Indice

PROBLEMA 3.A

Considerare l'equazione differenziale alle derivate parziali

$$y\frac{\partial u}{\partial x}+x\frac{\partial u}{\partial y}=u\,,$$

dove $u=u(x,y)$ è una funzione su $\mathbb{R}^2$ in cui (x,y) sono le coordinate di un punto dello spazio. Il problema di Cauchy è definito con la condizione al contorno

$$y=0\,,\qquad u(x,0)=\sin(x)\,.$$

1. Mostrare che l'equazione differenziale è invariante sotto le trasformazioni $x\to x+\varepsilon y$ e $y\to y+\varepsilon x$ dove il parametro ε è infinitesimo.
2. Risolvere l'equazione usando il metodo delle curve caratteristiche e imponendo la condizione al contorno. Dov'è definita la soluzione?
3. Mostrare che la soluzione generale del problema può essere posta nella forma
$$F\Big(\frac{u}{x+y},x^2-y^2\Big)=0\,.$$

Nelle pagine seguenti troverai la soluzione alle diverse domande poste da alcuni problemi tratti dal libro. Ti consigliamo di accedervi solo dopo aver provato a impostare una soluzione.

 ISBN 978-88-08-88003-1

Soluzione

1. Per verificare che l'equazione è invariante sotto le trasformazioni è sufficiente riscrivere le derivate rispetto a x e a y con le nuove variabili $x' = x + \varepsilon y$ e $y' = y + \varepsilon x$ con $\varepsilon^2 = 0$ (essendo ε infinitesimo). Inserendo il risultato nell'equazione di partenza, si può verificare che la forma rimane invariata.

   Un altro metodo è quello di considerare una trasformazione lineare delle coordinate nella forma
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$
   dove S è una matrice 2×2 invertibile a coefficienti costanti. L'equazione da studiare può essere posta nella forma
$$x^T A \nabla u = u\,, \tag{3.2}$$
   dove x^T è il vettore riga ottenuto trasponendo il vettore $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, il vettore ∇u corrisponde al vettore gradiente di u e la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Compiendo la trasformazione di variabili, si ottiene la nuova equazione
$$x^T S^T A S \nabla u = u\,, \tag{3.3}$$
   dove S^T è la matrice trasposta di S. Se il sistema deve essere invariante, allora si deve avere $S^T A S = A$. Questo vuol dire che la matrice S deve commutare con A e un semplice calcolo mostra che ci sono solo 2 matrici che hanno tale proprietà: la matrice identità $\mathbf{I}_{2\times 2}$ e la matrice A stessa. La forma delle trasformazioni indicate nel testo è riscrivibile come una combinazione delle matrici identità $\mathbf{I}_{2\times 2}$ e A. Si nota inoltre che $A^2 = \mathbf{I}_{2\times 2}$ e questo implica che anche le trasformazioni finite, generate dalla matrice A, sono scrivibili come combinazione di $\mathbf{I}_{2\times 2}$ e di A.

2. Per risolvere l'equazione consideriamo le equazioni caratteristiche

$$\dot{u} = u\,, \qquad \dot{x} = y\,, \qquad \dot{y} = x\,. \tag{3.4}$$

Che si risolvono facilmente con

$$\begin{aligned} u(t,s) = u_0(s)e^t\,, \quad x(s,t) &= \alpha(s)e^t + \beta(s)e^{-t}\,, \\ y(s,t) &= \alpha(s)e^t - \beta(s)e^{-t}\,. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Imponendo la condizione iniziale, che, riscritta nella parametrizzazione (t,s), diventa

$$\begin{aligned} u(0,s) = u_0(s) = \sin(s)\,, \quad x(0,s) &= \alpha(s) + \beta(s) = s\,, \\ y(0,s) &= \alpha(s) - \beta(s) = 0\,, \end{aligned} \tag{3.6}$$

si ha che $\alpha(s) = \beta(s) = s/2$, da cui $x = s\cosh(t), y = s\sinh(t)$. Con semplice algebra si trova che $x^2 - y^2 = s^2$ ed $e^t = (x+y)/\sqrt{x^2-y^2}$, poi finalmente la soluzione del problema (scegliendo il ramo positivo della soluzione per s)

$$u(x,y) = (x+y)\frac{\sin\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{x^2-y^2}}\,. \tag{3.7}$$

