# A Strumenti matematici

SOMMARIO

## Obiettivi d'apprendimento

Lo studio di questo capitolo dovrebbe insegnarvi come:

1. Spiegare la relazione fra funzioni esponenziali e logaritmi naturali.
2. Spiegare e applicare la notazione scientifica.
3. Definire una relazione lineare e confrontarla con una non lineare.
4. Calcolare l'elasticità di una funzione in un punto.
5. Spiegare il concetto di derivata e la sua relazione con la pendenza di una funzione.
6. Calcolare e interpretare la derivata di alcune semplici funzioni.
7. Descrivere la relazione fra una derivata e una derivata parziale.
8. Spiegare il concetto di integrale.

## Parole chiave

| | | |
|---|---|---|
| antilogaritmo | funzione esponenziale | numeri razionali |
| ceteris paribus | funzione quadratica | numeri reali |
| derivata | integrale | pendenza |
| derivata parziale | intercetta | relazione lineare |
| disequazioni | interi | relazione non lineare |
| *e* | logaritmo | serie di Taylor |
| effetto marginale | logaritmo naturale | valore assoluto |
| elasticità | notazione scientifica | variazione percentuale |
| esponenti | numeri irrazionali | variazione relativa |

In questa appendice daremo per scontato che abbiate già una certa familiarità con i principi introduttivi della matematica. Forse avete anche già studiato i concetti di derivata e integrale, anche se questi strumenti *non sono necessari* per superare con successo questo corso. In questa appendice riassumeremo alcuni strumenti fondamentali che potrebbe essere utile consultare di tanto in tanto[1].

## A.1. Alcuni concetti fondamentali

### A.1.1. Numeri

Gli **interi** sono i numeri $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ Gli interi positivi sono i numeri usati per contare. I numeri **razionali** possono essere espressi come $a/b$, dove $a$ e $b$ sono interi e $b \neq 0$. I **numeri reali** possono essere rappresentati come punti su una linea. I numeri reali sono non numerabili e non sono solo razionali. Numeri come $\pi \approx 3{,}1415927$ e $\sqrt{2}$ sono detti **irrazionali** perché non possono essere espressi come rapporti e ammettono solo una rappresentazione decimale. Numeri come $\sqrt{-2}$ non sono reali. Il **valore assoluto** di un numero è indicato con $|a|$. Esso corrisponde alla parte positiva del numero considerato: $|3| = 3$ e $|-3| = 3$.

Le **disequazioni** fra numeri obbediscono ad alcune regole. La notazione $a < b$, $a$ minore di $b$, significa che sulla retta dei numeri reali $a$ si trova a sinistra di $b$ e che $b - a > 0$. Se $a$ è minore o uguale a $b$ scriveremo $a \leq b$. Ecco tre regole di base

[1] I simboli e le operazioni di sommatoria sono trattati nel Piccolo manuale di probabilità che precede il capitolo 2.

sulle disequazioni:

$$\text{Se } a < b, \text{ allora } a + c < b + c$$

$$\text{Se } a < b, \text{ allora } \begin{cases} ac < bc \text{ se } c > 0 \\ ac > bc \text{ se } c < 0 \end{cases}$$

$$\text{Se } a < b \text{ e } b < c, \text{ allora } a < c$$

### A.1.2. Potenze

Le **potenze** sono definite nel modo seguente:

$x^n = xx \cdots x$ (prodotto di $n$ termini) se $n$ è un intero positivo

$x^0 = 1$ se $x \neq 0$ [$0^0$ non ha significato ed è considerato "indefinito"]

Supponiamo che $x$ e $y$ siano numeri reali, $m$ e $n$ interi e $a$ e $b$ razionali. Ecco alcune regole utili per lavorare con le potenze.

$x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$ se $x \neq 0$. Per esempio, $x^{-1} = \dfrac{1}{x}$.

$x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$. Per esempio, $x^{1/2} = \sqrt{x}$ e $x^{-1/2} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

$x^{m/n} = (x^{1/n})^m$. Per esempio, $8^{4/3} = (8^{1/3})^4 = 2^4 = 16$.

$$x^a x^b = x^{a+b} \qquad \frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^a = \frac{x^a}{y^a} \qquad (xy)^a = x^a y^a$$

### A.1.3. Notazione scientifica

La notazione scientifica può essere utile per rappresentare numeri molto grandi o molto piccoli. In notazione scientifica un certo valore viene espresso con un numero compreso fra 1 e 10 moltiplicato per una potenza di 10. Per esempio: $5{,}1\times10^5 = 510\,000$ e $0{,}00000034 = 3{,}4\times10^{-7}$. La notazione scientifica semplifica in maniera significativa la manipolazione di numeri molto grandi perché operazioni complesse possono essere scomposte in altre più semplici. Per esempio:

$$\begin{aligned} 510\,000 \times 0{,}00000034 &= (5{,}1 \times 10^5) \times (3{,}4 \times 10^{-7}) \\ &= (5{,}1 \times 3{,}4) \times (10^5 \times 10^{-7}) \\ &= 17{,}34 \times 10^{-2} \\ &= 0{,}1734 \end{aligned}$$

e

$$\frac{510\,000}{0{,}00000034} = \frac{5{,}1 \times 10^5}{3{,}4 \times 10^{-7}} = \frac{5{,}1}{3{,}4} \times \frac{10^5}{10^{-7}} = 1{,}5 \times 10^{12}$$

I software econometrici indicano talvolta $5{,}1\times10^5$ con 5.1E5 o 5.1D5 e $3{,}4\times10^{-7}$ con 3.4E-7 o 3.4D-7.

