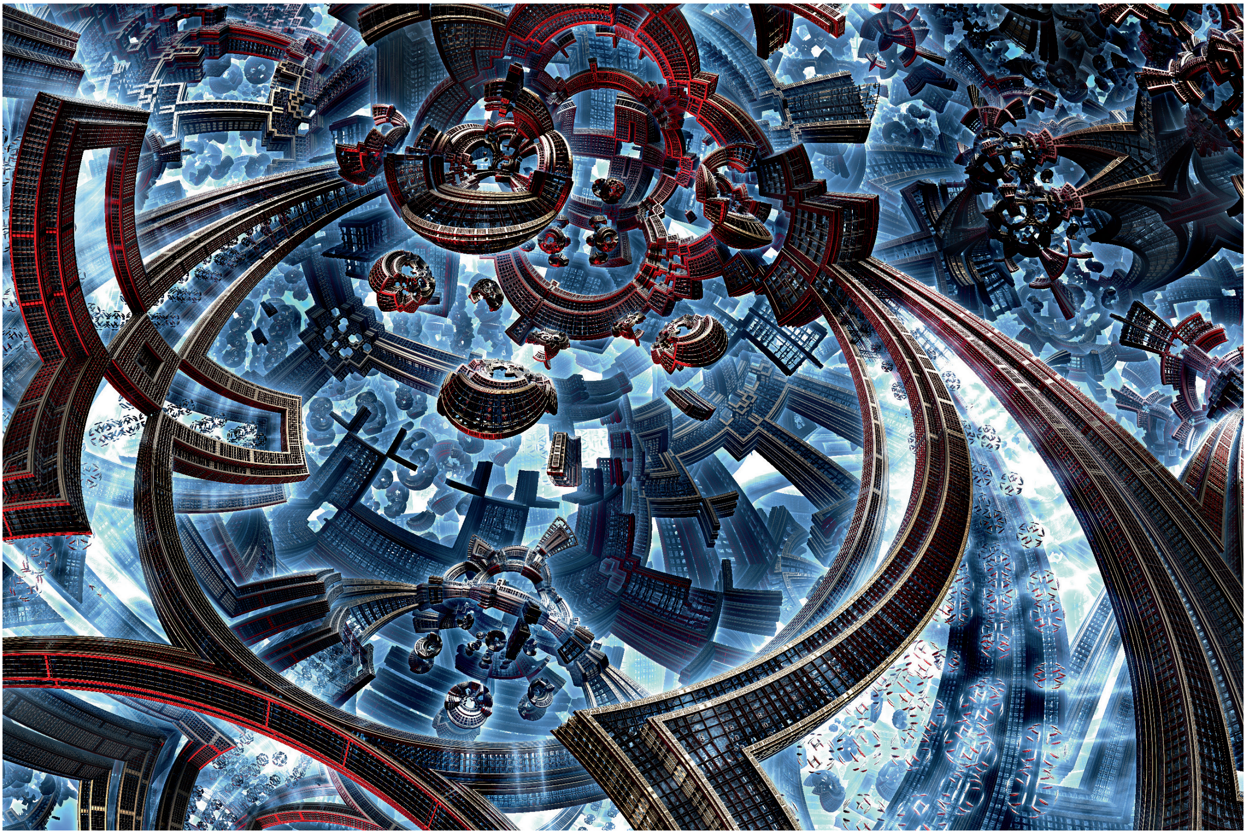


PIETRO ANTONIO GRASSI

ESERCIZI DI METODI MATEMATICI

PER FISICI E INGEGNERI

CASA EDITRICE AMBROSIANA

PIETRO ANTONIO GRASSI

ESERCIZI DI METODI MATEMATICI

PER FISICI E INGEGNERI

equazioni differenziali alle derivate parziali
e analisi complessa

Casa Editrice Ambrosiana

Indice

Capitolo 1

Introduzione

Questo volume contiene le prove d'esame e le relative soluzioni per il Corso di Metodi Matematici per la Fisica dei Sistemi Complessi della Laurea Magistrale in Fisica inter-ateneo dell'Università di Torino e del Piemonte Orientale. Il programma del corso negli anni ha subito alcune modifiche, ma sostanzialmente ha sempre coperto i seguenti argomenti: equazioni differenziali alle derivate parziali (circa 60% del corso) e analisi complessa avanzata (restante 40%).