La soluzione è invariante sotto le trasformazioni di coordinate date al punto 1. Inoltre la soluzione è definita per valori tali per cui $x^2 > y^2$. Si noti che il limite in cui $x \to y$ non è ben definito in quanto dipende dalla direzione lungo la quale ci si avvicina al limite.

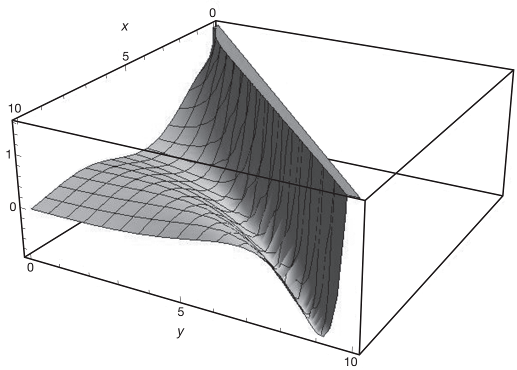

Figura 3.1: *Rappresentazione grafica della soluzione nel dominio $(x,y) \in [0,10] \times [0,10]$. Come si può notare dalla figura, vengono esclusi i punti dove l'argomento della radice diventa negativo. Inoltre la quota massima viene limitata.*

 ISBN 978-88-08-88003-1

3. Per rispondere al terzo quesito, se indichiamo con $F(a,b)$ la funzione data nel testo, si ha che

$$\begin{aligned} 0 = \left(y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}\right)F &= y\left[\frac{\partial F}{\partial a}\left(\frac{1}{x+y}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{u}{(x+y)^2}\right) + 2x\frac{\partial F}{\partial b}\right] \qquad (3.8)\\ &+ x\left[\frac{\partial F}{\partial a}\left(\frac{1}{x+y}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{u}{(x+y)^2}\right) - 2y\frac{\partial F}{\partial b}\right] \\ &= \frac{1}{x+y}\frac{\partial F}{\partial a}\left(y\frac{\partial u}{\partial x} + x\frac{\partial u}{\partial y} - u\right), \qquad (3.9)\end{aligned}$$

da cui segue che u soddisfa l'equazione di partenza se $\frac{\partial F}{\partial a} \neq 0$. Si può osservare che la soluzione trovata al punto precedente soddisfa l'equazione data nel terzo quesito se $F(a,b) = a - \sin(\sqrt{b})/\sqrt{b}$, che ha la proprietà $\frac{\partial F}{\partial a} = 1 \neq 0$.

Un altro modo per verificare l'asserto, è quello di mostrare che le combinazioni $u/(x+y)$ e $x^2 - y^2$ sono costanti sulle curve caratteristiche. Questo si evince immediatamente osservando che la soluzione delle curve caratteristiche dà

$$\frac{u}{(x+y)} = \frac{u_0(s)}{\alpha(s)+\beta(s)}, \qquad x^2 - y^2 = 4\alpha(s)\beta(s), \qquad (3.10)$$

che sono le combinazioni costanti.

PROBLEMA 3.B
Si consideri l'equazione differenziale alle derivate parziali non lineare

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = 1\,,$$

dove $u = u(x,y)$ è una funzione su $\mathbb{R}^2$.

1. Mostrare che l'equazione è equivalente al sistema

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y} = \lambda\,, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \lambda^{-1}\,,$$

   con $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Dire per quali valori di λ il sistema è risolvibile.

   (*Suggerimento*: Ricordare che $u = u(x,y)$ è una funzione reale!)