### A.1.4. Logaritmi e numero $e$

I logaritmi sono potenze. Se $x = 10^b$, $b$ è il logaritmo di $x$ in base 10. Il numero irrazionale $e \approx 2,718282$ viene spesso usato in matematica e statistica come base dei logaritmi. Se $x = e^b$, $b$ è il logaritmo di $x$ in base $e$. I logaritmi che usano il numero $e$ come base sono chiamati **logaritmi naturali**. *Tutti i logaritmi in questo testo sono logaritmi naturali.* Il logaritmo naturale di $x$ è indicato con $\log(x)$:

$$\log(x) = \log(e^b) = b$$

Si noti che $\log(1) = 0$ per le proprietà delle potenze. La tabella A.1 illustra i logaritmi di alcune potenze di 10.

**Tabella A.1**
Alcuni logaritmi naturali

| $x$ | $\log(x)$ |
|---|---|
| 1 | 0 |
| 10 | 2,3025851 |
| 100 | 4,6051702 |
| 1000 | 6,9077553 |
| 10 000 | 9,2103404 |
| 100 000 | 11,512925 |
| 1 000 000 | 13,815511 |

Si osservi che i logaritmi variano su un intervallo ridotto rispetto a quello dei numeri originari. Essendo potenze, i logaritmi hanno proprietà simili a quelle di queste ultime:

$$\begin{aligned}\log(xy) &= \log(x) + \log(y)\\ \log(x/y) &= \log(x) - \log(y)\\ \log(x^a) &= a\log(x)\end{aligned}$$

Se per esempio $x = 1000$ e $y = 10\,000$:

$$\begin{aligned}\log(1000 \times 10\,000) &= \log(1000) + \log(10\,000)\\ &= 6{,}9077553 + 9{,}2103404\\ &= 16{,}118096\end{aligned}$$

Quale vantaggio offrono queste proprietà? Il calcolo di $xy$ richiede una moltiplicazione, ma con i logaritmi è necessaria solo un'addizione. Per sfruttare questo stratagemma ci serve uno strumento per risalire dal logaritmo di un numero al numero stesso. Per definizione:

$$x = e^{\log(x)} = \exp[\log(x)]$$

Quando la **funzione esponenziale** è applicata a un esponente complicato viene spesso usata la notazione exp: $e^{(\cdot)} = \exp(\cdot)$. La funzione esponenziale è chiamata **antilogaritmo**, perché usandola possiamo ricostruire il valore di $x$. In questo caso:

$$1000 \times 10\,000 = \exp(16{,}118096) = 10\,000\,000$$

Non vi capiterà spesso di fare calcoli di questo tipo, ma la conoscenza dei logaritmi e delle potenze è assolutamente cruciale in economia ed econometria.

### A.1.5. Decimali e percentuali

Supponiamo che il valore di una variabile $y$ passi da $y = y_0$ a $y = y_1$. La differenza fra questi valori è spesso indicata con $\Delta y = y_1 - y_0$, dove il simbolo $\Delta y$ si legge "variazione di $y$" o "delta-$y$". La **variazione relativa di** $y$ è data da:

$$\text{variazione relativa di } y = \frac{y_1 - y_0}{y_0} = \frac{\Delta y}{y_0} \qquad \text{(A.1)}$$

Per esempio, se $y_0 = 3$ e $y_1 = 3{,}02$, la variazione relativa di $y$ è data da:

$$\frac{y_1 - y_0}{y_0} = \frac{3{,}02 - 3}{3} = 0{,}0067$$

Spesso la variazione relativa di $y$ è indicata con $\Delta y/y$, omettendo l'eventuale indice.

Una variazione relativa è un numero decimale. La **variazione percentuale** di $y$ è pari a 100 volte la variazione relativa:

$$\text{variazione percentuale di } y = 100\,\frac{y_1 - y_0}{y_0} = \%\Delta y \tag{A.2}$$

Se $y_0 = 3$ e $y_1 = 3{,}02$, la variazione percentuale di $y$ è data da:

$$\%\Delta y = 100\,\frac{y_1 - y_0}{y_0} = 100\,\frac{3{,}02 - 3}{3} = 0{,}67\%$$

### A.1.6. Logaritmi e percentuali

Una caratteristica dei logaritmi che ne semplifica enormemente l'interpretazione economica è che essi possono essere approssimati in maniera molto semplice. Sia $y_1$ un valore positivo di $y$ e $y_0$ un altro valore "vicino" a $y_1$. Una regola di approssimazione molto utile è data da:

$$100[\log(y_1) - \log(y_0)] \approx \%\Delta y = \text{variazione percentuale di } y \tag{A.3}$$

In altre parole, se $y_1$ e $y_0$ sono vicini fra loro, 100 volte la differenza dei logaritmi equivale approssimativamente alla differenza percentuale fra i due valori.