L'idea alla base del corso e del presente volume è quella di descrivere in dettaglio alcuni metodi matematici e la loro applicazione diretta attraverso diversi esercizi.

Tali esercizi sono tutti originali e presentano vari gradi di difficoltà coprendo tutto lo spettro della teoria spiegata. Spesso il metodo da utilizzare per risolvere un esercizio deve essere scelto sulla base delle caratteristiche del problema e la strada più vantaggiosa per arrivare alla soluzione completa richiede una buona esperienza. Vengono messi a confronto vari metodi in modo da evidenziare quali siano più vantaggiosi nella soluzione di certi problemi. Nel caso delle equazioni differenziali alle derivate parziali, mancando un metodo generale per la loro soluzione (la teoria delle equazioni differenziali alle derivate parziali è tutt'ora incompleta), la soluzione può essere ottenuta per strade diverse e più o meno efficienti, come per esempio la scelta di un sistema di coordinate adattate al sistema. Nel caso dell'analisi complessa, la scelta di un cammino di integrazione è in generale arbitraria, ma la più vantaggiosa ed efficace per risolvere l'integrale è frutto dell'esperienza maturata. Il presente volume non riporta i teoremi e la teoria, che si possono trovare nella letteratura classica sull'argomento. Nella bibliografia sono riportati alcuni testi di riferimento utili per approfondire le tematiche.

La parte di equazioni differenziali comprende: equazioni differenziali alle derivate parziali di primo grado (in due o più variabili), metodo delle curve caratteristiche e problemi di Cauchy, sistemi di equazioni differenziali di primo grado ed equazioni di secondo grado, tecniche di risoluzione basate su metodi analitici, geometrici e algebrici. I metodi analizzati sono, per le equazioni differenziali di primo grado, quello delle curve caratteristiche, del teorema di Fröbenius, della forma implicita, del metodo del fattore

 ISBN 978-88-08-88003-1

integrante, delle forme differenziali e della funzione di Green. Per le equazioni differenziali di grado superiore al primo, sono impiegati i metodi delle curve caratteristiche, delle coordinate adattate al problema, dell'estensione analitica, degli invarianti di Riemann e delle trasformazioni odografiche. Per i sistemi di equazioni differenziali sono utilizzati i metodi degli invarianti di Riemann, delle condizioni di consistenza e il metodo delle forme differenziali. Per ogni tipo di equazione si sono studiati vari problemi al contorno, la loro consistenza e la soluzione del problema con le appropriate condizioni al contorno. Per le equazioni differenziali lineari esistono dei metodi generali per la soluzione, mentre per quelle non lineari si ha disposizione un bagaglio piuttosto limitato di strumenti. Nel presente volume si è voluto dare enfasi soprattutto a quelle non lineari.

La parte di analisi complessa comprende i seguenti argomenti: funzioni polidrome (logaritmi, radici, funzioni trigonometriche inverse), residuo del punto all'infinito, trasformazioni conformi e calcolo di serie con il metodo dei residui. Si danno per assimilati i concetti di funzione analitica, meromorfa, descrizione delle singolarità, integrale olomorfo, teorema dei residui, formula di Cauchy, espansione di Taylor e di Laurent. Nel programma del corso viene contemplata un'introduzione alla teoria delle distribuzioni. Inoltre si danno per acquisite le nozioni di base della teoria delle distribuzioni in una o più variabili.

All'inizio del capitolo 3 e del capitolo 4 del libro, si trova un elenco dei metodi risolutivi impiegati e degli esercizi in cui, all'interno del testo, vengono applicati tali metodi.

Le soluzioni che seguono alla formulazione dei problemi forniscono una guida alla soluzione con più varianti per avere diverse alternative alla risoluzione dell'esercizio. Vengono presentati anche una spiegazione sommaria sulla strategia di risoluzione e i relativi calcoli in modo dettagliato. Sono tuttavia omessi alcuni passaggi algebrici elementari.

Nella prima parte del volume sono state raccolte formule e teoremi utili per la risoluzione degli esercizi (senza la pretesa di essere esaustivi) e nella sezione delle referenze vengono riportate le principali referenze bibliografiche utilizzate per preparare alcuni dei testi presenti nel volume.