2. Per i valori di λ ammissibili, risolvere il sistema e verificare che la funzione trovata risolve anche l'equazione differenziale di partenza.

3. Usando le coordinate $z = x + iy$ e $\bar{z} = x - iy$, dire se la soluzione $u = u(z,\bar{z})$, vista come funzione delle variabili complesse, è analitica.

Nelle pagine seguenti troverai la soluzione alle diverse domande poste da alcuni problemi tratti dal libro. Ti consigliamo di accedervi solo dopo aver provato a impostare una soluzione.

 ISBN 978-88-08-88003-1

Soluzione

1. Moltiplicando le due equazioni, si ottiene esattamente l'equazione di partenza. Essendo la funzione $u(x,y)$ reale, possiamo calcolare il complesso coniugato della prima equazione, troviamo
$$\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \bar{\lambda}\,, \tag{3.11}$$
di conseguenza la seconda equazione può essere risolta se $\bar{\lambda} = \lambda^{-1}$, cioè se $|\lambda|^2 = 1$. Quindi possiamo scrivere $\lambda = e^{i\theta}$ con $\theta \in [0,2\pi]$.

2. A questo punto possiamo riscrivere il sistema di equazioni sommandole e sottraendole per trovare

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos(\theta)\,, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \sin(\theta)\,. \tag{3.12}$$

La prima equazione si risolve semplicemente osservando che la sua soluzione generale è data da

$$u(x,y) = x\cos(\theta) + f(y)\,, \tag{3.13}$$

dove $f(y)$ è una funzione generica di y. A questo punto, inserendo tale soluzione nella seconda equazione, si ha che $f(y) = y\sin(\theta) + c$, dove c è una costante. La soluzione generale del problema è pertanto

$$u(x,y) = x\cos(\theta) + y\sin(\theta) + c\,. \tag{3.14}$$

Il parametro θ introdotto nella soluzione non è fissato dall'equazione differenziale e può essere fissato imponendo delle condizioni al contorno. Il parametro θ è conseguenza dell'invarianza sotto rotazioni delle variabili (x,y) dell'equazione differenziale di partenza.

 ISBN 978-88-08-88003-1

3. Introducendo le coordinate complesse $z, \bar{z}$, si vede che la soluzione può essere posta uguale a $u(z,\bar{z}) = \frac{1}{2}(e^{i\theta}\bar{z} + e^{-i\theta}z)$. Come si vede, è una funzione reale, ma non è ovviamente analitica per ogni valore di θ.

PROBLEMA 3.C

Sia data l'equazione differenziale alle derivate parziali di secondo grado

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - y^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\alpha x + \frac{\beta y^2}{x})\frac{\partial u}{\partial x} + (\gamma y + \frac{\delta x^2}{y})\frac{\partial u}{\partial y} = 0\,.$$

1. Determinare il tipo di equazione differenziale analizzando l'operatore differenziale nelle derivate seconde. Il carattere dell'equazione cambia al variare di $(x,y) \in \mathbb{R}^2$? Esistono delle simmetrie evidenti dell'equazione differenziale con una scelta opportuna dei coefficienti $\alpha,\beta,\gamma,\delta$?
2. Determinare le coordinate caratteristiche dell'equazione e scriverla nelle nuove coordinate.
3. Scegliendo i coefficienti $\alpha,\beta,\gamma,\delta$, è possibile semplificare l'equazione e risolverla?
4. È possibile trovare una soluzione invariante sotto le trasformazioni di scala $x \to \lambda x$ e $y \to \lambda y$?

Nelle pagine seguenti troverai la soluzione alle diverse domande poste da alcuni problemi tratti dal libro. Ti consigliamo di accedervi solo dopo aver provato a impostare una soluzione.