#### A.1.6.a. Derivazione dell'approssimazione

Il risultato (A.3) deriva da uno strumento matematico chiamato approssimazione in serie di Taylor, sviluppato nell'esempio A.3 del paragrafo A.3.1. Usando questa approssimazione il valore di $\log(y_1)$ può essere scritto come:

$$\log(y_1) \approx \log(y_0) + \frac{1}{y_0}\,(y_1 - y_0) \tag{A.4}$$

Per esempio, supponiamo che $y_1 = 1 + x$ e $y_0 = 1$. Se $x$ è piccolo:

$$\log(1 + x) \approx x$$

Sottraendo $\log(y_0)$ da entrambi i lati della (A.4), otteniamo:

$$\log(y_1) - \log(y_0) = \Delta\log(y) \approx \frac{1}{y_0}\,(y_1 - y_0) = \text{variazione relativa di } y$$

Il simbolo $\Delta\log(y)$ rappresenta la "differenza" fra i due logaritmi. Usando la (A.2):

$$\begin{aligned} 100\Delta\log(y) &= 100[\log(y_1) - \log(y_0)] \\ &\approx 100 \times \frac{(y_1 - y_0)}{y_0} \\ &= \%\Delta y = \text{variazione percentuale di } y \end{aligned}$$

#### A.1.6.b. Errore di approssimazione

L'approssimazione (A.3) è precisa per valori di $y_1$ e $y_0$ vicini fra loro. Per esempio, supponiamo che $y_0 = 1$. La differenza percentuale fra $y_1$ e $y_0$ è data da:

$$\%\Delta y = 100 \times \frac{(y_1 - y_0)}{y_0} = 100(y_1 - 1)$$

La quantità che stiamo approssimando è $100\Delta\log(y) = 100[\log(y_1) - \log(1)] = 100 \times \log(y_1)$, dato che $\log(1) = 0$. L'errore percentuale di questa approssimazione è:

$$\text{errore percentuale di approssimazione} = 100\left[\frac{\%\Delta y - 100\Delta\log(y)}{100\Delta\log(y)}\right]$$
$$= 100\left[\frac{(y_1 - 1) - \log(y_1)}{\log(y_1)}\right]$$

La tabella A.2 illustra alcuni valori dell'errore di approssimazione.

Tabella A.2
Errori di approssimazione della differenza di logaritmi

| $y_1$ | $\%\Delta y$ | $100\Delta\log(y)$ | Errore percentuale di approssimazione |
|---|---|---|---|
| 1,01 | 1,00 | 0,995 | 0,50 |
| 1,05 | 5,00 | 4,88 | 2,48 |
| 1,10 | 10,00 | 9,53 | 4,92 |
| 1,15 | 15,00 | 13,98 | 7,33 |
| 1,20 | 20,00 | 18,23 | 9,70 |
| 1,25 | 25,00 | 22,31 | 12,04 |

Come potete notare, se $y_1$ e $y_0$ differiscono del 10% l'errore di approssimazione è del 4,92%. Se $y_1$ e $y_0$ differiscono del 20%, l'errore di approssimazione è del 9,7%.

## A.2. Relazioni lineari

In economia e in econometria si studiano relazioni lineari e non lineari fra variabili. In questo paragrafo ricordiamo alcune caratteristiche essenziali delle relazioni lineari. Supponiamo che $y$ e $x$ siano due variabili. L'espressione standard di una relazione lineare è:

$$y = mx + b \tag{A.5}$$

Nella figura A.1 $m$ corrisponde alla pendenza e $b$ all'intercetta sull'asse delle $y$. Il simbolo $\Delta$ rappresenta una "variazione di". Di conseguenza, $\Delta x$ si legge "variazione di $x$". La pendenza della retta è data da:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Per la relazione lineare rappresentata nella figura A.1, la pendenza $m$ misura il rapporto fra la variazione dell'ordinata (di quanto sale) e la variazione dell'ascissa

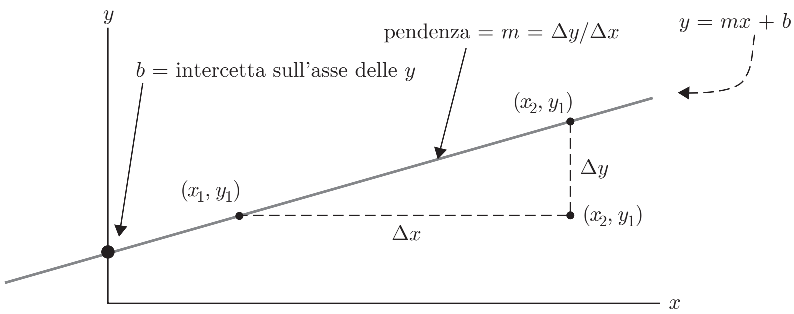


Figura A.1
Una relazione lineare.

