito a rendere queste note utili. Si ringraziano in particolare gli studenti Matteo Manachino e Michelangelo Borsarelli, i professori Roberto Catenacci e Paolo Maria Aschieri per utili suggerimenti e correzioni.