 ISBN 978-88-08-88003-1

Soluzione

1. Dall'equazione differenziale si ha che $\Delta = b^2 - ac = x^2y^2 \geq 0$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \neq (0,0)$. Nel punto $(0,0)$ l'equazione degenera. Nei casi $(x,0)$ e $(0,y)$, l'equazione è mal definita, in quanto ci sono delle singolarità nei coefficienti. L'equazione è di tipo iperbolico. Ci sono due simmetrie evidenti dell'equazione: è invariante rispetto allo scambio di $x \to y, y \to x$ (che è una simmetria discreta) scegliendo opportunamente i coefficienti $\alpha, \beta, \gamma\delta$ e rispetto alle trasformazioni di scala $x \to \lambda x, y \to \lambda y$ dove $\lambda \neq 0$.

2. Le equazioni caratteristiche sono $y^2\dot{y}^2 - x^2\dot{x}^2 = 0$. Da cui $(y\dot{y} - x\dot{x})(y\dot{y} + x\dot{x}) = 0$, quindi

$$\frac{d}{dt}(x^2+y^2) = 0\,, \qquad \frac{d}{dt}(x^2-y^2) = 0\,. \tag{3.15}$$

Le nuove coordinate sono perciò $\xi = x^2+y^2$ e $\eta = x^2-y^2$. Riscrivendo l'equazione nelle nuove coordinate e usando

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= 2x\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\,,\\
\frac{\partial u}{\partial y} &= 2y\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\,,\\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 2\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) + 4x^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)\,,\\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 2\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) + 4y^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)\,,
\end{aligned} \tag{3.16}$$

è possibile scegliere i coefficienti $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ nel seguente modo: $\alpha = \gamma = 0$ e $\beta = -\delta = -3$, in modo tale che l'equazione possa essere riscritta nella forma

$$(\eta^2 - \xi^2)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + 2\eta\frac{\partial u}{\partial \xi} - 2\xi\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0\,. \tag{3.17}$$

Osservando l'espressione (3.17) si vede che la derivata del coefficiente davanti alla derivata seconda produce i termini con le derivate prime, possiamo riscrivere la (3.17) nella forma

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta}\Big((\eta^2 - \xi^2)u(\xi,\eta)\Big) = 0\,, \tag{3.18}$$

da cui si trova la soluzione generale:

$$u(\xi,\eta) = \frac{1}{\eta^2 - \xi^2}(F(\xi) + G(\eta))\,. \tag{3.19}$$

Le funzioni $F(\xi)$ e $G(\eta)$ sono generiche funzioni.

 ISBN 978-88-08-88003-1

3. Per garantire l'invarianza di scala, è necessario che $F(\xi)$ e $G(\eta)$ siano funzioni omogenee di grado 2 nelle variabili ξ e η. Per esempio $F(\xi) = \xi^2, G(\eta) = \eta^2$.

PROBLEMA 4.A
Sia dato l'integrale

$$I = \int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx\,.$$

1. Calcolare l'integrale usando il cambio di variabile: $t = \sqrt{x^2-1}$.
2. Calcolare l'integrale usando il metodo dei residui.

Nelle pagine seguenti troverai la soluzione alle diverse domande poste da alcuni problemi tratti dal libro. Ti consigliamo di accedervi solo dopo aver provato a impostare una soluzione.

 ISBN 978-88-08-88003-1

Soluzione

1. Usando il cambio di variabili suggerito, si ha

$$x^2 = t^2 + 1\,, \qquad dx = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}dt \tag{4.1}$$

da cui si ottiene facilmente

$$I = \int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}\,. \tag{4.2}$$

Lo stesso risultato lo si può ottenere con il cambio di variabile $x \to 1/x$, si ottiene l'integrale

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\,, \tag{4.3}$$

che si calcola facilmente con l'ulteriore cambio di variabile $x = \cos(\theta)$.