(di quanto si sposta in orizzontale) di un punto quando quest'ultimo si sposta lungo la retta in una direzione qualsiasi. La pendenza della retta è costante; il tasso al quale $y$ varia al variare di $x$ è costante lungo tutta la retta.

La pendenza $m$ è una quantità di grande interesse per gli economisti in quanto rappresenta l'**effetto marginale** sulla $y$ di una variazione della $x$. Per verificare questa affermazione, risolvete la definizione della pendenza $m = \Delta y/\Delta x$ rispetto a $\Delta y$, ottenendo:

$$\Delta y = m\Delta x \tag{A.6}$$

Se $x$ cambia di un'unità, $\Delta x = 1$ e la corrispondente variazione di $y$ sarà $\Delta y = m$. L'effetto marginale $m$ è sempre lo stesso per una relazione lineare come la (A.5), perché la pendenza è costante.

Il parametro di **intercetta** indica in quale punto la relazione lineare interseca l'asse verticale – in altre parole, rappresenta il valore di $y$ quando $x$ è nulla:

$$y = mx + b = m \times 0 + b = b$$

### A.2.1. Pendenze e derivate

In econometria le derivate hanno un ruolo importante. Nella relazione fra due variabili, $y = f(x)$, la **derivata prima** misura la pendenza. La pendenza della linea $y = f(x) = mx + b$ è indicata con $dy/dx$. La notazione $dy/dx$ è una versione "astratta" di $\Delta y/\Delta x$ e nel caso della relazione lineare (A.5) la derivata prima è data da:

$$\frac{dy}{dx} = m \tag{A.7}$$

In generale la derivata prima misura la variazione del valore $y$ della funzione a fronte di una variazione infinitesimale in $x$. Per la funzione lineare, la derivata prima è data dalla costante $m = \Delta y/\Delta x$. In questo caso il termine "infinitesimale" non ha alcuna importanza, dato che il tasso di variazione di $y$ a fronte di una variazione in $x$ è costante.

### A.2.2. Elasticità

Uno degli strumenti preferiti dagli economisti è l'**elasticità**, definita come la variazione percentuale di una variabile a fronte di una variazione dell'1% in un'altra variabile spostandosi lungo una particolare curva. In altre parole, se ci muoviamo da un punto su una curva a un altro punto sulla stessa curva, qual è il rapporto fra le variazioni percentuali delle due coordinate? Nella figura A.1, per esempio, qual è il rapporto fra la variazione percentuale di $y$ e quella di $x$ quando ci spostiamo dal punto $(x_1, y_1)$ a quello $(x_2, y_2)$? Nel caso di una relazione lineare l'elasticità di $y$ rispetto a una variazione in $x$ è data da:

$$\varepsilon_{yx} = \frac{\%\Delta y}{\%\Delta x} = \frac{100(\Delta y/y)}{100(\Delta x/x)} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \times \frac{x}{y} = \text{pendenza} \times \frac{x}{y} \tag{A.8}$$

È immediato verificare che l'elasticità è il prodotto fra la pendenza della relazione e il rapporto fra il valore di $x$ e quello di $y$. In una relazione lineare come quella nella figura A.1 la pendenza è costante, $m = \Delta y/\Delta x$, ma ciò nonostante l'elasticità varia in ciascun punto della retta.

Consideriamo per esempio la funzione lineare $y = 1x + 1$. Al punto $x = 2$ e $y = 3$, che appartiene alla retta, l'elasticità è data da $\varepsilon_{yx} = m(x/y) = 1 \times (2/3) = 0{,}67$. In altre parole, nel punto $(x = 2, y = 3)$ a una variazione dell'1% di $x$ corrisponde una variazione dello 0,67% di $y$. In particolare, per $x = 2$ una variazione dell'1% (si noti che l'1% equivale allo 0,01 in forma decimale) di $x$ è pari a $\Delta x = 0{,}01 \times 2 = 0{,}02$. Se $x$ aumenta a $x = 2{,}02$, il valore di $y$ cresce a 3,02. La **variazione relativa** di $y$ è data da $\Delta y/y = 0{,}02/3 = 0{,}0067$. Questo valore corrisponde alla rappresentazione in forma decimale della variazione percentuale di $y$. Per ottenere la variazione percentuale, che indichiamo con $\%\Delta y$, moltiplichiamo la variazione relativa $\Delta y/y$ per 100. La **variazione percentuale** di $y$ è data da:

$$\%\Delta y = 100 \times (\Delta y/y) = 100 \times 0{,}02/3 = 100 \times 0{,}0067 = 0{,}67\%$$

## A.3. Relazioni non lineari

Le relazioni lineari sono intuitive e facili da utilizzare, ma molte relazioni economiche presenti nel mondo reale sono non lineari, come quella illustrata nella figura A.2.