Si ringraziano tutti gli studenti che negli anni hanno contribuito a rendere queste note utili. Si ringraziano in particolare gli studenti Matteo Manachino e Michelangelo Borsarelli, i professori Roberto Catenacci e Paolo Maria Aschieri per utili suggerimenti e correzioni.

Capitolo 2

Formule utili

2.1 Analisi complessa

1. *Formula di Cauchy.* Se $f(z)$ è analitica su un dominio semplicemente connesso D e se γ è una curva chiusa regolare contenuta in D, allora per ogni z contenuto all'interno di γ e $k = 0, 1, 2, \ldots$ vale la seguente formula di Cauchy generalizzata

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}} d\xi \,. \tag{2.1}$$

   Serie di Laurent. Se $f(z)$ è analitica sull'anello $R_1 < |z - z_0| < R_2$, allora $f(z)$ ha una rappresentazione unica

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^k \,, \tag{2.2}$$

   dove i coefficienti a_n sono dati dalla formula di Cauchy

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C} \frac{f(z)}{(z - z_0)^k} dz \,, \tag{2.3}$$

   in cui C è il cerchio di raggio R con $R_1 < R < R_2$ centrato in z_0.

2. *Teorema dei residui.* Data la funzione meromorfa $f(z)$ sul piano complesso $z \in \mathbb{C}$ e il cammino liscio chiuso γ su $\mathbb{C}$ (percorso in senso antiorario), la formula di Cauchy per i residui è

$$\oint_{\gamma} f(z) dx = 2\pi i \sum_{z_i \subset \mathrm{Int}(\gamma)} \mathrm{Res}\Big(f(z) | z = z_i\Big) \,, \tag{2.4}$$

Capitolo 3

Equazioni differenziali alle derivate parziali

Gli esercizi sono divisi in tre sezioni: 3.1 Equazioni differenziali alle derivate parziali di primo grado. 3.2 Equazioni differenziali alle derivate parziali di secondo grado. 3.3 Sistemi di equazioni differenziali alle derivate parziali. Le tre sezioni sono divise ulteriormente in sottosezioni per le equazioni differenziali lineari e quelle non lineari.

I vari esercizi prevedono tecniche diverse di risoluzione, diverse problematiche legate alla risoluzione, caratteristiche rilevanti delle equazioni differenziali. Per guidare meglio il lettore alla fruizione del presente testo, riportiamo di seguito le diverse problematiche e gli esercizi del testo che le affrontano.

- Curve caratteristiche: 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17,18, 21, 22, 25, 42, 48, 50.

- Problema di Cauchy: 1, 2, 3, 4, 8, 11, 12, 13, 14, 16, 19, 36, 40, 41, 44, 50.

- Condizioni al bordo: 18, 19, 20, 21, 22, 23, 30, 32, 33, 34, 36, 40, 50.

- Trasformata/Serie di Fourier/Laplace/Mellin: 5, 9, 19, 28, 29, 31, 37, 41, 42.

- Operatori differenziali e teorema di Frobenius: 6, 7, 8, 15, 25, 26, 27, 38, 39.

- Forma implicita: 7, 10, 12, 13, 14, 17, 45.

- Problema ellittico: 21, 23, 24, 28, 30, 32, 33, 42.

- Problema iperbolico: 21, 22, 25, 27, 28, 29, 31, 34, 36, 39, 40, 41, 46, 47, 48, 49.

- Problema parabolico: 20, 25, 38, 43, 44, 45.

- Forma canonica: 22, 25, 26, 28, 31, 33, 36, 42.

 ISBN 978-88-08-88003-1

- Coordinate curve: 23, 24, 26, 49.
- Separazione delle variabili: 24, 26, 46.
- Funzioni di Green: 35, 37, 43, 44.
- Trasformazioni odografiche: 49.
- Distribuzioni: 5, 35.
- Invarianti: 10, 11.

La maggior parte dei problemi proposti nel testo si riferisce a equazioni che intervengono in applicazioni scientifiche, ingegneristiche e tecniche. Nel presente sommario riportiamo il numero degli esercizi che, indicativamente, si riferiscono a ciascun tipo di equazione e a loro generalizzazioni. Per rendere i problemi interessanti, alcune equazioni classiche sono state generalizzate a coefficienti non costanti e/o non lineari. Alcuni problemi infine non sono riconducibili a problemi scientifici o applicazioni tecniche.