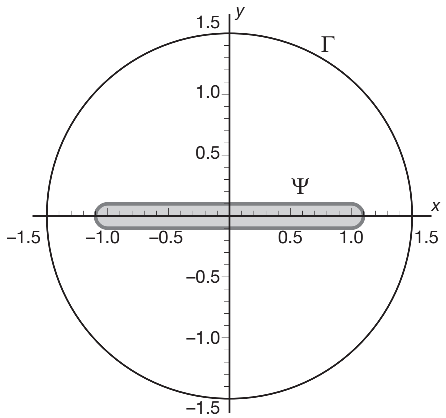

Figura 4.1: *Cammino di integrazione per l'integrale (4.3).*

2. Usiamo il risultato (4.3) per calcolare l'integrale con il metodo dei residui. Come si nota, complessificando l'integrando, si hanno due punti di diramazione per $z = -1$ e $z = 1$. Quindi il cammino di integrazione più appropriato risulta essere quello definito da due curve (concentriche) Γ e Υ che includano i due punti di diramazione. La parte contenuta tra le due curve definisce un dominio di analiticità della funzione, dove quindi si può applicare il teorema di Cauchy e trovare che l'integrale si annulla. Si veda la figura (4.1).

   La curva Γ è percorsa in senso antiorario, mentre la curva Υ è percorsa in senso orario. Durante il calcolo si prende il raggio della curva Γ che tende a ∞ e il raggio dei cerchi (chiamati $C_\varepsilon(-1)$ e $C_\varepsilon(1)$) che compongono la curva Υ in prossimità dell'asse reale. In questo modo la curva Υ approssimerà sempre meglio il segmento dell'asse reale tra -1 e 1. Bisogna ricordare che, percorrendo la curva Υ in senso orario e passando dal cerchio con origine in $z = 1$, si prende una fase di $e^{2\pi i}$ che contribuisce all'integrale, raddoppiandone il valore. L'integrale

$$\int_{\Gamma\bigcup\Upsilon} \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}dz \tag{4.4}$$

   si decompone nei quattro pezzi

$$\int_{\Gamma\bigcup\Upsilon} \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}dz = \int_{C_\varepsilon(-1)} \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}dz \\ +2\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_{C_\varepsilon(1)} \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}dz + \int_{\Gamma} \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}dz. \tag{4.5}$$

   Il primo e il terzo termine tendono a zero nel limite $\varepsilon \to 0$, il secondo termine riproduce il doppio dell'integrale voluto, mentre il quarto termine si calcola osservando che l'integrando asintoticamente non converge, quindi c'è un polo nel

 ISBN 978-88-08-88003-1

punto all'infinito.

Il calcolo del residuo del punto all'infinito è dato da

$$\mathrm{Res}_\infty = \lim_{u\to 0} u \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{1}{u})^2}} \left(-\frac{1}{u^2}\right) = i\,, \tag{4.6}$$

dove l'ultimo fattore $(-1/u^2)$ proviene dalla misura dz passando alla variabile antipodale $z = 1/u$. Combinando i risultati (e ricordando che il residuo del polo all'infinito richiede un segno negativo, in quanto si percorre il cammino in senso orario rispetto al punto all'infinito), si ottiene

$$2\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 2\pi\,, \tag{4.7}$$

da cui il risultato.

PROBLEMA 4.B
Sia dato l'integrale

$$I = \int_0^1 \frac{1}{(x^\alpha(1-x))^{1/3}} dx\,,$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Dire per quali valori di α l'integrale (come integrale improprio o valore principale) esiste.
2. Descrivere la struttura dei tagli, dei punti di diramazione e degli eventuali poli della funzione $f(z)$ ottenuta complessificando l'integrando $x \to z$ e al variare di α.
3. Calcolare l'integrale per $\alpha = 2$ usando la formula dei residui.

Nelle pagine seguenti troverai la soluzione alle diverse domande poste da alcuni problemi tratti dal libro. Ti consigliamo di accedervi solo dopo aver provato a impostare una soluzione.