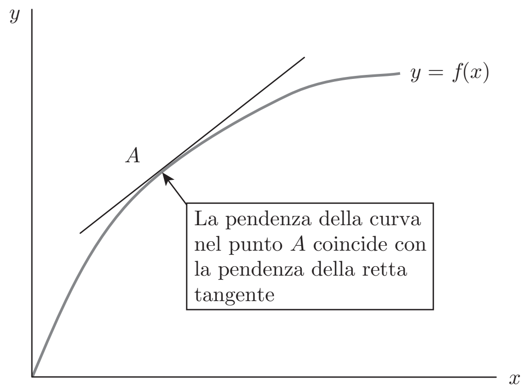


**Figura A.2**
Una relazione non lineare.

La pendenza di questa curva non è costante. La pendenza misura l'effetto marginale di $x$ su $y$ e per una relazione non lineare come quella nella figura A.2 la pendenza è diversa in ogni punto della curva. La variazione della pendenza è una caratteristica delle relazioni non lineari e il fatto che essa cambi da un punto all'altro della curva ci costringe a concentrarci esclusivamente sull'effetto di piccole variazioni di $x$ su $y$; nella (A.6) sostituiamo $\Delta$, il simbolo che indica la "variazione di", con $d$, che interpreteremo come la "variazione infinitesimale di". Nel caso lineare questa sostituzione non ha alcun effetto, dato che la pendenza è data da $dy/dx = m$, con $m$ costante. Si veda la (A.7).

Con funzioni non lineari come quella nella figura A.2, tuttavia, la pendenza (derivata) non è costante ma cambia al variare di $x$ e deve essere calcolata in ciascun punto. Più precisamente, la pendenza di una curva coincide con la pendenza della **tangente** alla curva in un punto specifico. Per calcolare la pendenza in corrispondenza di più punti lungo una curva non lineare abbiamo bisogno di qualche regola che ci consenta di calcolare la derivata $dy/dx$.

### A.3.1. Regole di derivazione

Ecco un elenco delle principali regole utilizzate per calcolare una derivata.

**Regola di derivazione 1.** La derivata di una costante $c$ è zero. In altre parole, se $y = f(x) = c$:

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

**Regola di derivazione 2.** Se $y = x^n$:

$$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$$

**Regola di derivazione 3.** Se $y = cu$ e $u = f(x)$:

$$\frac{dy}{dx} = c\,\frac{du}{dx}$$

Prima di calcolare la derivata di una funzione possiamo isolare eventuali costanti moltiplicative.

**Regola di derivazione 4.** Se $y = cx^n$ e usando le regole 2 e 3:

$$\frac{dy}{dx} = cnx^{n-1}$$

**Regola di derivazione 5.** Se $y = u + v$, dove $u = f(x)$ e $v = g(x)$ sono funzioni di $x$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

La derivata della somma (o della differenza) di due funzioni è la somma delle derivate. Questa regola può essere estesa anche al caso di una somma di più di due termini.

**Regola di derivazione 6.** Se $y = uv$, dove $u = f(x)$ e $v = g(x)$ sono funzioni di $x$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}\,v + u\,\frac{dv}{dx}$$

Questa espressione definisce la regola di derivazione del prodotto di due funzioni. La regola di derivazione del rapporto di funzioni $y = u/v$ può essere ottenuta sostituendo $v^{-1}$ a $v$ nella regola di derivazione del prodotto.

**Regola di derivazione 7.** Se $y = e^x$:

$$\frac{dy}{dx} = e^x$$

Se $y = \exp(ax + b)$:

$$\frac{dy}{dx} = \exp(ax + b) \times a$$

In generale la derivata della funzione esponenziale è pari al prodotto della funzione esponenziale e della derivata dell'esponente.

**Regola di derivazione 8.** Se $y = \log(y)$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \qquad x > 0$$

Se $y = \log(ax + b)$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{ax+b} \times a$$

**Regola di derivazione 9 (Derivata di una funzione di funzione).**
Se $y = f[u(x)]$, cioè se $y$ dipende da $u$ che a sua volta dipende da $x$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

Nella Regola di derivazione 8, per esempio, $y = \log(ax + b)$ oppure $y = \log[u(x)]$ con $u = ax + b$. In questo caso:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = \frac{1}{u} \times a = \frac{1}{ax+b} \times a$$

**Esempio A.1**
La derivata di $y = f(x) = 4x + 1$ è:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(4x)}{dx} + \frac{d(1)}{dx} = 4$$

Dato che questa funzione è l'equazione di una retta, $y = mx + b$, la sua pendenza è costante e coincide con il coefficiente di $x$, che in questo caso è 4.