- Equazioni di Navier-Stokes e applicazioni alla fluido-dinamica: 1,4, 49, 50.
- Equazione di Eulero (non lineari) e fluido-dinamica: 2, 10, 11, 16, 18.
- Trasformazioni conformi (computer graphics): 6,12, 13.
- Rotazioni del piano: 8.
- Equazione del calore: 38, 39, 44, 45.
- Equazione di Monge-Ampère: 17
- Equazione del telegrafo: 19, 48.
- Equazione di Klein-Gordon: 20, 30.
- Equazione di Schrödinger: 21.
- Equazione di Poisson/Laplace: 24, 25, 31, 33, 43.
- Equazione di D'Alambert (eq. delle onde): 27, 34, 35, 36, 37, 40, 41, 42, 46.
- Equazione di Eulero-Tricomi: 29.
- Flussi e circuitazioni: 28.
- Equazione di sinh-Gordon: 47.

3.1 Equazioni differenziali alle derivate parziali di primo grado

3.1.1 Lineari

PROBLEMA 3.1
Considerare l'equazione differenziale alle derivate parziali

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 1\,.$$

1. Trovare le curve caratteristiche passanti per il punto $(1,1,1)$.
2. Dimostrare che esiste un'unica superficie integrale $u(x,y)$ che soddisfa

$$u(x,0) = \sin x$$

   e trovare la soluzione.
3. La soluzione è definita per ogni x e y?

Soluzione

1. Le equazioni per le curve caratteristiche sono

$$\dot{x} = x\,, \quad \dot{y} = 0\,, \quad \dot{u} = 0\,, \tag{3.1}$$

con la soluzione generale

$$x(t,s) = x_0(s)e^t\,, \quad y(t,s) = t + y_0(s)\,, \quad u(t,s) = t + u_0(s)\,. \tag{3.2}$$

Si è introdotta la variabile s per parametrizzare le condizioni al contorno. Se le curve caratteristiche devono passare per il punto $(1,1,1)$, dobbiamo cercare una soluzione al sistema

$$1 = x_0(s)e^{t_0}\,, \quad 1 = t_0 + y_0(s)\,, \quad 1 = t_0 + u_0(s)\,, \tag{3.3}$$

dove t_0 è un valore del parametro t sulla curva caratteristica. Dalla prima equazione si ha $t_0 = \ln x_0(s)$ e quindi si ottiene che

$$u_0(s) = y_0(s)\,, \quad t_0 = \ln x_0(s) \tag{3.4}$$

come condizioni affinché le curve caratteristiche passino dal punto indicato. Per ogni curva caratteristica (cioè fissato il parametro s sulla base delle condizioni al contorno) si ha un valore di t_0 che determina il punto su tale curva dove le coordinate assumono il valore richiesto.