 ISBN 978-88-08-88003-1

Soluzione

1. L'integrale è definito come integrale improprio nei due estremi del dominio di integrazione. Si ricorda che l'integrando del tipo $x^{-\alpha}$ produce un integrale convergente in $x = 0$ se $\Re(\alpha) < 1$. Quindi nel nostro caso l'integrale converge se $\Re(\alpha) < 3$. L'integrale converge anche nel punto $x = 1$, in quanto la potenza è $1/3$.

2. L'integrale complessificato ha due punti di diramazione a $z = 0$ e a $z = 1$. Per definire la funzione analitica, tagliamo il segmento $[0, 1]$ dal piano complesso. I due punti di diramazione hanno rispettivamente monodromia uguale a 3 e uguale a 3α.

 ISBN 978-88-08-88003-1

3. Per calcolare l'integrale con il metodo dei residui nel caso $\alpha = 2$, conviene riscrivere l'integrando come segue

$$f(z)dz = \frac{1}{z}\left(\frac{z}{(1-z)}\right)^{1/3} dz\,. \tag{4.8}$$

Usiamo la trasformazione conforme $u = z/(1-z)$ per ottenere il nuovo integrando

$$f(z)dz = \frac{1}{u(1+u)}\sqrt[3]{u}du\,. \tag{4.9}$$

Il segmento $[0,1]$ del piano, che definiva il taglio, viene mappato nella semiretta reale e positiva, quindi l'integrale di partenza può essere calcolato sul solito cammino di integrazione tipo "Pacman". L'integrando ha un polo per $z = -1$ e due punti di diramazione in $z = 0$ e nel punto all'infinito.

L'integrale si spezza in 4 parti

$$\begin{aligned}\oint_\gamma \frac{1}{u(1+u)}\sqrt[3]{u}du =& \int_0^\infty \frac{1}{x(1+x)}\sqrt[3]{x}dx + \int_{C_R(0)} \frac{1}{u(1+u)}\sqrt[3]{u}du \\ & - e^{2\pi i/3}\int_0^\infty \frac{1}{x(1+x)}\sqrt[3]{x}dx + \int_{C_\varepsilon(0)} \frac{1}{u(1+u)}\sqrt[3]{u}du\,.\end{aligned} \tag{4.10}$$

Il secondo e il quarto integrale si annullano nel limite $R \to \infty$ e $\varepsilon \to 0$, mentre il primo e il terzo danno

$$(1-e^{2\pi i/3})\int_0^\infty \frac{1}{x(1+x)}\sqrt[3]{x}dx = 2\pi i\left(\lim_{z\to e^{i\pi}} z^{-1}\sqrt[3]{z}\right) = -2\pi i e^{\pi i/3}\,, \tag{4.11}$$

da cui segue

$$I = \int_0^\infty \frac{1}{x(1+x)}\sqrt[3]{x}dx = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\,. \tag{4.12}$$

Si noti che anche l'integrale con α generico è scrivibile in termini della funzione gamma di Eulero nella forma

$$I(\alpha) = \frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\Gamma\left(1-\frac{a}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{3}-\frac{a}{3}\right)} \tag{4.13}$$

e si può verificare che, per $\alpha = 2$, si ha la relazione

$$\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\,. \tag{4.14}$$

PROBLEMA 4.C

La tecnica di integrazione usando le variabili complesse è particolarmente utile nel caso delle serie di Fourier.

1. Dare la definizione di serie di Fourier esponenziale e definire il coefficiente n-esimo della serie di Fourier usando gli integrali di variabile complessa.

2. Calcolare con il metodo dei residui i coefficienti della serie di Fourier della funzione
$$f(\theta) = \arctan\left(\frac{r\sin(\theta)}{1 - r\cos(\theta)}\right),$$
con $r > 0$ e $\theta \in [0, 2\pi]$.

Nelle pagine seguenti troverai la soluzione alle diverse domande poste da alcuni problemi tratti dal libro. Ti consigliamo di accedervi solo dopo aver provato a impostare una soluzione.