**Esempio A.2**
Consideriamo la funzione $y = x^2 - 8x + 16$, illustrata nella figura A.3. Questa funzione quadratica è l'equazione di una parabola. Usando le regole di derivazione,

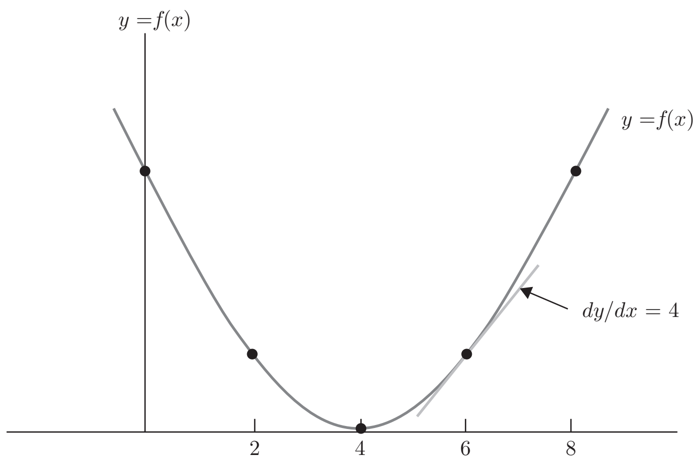


Figura A.3
La funzione
$y = x^2 - 8x + 16$.

la pendenza della retta tangente alla curva è data da:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d(x^2 - 8x + 16)}{dx} \\ &= \frac{d(x^2)}{dx} - 8\,\frac{d(x^1)}{dx} + \frac{d(16)}{dx} \\ &= 2x^1 - 8x^0 + 0 \\ &= 2x - 8\end{aligned}$$

Questo risultato significa che la pendenza della retta tangente a questa curva è $dy/dx = 2x - 8$. La derivata e i valori della funzione in corrispondenza di diversi valori di $x$ sono riportati nella tabella A.3.

**Tabella A.3** Valori della funzione $y = x^2 - 8x + 16$ e della sua derivata

| $x$ | $y = f(x)$ | $dy/dx$ |
|---|---|---|
| 0 | 16 | −8 |
| 2 | 4 | −4 |
| 4 | 0 | 0 |
| 6 | 4 | 4 |
| 8 | 16 | 8 |

È importante osservare alcune caratteristiche di questa derivata. Primo, la pendenza è diversa per ciascun valore di $x$. La pendenza è negativa per valori di $x$ minori di 4, è nulla per $x = 4$ e positiva per $x > 4$. Per interpretare questa pendenza si ricordi che la derivata di una funzione in un punto è la pendenza della sua tangente in quel punto. La pendenza della tangente rappresenta il **tasso di variazione** della funzione – di quanto cambia $y = f(x)$ al variare di $x$. Per $x = 0$ la derivata è $-8$, il che indica che al crescere di $x$ diminuisce $y$ e che il tasso di variazione è pari a 8 unità di $y$ per ogni unità di $x$. Per $x = 2$ il tasso di variazione della funzione è diminuito e per $x = 4$ è dato da $dy/dx = 0$. In altre parole, per $x = 4$ la pendenza della tangente alla curva è nulla. Per valori di $x$ maggiori di 4 la derivata è positiva, il che indica che la funzione $y = f(x)$ aumenta al crescere di $x$.

**Esempio A.3**

L'approssimazione del logaritmo descritta dalla (A.4) usa uno strumento molto potente chiamato approssimazione in serie di Taylor. Nel caso della funzione $f(y) = \log(y)$ questa approssimazione è illustrata dalla figura A.4. Supponiamo di conoscere il punto $A$ sulla funzione: per $y = y_0$, sappiamo che il valore della funzione è $f(y_0)$. L'idea alla base dell'approssimazione consiste nel tracciare una retta tangente alla curva $f(y) = \log(y)$ in $A$ e successivamente approssimare il punto sulla curva $f(y_1) = \log(y_1)$ con il punto $B$ sulla retta tangente. Nel caso di una curva regolare come $\log(y)$ questa strategia funziona decisamente bene e l'errore di approssimazione sarà piccolo se $y_1$ è prossimo a $y_0$. La pendenza della retta tangente nel punto $A$, $[y_0, f(y_0) = \log(y_0)]$, è la derivata della funzione $f(y) = \log(y)$ valutata in $y_0$. Usando la Regola di derivazione 8, otteniamo:

$$\left.\frac{d\log(y)}{dy}\right|_{y=y_0} = \left.\frac{1}{y}\right|_{y=y_0} = \frac{1}{y_0}$$

Il valore dell'approssimazione lineare nel punto $B$ può essere calcolato con un semplice ragionamento geometrico. Si ricordi che la pendenza della retta tangente rappresenta il rapporto fra lo spostamento verticale e quello orizzontale. Lo spostamento orizzontale è quello da $A$ a $C$, $(y_1 - y_0)$, e quello verticale è da $C$ a $B$. Di conseguenza:

$$\text{pendenza della tangente} = \left.\frac{d\log(y)}{dy}\right|_{y=y_0} = \frac{\text{spost. verticale}}{\text{spost. orizzontale}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{AC}} = \frac{B - \log(y_0)}{y_1 - y_0}$$

Risolvendo questa equazione rispetto a $B$, il valore approssimato di $f(y_1)$, otteniamo l'espressione in (A.4):

$$B = \log(y_0) + \left.\frac{d\log(y)}{dy}\right|_{y=y_0} (y_1 - y_0) = \log(y_0) + \frac{1}{y_0}(y_1 - y_0)$$

L'approssimazione in serie di Taylor viene utilizzata in molti contesti.