 ISBN 978-88-08-88003-1

2. Se usiamo come condizioni al contorno quelle date al punto 2, possiamo parametrizzarle come

$$y(0,s) = 0\,, \quad x(0,s) = s\,, \quad u(0,s) = \sin(s)\,. \tag{3.5}$$

Risolvendo il problema si ha che la soluzione è data da

$$u(x,y) = y + \sin(xe^{-y})\,. \tag{3.6}$$

3. La soluzione è definita per ogni punto del piano $\mathbb{R}^2$.

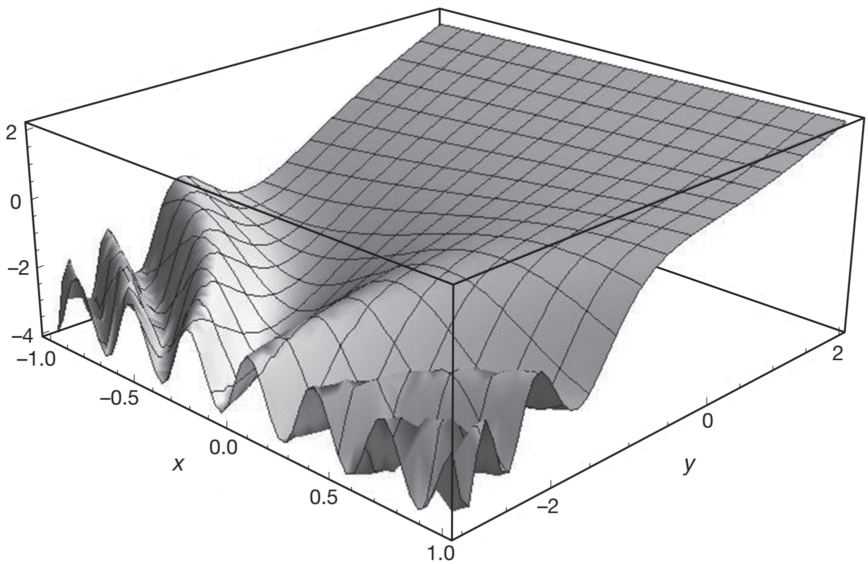


Figura 3.1: *Rappresentazione grafica della soluzione nel dominio* $(x,y) \in [-1,1] \times [-4,1]$. *Come si può notare dalla figura, per valori negativi di y le oscillazioni diventano più frequenti in quanto l'argomento del* sin *diventa più grande.*

Capitolo 4

Analisi complessa

Nella presente sezione proponiamo una serie di esercizi di analisi complessa avanzata (dal calcolo dei residui fino alle funzioni speciali). La sezione è divisa in integrali di variabile reale analizzati con il metodo dei residui, integrali di variabile complessa, integrali parametrici e serie. Anche in questo caso per agevolare la fruizione del testo, riportiamo di seguito alcune caratteristiche ricorrenti degli esercizi e il numero dell'esercizio in cui si riscontrano.

- Metodo dei residui: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 18, 21, 22, 23, 24, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 38, 39, 45, 46, 47, 48, 49.

- Funzioni polidrome: 3, 4, 6, 8, 9, 11, 12, 13, 16, 17, 18, 19, 20, 22, 23, 25, 26, 27, 30, 42, 43, 45.

- Metodo dei momenti: 18, 19, 28, 29, 30, 31, 33, 34, 36, 38, 39.

- Trasformazioni conformi: 9, 35, 37, 40, 41.

- Valore principale: 6, 10, 13, 16, 20, 21, 26, 35.

- Funzioni speciali: 12, 15, 25, 27, 35, 37, 46.

 ISBN 978-88-08-88003-1

4.1 Integrali di variabile reale con metodi di analisi complessa

PROBLEMA 4.1

1. Calcolare l'integrale
$$\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx$$
usando il teorema dei residui.
2. Calcolare l'integrale
$$\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 dx\,.$$
3. Trovare una formula generale per calcolare
$$\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^a dx\,, \quad a \in \mathbb{N}\,.$$

Soluzione

1. Per integrare la funzione $(\sin(x)/x)^2$, osserviamo che essa ha un comportamento asintotico sufficientemente veloce per garantire la convergenza dell'integrale e non presenta discontinuità nel dominio di integrazione. Inoltre si può riscrivere l'integrale (per ogni a) come un integrale esteso tra $-\infty$ e $+\infty$ e dividere a metà il risultato. Riscrivendo $\sin(x)$ con gli esponenziali si ha
$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx = -\frac{1}{8}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2ix}+e^{-2ix}-2}{x^2} dx = \frac{1}{4}\Re\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2ix}-1}{x^2}\right)\,. \tag{4.1}$$
L'integrando dell'ultima espressione non ha singolarità nel dominio di integrazione e può essere esteso analiticamente alla funzione $f(z) = \frac{e^{2iz}-1}{z^2}$. Quindi si integra sul cammino di integrazione descritto dalle due curve: $z = x, x \in [-R,-\varepsilon]\bigcup[\varepsilon,R]$, $z = Re^{i\theta}$ con $\theta \in [0,\pi]$ e $R \to \infty$ e sul semicerchio $z = \varepsilon e^{i\theta}$ con $\theta \in [0,\pi]$ percorso in senso orario. In questo modo l'esponenziale tende a zero nel limite di raggio grande per il fatto che il cammino è chiuso nel semipiano superiore del piano complesso. L'unico punto interessante è l'origine del piano complesso, per il quale bisogna calcolare il contributo. Bisogna osservare che mentre $\Re(\frac{e^{2ix}-1}{x^2})$ non ha singolarità, la funzione $f(z)$ ha un polo singolo in $z = 0$ che dà il contributo
$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx = -\frac{1}{4}\Re\left(\frac{2\pi i}{2}\lim_{z\to 0} z\frac{e^{2iz}-1}{z^2}\right) = \frac{\pi}{2} \tag{4.2}$$
Il fattore $1/2$ che compare nella parentesi è dovuto al fatto che si prende solo metà residuo, in quanto il cerchio intorno all'origine non è completo.