 ISBN 978-88-08-88003-1

Soluzione

1. La serie di Fourier per una funzione periodica è definita dalla serie i cui coefficienti sono dati dagli integrali sul periodo 2π

$$f(\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{in\theta}, \qquad a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)e^{-in\theta}d\theta\,. \tag{4.15}$$

L'integrale per a_n può essere facilmente convertito nel calcolo dell'integrale di funzione complessa sul cerchio unitario $|z|^2 = 1$. Si ottiene

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint dz f(\arg z)z^{-n-1} = \sum_{z^*}\left(f(\arg z)z^{-n-1}\big|z=z^*\right)\,, \tag{4.16}$$

dove z^* sono i poli isolati della funzione $f(\arg z)z^{-n-1}$ e $\arg(z)$ è la fase della variabile z che ha lunghezza uguale a uno.

2. Per calcolare quanto proposto nel testo del problema, osserviamo che è conveniente calcolare la derivata rispetto a r dell'integrando e calcolare poi le derivate dei coefficienti di Fourier, piuttosto che calcolare i coefficienti stessi e poi integrare le equazioni ottenute. Quindi si ha

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \arctan\left(\frac{r\sin(\theta)}{1-r\cos(\theta)}\right) e^{-in\theta} d\theta\,, \tag{4.17}$$

da cui

$$\frac{d}{dr}a_n(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\sin(\theta)}{1+r^2-2r\cos(\theta)} e^{-in\theta} d\theta\,. \tag{4.18}$$

In questo modo l'integrale risulta semplificato e si può passare alla variabile complessa ponendo $\cos(\theta) = \frac{1}{2}(z+1/z)$. Si ottiene la formula

$$\frac{d}{dr}a_n(r) = -\frac{1}{4\pi}\oint \frac{z^2-1}{[(1+r^2)z-r(1+z^2)]\, z^{n+2}} dz\,. \tag{4.19}$$

L'integrando ha un polo di ordine $n+2$ in $z=0$ e due poli che coincidono con gli zeri del polinomio

$$P(z) = \left[(1+r^2)z-r(1+z^2)\right]\,. \tag{4.20}$$

Si trova facilmente che essi sono $z=r$ e $z=1/r$. Di conseguenza, siccome $r>0$, possiamo distinguere due casi: $r>1$ e $r<1$. Come si vede in entrambi i casi un polo cade all'interno del cerchio, mentre il secondo è all'esterno. Il caso in cui $r=1$ è più delicato, in quanto cade esattamente sul cammino di integrazione e pertanto bisogna regolarizzare accuratamente l'integrale. Questo caso verrà discusso al termine del calcolo. È conveniente riscrivere l'integrale nel seguente modo

$$\frac{d}{dr}a_n(r) = -\frac{1}{4\pi r}\oint \frac{z^{-n}-z^{-n-2}}{(z-r)\left(z-\frac{1}{r}\right)}\,. \tag{4.21}$$

Quindi dobbiamo effettivamente calcolare integrali del tipo

$$\oint \frac{z^{-p}}{(z-r)\left(z-\frac{1}{r}\right)} = \frac{1}{\left(r-\frac{1}{r}\right)}\oint\left(\frac{z^{-p}}{z-r} - \frac{z^{-p}}{z-1/r}\right) dz\,. \tag{4.22}$$

Per calcolarli, è sufficiente espandere gli integrandi in serie di Taylor e ottenere (dopo un po' di semplice algebra)

$$\frac{d}{dr}a_n(r) = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{r^{p+2}}+r^p\right] - \frac{1}{4r}\mathrm{Res}\left(\frac{z^2-1}{[(1+r^2)z-r(1+z^2)]\, z^{n+2}}\middle| z=z^*\right)\,, \tag{4.23}$$

dove il secondo termine è il residuo calcolato in uno dei due poli $z=r^{\pm}$. Si noti che, se $r<1$, i termini che appaiono nella parentesi quadrata sono i coefficienti che entrano nella serie di Fourier. Quindi il secondo termine ha un comportamento che garantisce la convergenza della serie, mentre il primo termine diverge. Nel caso in