**Regola di derivazione 10.** Se $f(x)$ è una funzione regolare:

$$f(x) \approx f(a) + \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=a} (x - a) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

dove $f'(a)$ è la notazione normalmente utilizzata per indicare la derivata prima della funzione $f(x)$ valutata nel punto $x = a$. L'approssimazione di Taylor è buona per $x$ vicini ad $a$.

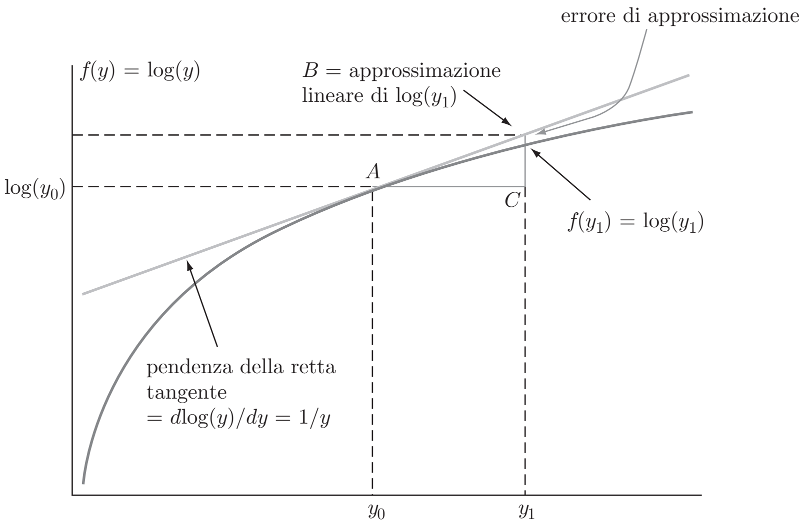


Figura A.4
Approssimazione in serie di Taylor di $\log(y)$.

### A.3.2. Elasticità di una relazione non lineare

Data la pendenza di una curva, l'elasticità di $y$ rispetto a variazioni di $x$ è data da una versione leggermente modificata della (A.8):

$$\varepsilon_{yx} = \frac{dy/y}{dx/x} = \frac{dy}{dx} \times \frac{x}{y} = \text{pendenza} \times \frac{x}{y}$$

Per esempio, la funzione quadratica $y = ax^2 + bx + c$ è una parabola. La pendenza (derivata) è $dy/dx = 2ax + b$. L'elasticità è:

$$\varepsilon_{yx} = \text{pendenza} \times \frac{x}{y} = (2ax + b)\,\frac{x}{y}$$

Come esempio numerico consideriamo la curva definita da $y = f(x) = x^2 - 8x + 16$; il grafico di questa funzione quadratica è illustrato nella figura A.3. La pendenza della curva è $dy/dx = 2x - 8$. Se $x = 6$, la pendenza della retta tangente è

$dy/dx = 4$; allo stesso punto, il valore della funzione è $y = 4$. Di conseguenza l'elasticità in quel punto è:

$$\varepsilon_{yx} = (dy/dx) \times (x/y) = (2x - 8)(x/y) = 4(6/4) = 6$$

A un aumento dell'1% di $x$ corrisponde una variazione del 6% di $y$.

### A.3.3. Derivate parziali

Quando una relazione funzionale include diverse variabili, come per esempio $y = f(x, z)$, la pendenza dipende dai valori di $x$ e $z$ e può essere calcolata in due direzioni, anziché in una. Nella figura A.5 abbiamo illustrato la derivata parziale della funzione rispetto a $x$, mantenendo $z$ costante al valore $z = z_0$.

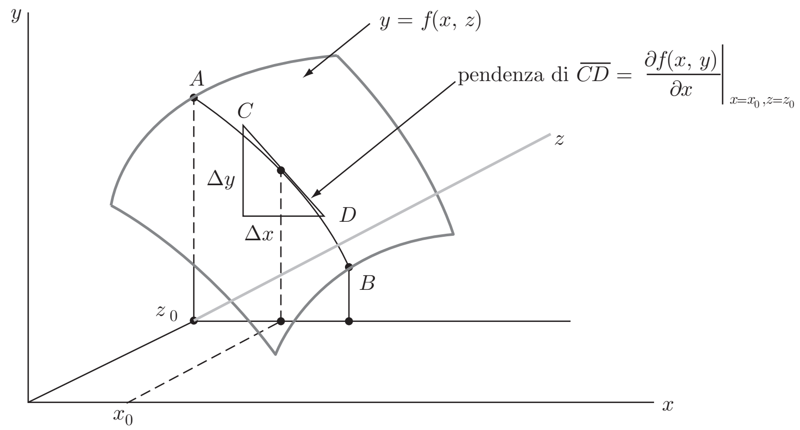


**Figura A.5**
Grafico a tre dimensioni di una derivata parziale.

Nel punto $(x_0, z_0)$ il valore della funzione è $y_0 = f(x_0, z_0)$. La pendenza della retta tangente $\overline{CD}$ è data dalla derivata parziale:

$$\text{pendenza di } \overline{CD} = \left.\frac{\partial f(x, z)}{\partial x}\right|_{x=x_0, z=z_0}$$

La barra verticale indica che la funzione della derivata parziale è valutata nel punto $(x_0, z_0)$.