2. Per il calcolo del secondo integrale, osserviamo che possiamo riscrivere l'integrando nel seguente modo

$$\frac{\sin^3(x)}{x^3} = \frac{3\sin(x) - \sin(3x)}{4x^3} = -\frac{1}{4}\Im\left(\frac{e^{3ix} - 3e^{ix}}{x^3}\right). \tag{4.3}$$

Consideriamo la funzione associata

$$f(z) = -\frac{1}{4}\left(\frac{e^{3iz} - 3e^{iz}}{z^3}\right), \tag{4.4}$$

ottenuta complessificando la (4.3). Essa ha un polo triplo e un polo semplice per $z = 0$. Il polo doppio si cancella automaticamente. Tuttavia sia il polo semplice che quello triplo hanno residui reali, quindi, calcolandone la parte immaginaria, si cancellano. Questo implica che è possibile trovare una regolarizzazione di ogni singolo pezzo dell'integrale, in modo da applicare il metodo dei residui. Infatti, sostituendo alla funzione (4.4) la nuova espressione

$$f(z) = -\frac{1}{4z^3}\left((e^{3iz} - 1 - 3iz + \frac{9}{2}z^2) - 3(e^{iz} - 1 - iz - \frac{3}{2}z^2)\right), \tag{4.5}$$

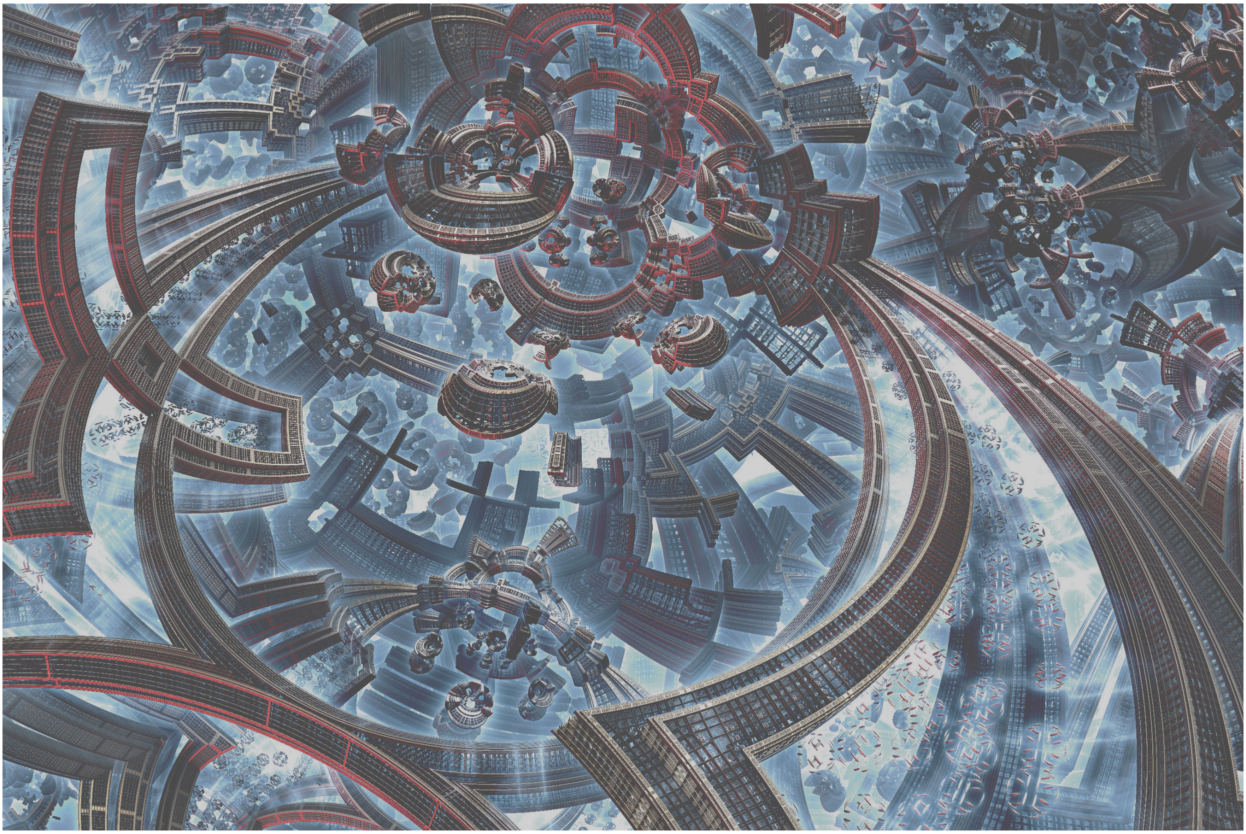
il risultato non cambia. Si noti che, mentre i termini reali $(-1 + \frac{9}{2}z^2)$ hanno un residuo reale che non dà contributo all'integrale, il termine $-3iz$ dà un contributo non nullo, ma un termine equivalente appare anche nella seconda parentesi. In questo modo i due integrali che si ottengono sono entrambi ben definiti nell'origine. A questo punto possiamo considerare solamente i (semi) residui che si ottengono definendo l'integrale con il cammino di integrazione come al punto precedente.