 ISBN 978-88-08-88003-1

cui $r > 1$, i ruoli dei due termini si scambiano. Nel caso in cui $r < 1$, il polo $z = r$ è all'interno del cerchio, mentre nel caso in cui $r > 1$, il polo $z = 1/z$ è all'interno del cerchio. Quindi i rispettivi residui sono

$$\begin{aligned} r < 1\,, &\qquad \mathrm{Res}\left(\frac{z^2-1}{[(1+r^2)z - r(1+z^2)]\,z^{n+2}} \middle| z = r \right) = -\frac{1}{4}\frac{1}{r^{p+2}}\,, \\ r > 1\,, &\qquad \mathrm{Res}\left(\frac{z^2-1}{[(1+r^2)z - r(1+z^2)]\,z^{n+2}} \middle| z = 1/r \right) = -\frac{1}{4}r^p\,. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Si ottiene perciò

$$\begin{aligned} r < 1\,, &\qquad \frac{d}{dr}a_n(r) = \frac{1}{4}r^p\,, \\ r > 1\,, &\qquad \frac{d}{dr}a_n(r) = \frac{1}{4}\frac{1}{r^{p+2}}\,, \end{aligned} \tag{4.25}$$

da cui

$$\begin{aligned} r < 1\,, &\qquad a_n(r) = \frac{1}{4(p+1)}r^{p+1}\,, \\ r > 1\,, &\qquad a_n(r) = \frac{1}{4(p+1)}\frac{1}{r^{p+1}}\,, \end{aligned} \tag{4.26}$$

quindi correttamente i coefficienti hanno un comportamento tale da assicurare la convergenza della serie di Fourier nei due casi $r > 1$ e $r < 1$.

Infine, per studiare il punto $r = 1$, scriviamo l'integrale esplicitamente e usiamo l'integrazione per parti

$$\begin{aligned} a_n(r=1) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \arctan\left(\frac{\sin(\theta)}{1-\cos(\theta)}\right) e^{-in\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \arctan\left(\frac{\sin(\theta)}{1-\cos(\theta)}\right) \frac{i}{n}\frac{d}{d\theta}e^{-in\theta} d\theta \\ &= \frac{i}{2\pi n}\left(\arctan\left(\frac{\sin(\theta)}{1-\cos(\theta)}\right) e^{-in\theta}\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} e^{-in\theta} d\theta \right) \\ &= \frac{i}{4\pi n}\int_0^{2\pi} e^{-in\theta} d\theta\,. \end{aligned} \tag{4.27}$$

Il primo termine si annulla calcolando i limiti $\theta = 0$ e $\theta = 2\pi$. Mentre il secondo termine è nullo per ogni $n \neq 0$, mentre il caso $n = 0$ è divergente, quindi dobbiamo studiare l'integrale usando un altro metodo. Consideriamo

$$a_0(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \arctan\left(\frac{r\sin(\theta)}{1-r\cos(\theta)}\right) d\theta\,. \tag{4.28}$$

Passando nuovamente alla variabile complessa $z = e^{i\theta}$ e integrando sul cerchio

ISBN 978-88-08-88003-1

unitario la funzione olomorfa, si ottiene (di nuovo conviene calcolare la derivata rispetto a r e poi integrare rispetto ad essa)

$$\frac{d}{dr}a_0(r) = \frac{1}{4\pi r}\oint \frac{(z^2-1)}{(z-r)\left(z-\frac{1}{r}\right)z}dz, \tag{4.29}$$

con poli $z=0$ e $z=r$ nel caso in cui $r<1$ e $z=0$ e $z=1/r$ nel caso in cui $r>1$. Calcolando i residui nei due casi, si trova che l'integrale è nullo per ogni valore di r. Quindi possiamo concludere che l'integrale è nullo.