Si noti che l'integrale lungo la curva esterna tende a zero quando $R \to \infty$, mentre l'integrale lungo l'asse reale restituisce il doppio del valore dell'integrale cercato, si ha

$$\lim_{R\to\infty}\oint_\gamma f(z)dz = 2\int_0^\infty \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^3 dx - \int_0^\pi f(\varepsilon e^{i\theta}) i\varepsilon e^{i\theta} d\theta = 0. \tag{4.6}$$

L'integrale complesso è nullo in quanto non ci sono poli all'interno del cammino di integrazione. Tuttavia il contributo del secondo termine nell'equazione precedente si può calcolare con il teorema dei residui con l'accortezza di notare che c'è un segno meno supplementare, in quanto si percorre il cammino in senso orario, e un fattore $\frac{1}{2}$, in quanto sono dei semi-residui. Per calcolare tale contributo osserviamo che il risultato lo si ottiene prendendo il polo triplo dei termini con l'esponenziale (gli altri termini danno un contributo nullo), si ottiene

$$\int_0^\infty \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^3 dx = \frac{1}{2}\Im\left(-\frac{2\pi i}{4}\lim_{z\to 0}\frac{1}{2}\frac{d^2}{dz^2}e^{3iz} + \frac{6\pi i}{4}\lim_{z\to 0}\frac{1}{2}\frac{d^2}{dz^2}e^{iz}\right) = \frac{3\pi}{8}. \tag{4.7}$$



Una raccolta di esercizi guidati sulle equazioni differenziali alle derivate parziali e di analisi complessa avanzata, rivolta agli studenti del Corso di Metodi Matematici per la Fisica dei Sistemi Complessi.

Risolvere problemi matematici richiede esperienza e costante applicazione. Spesso manca un metodo generale e univoco di svolgimento dell'esercizio, ma la soluzione può essere ottenuta per strade diverse e più o meno efficaci.

Il volume si propone di accompagnare lo studente nell'apprendimento grazie all'applicazione pratica dei diversi metodi matematici, senza riportare i teoremi e la teoria. L'utilità di questo approccio è data dal confronto delle varie possibilità: lo studente infatti svilupperà in modo autonomo la propria capacità critica nel valutare le diverse alternative e saprà scegliere la più vantaggiosa.

Pietro Antonio Grassi insegna Metodi matematici per la Fisica dei Sistemi Complessi presso il Dipartimento di Scienze e Innovazione tecnologica dell'Università degli Studi del Piemonte Orientale ed è vicedirettore del centro Arnold-Regge per l'Algebra, la Geometria e la Fisica teorica..