Per calcolare una derivata parziale usiamo le regole che abbiamo già enunciato. Consideriamo la funzione:

$$y = f(x, z) = ax^2 + bx + cz + d$$

Per calcolare la derivata parziale di $y$ rispetto a $x$ trattiamo $z$ come una costante. Di conseguenza:

$$\begin{aligned}\frac{\partial y}{\partial x} &= \frac{d(ax^2)}{dx} + \frac{d(bx)}{dx} + \frac{d(cz)}{dx} + \frac{d(d)}{dx} \\ &= 2ax + b\end{aligned}$$

Per la Regola di derivazione 1 il terzo e il quarto termine hanno derivata nulla, dato che $cz$ e $d$ sono considerati costanti.

### A.3.4. Derivate: cenni teorici[2]

Molte regole di derivazione possono essere ricavate come risultato del calcolo di un limite. Consideriamo la curva $y = f(x)$ illustrata nella figura A.6.

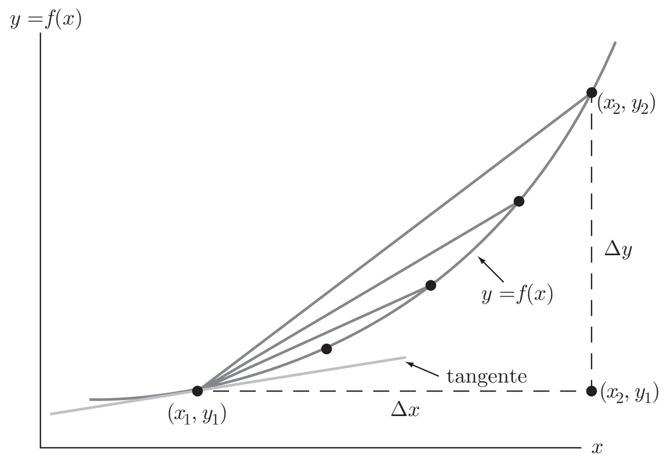


**Figura A.6**
Pendenza di una curva.

Consideriamo due punti sulla curva: $(x_1, y_1)$ e $(x_2, y_2)$. La pendenza del segmento di retta che congiunge $(x_1, y_1)$ e $(x_2, y_2)$ è data da:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \tag{A.9}$$

Supponiamo che $(x_1, y_1)$ rimanga fisso e di far scivolare il punto $(x_2, y_2)$ lungo la curva verso $(x_1, y_1)$. La pendenza del segmento cambierà da un punto all'altro lungo questo spostamento. Per una curva liscia come quella che abbiamo illustrato, a mano a mano che $(x_2, y_2)$ si avvicina a $(x_1, y_1)$ la pendenza del segmento che li congiunge diminuisce, avvicinandosi a un valore limite chiamato **pendenza della tangente** nel punto $(x_1, y_1)$, o pendenza della curva in $(x_1, y_1)$.

La pendenza della curva $f(x)$ è la **derivata** della funzione $f(x)$ rispetto a $x$ nel punto $(x_1, y_1)$. Da un punto di vista algebrico la derivata prima è definita come:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{A.10}$$

La notazione $dy/dx$ può essere considerata come una versione astratta di $\Delta y/\Delta x$ valida nel caso di variazioni infinitesimali di $x$.

Per calcolare la derivata usando la (A.10) è conveniente indicare il punto fisso con $(x_1, y_1) = (x, y)$ e quello in movimento con $(x_2, y_2) = (x + \Delta x, y + \Delta y)$. La derivata di $f(x)$ in $(x, y)$ può allora essere ricavata come:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y_2 - y_1}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \end{aligned} \tag{A.11}$$

[2] Questo paragrafo contiene materiale di livello avanzato.

La derivata $dy/dx$ è una funzione di $x$. Per calcolare la pendenza di una funzione in alcuni punti è necessario valutare la derivata in corrispondenza di questi ultimi.

**Esempio A.4**
Consideriamo la funzione $y = f(x) = 4x + 1$. La pendenza di questa funzione è:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4(x+\Delta x) + 1 - (4x+1)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 4 = 4\end{aligned}$$

La pendenza della retta $y = f(x) = 4x + 1$ è $dy/dx = 4$. Il tasso di variazione della funzione è costante, trattandosi di una retta. Per un aumento unitario di $x$ il valore di $y$ cresce di quattro unità. Per una retta $y = f(x) = mx + b$ di pendenza $m$, la derivata è $dy/dx = m$.

**Esempio A.5**
La funzione quadratica $y = f(x) = x^2 - 8x + 16$ è illustrata nella figura A.3. Applicando la formula della derivata descritta dalla (A.11), otteniamo:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[(x+\Delta x)^2 - 8(x+\Delta x) + 16 - (x^2 - 8x + 16)\right]}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[x^2 + 2x\,(\Delta x) + (\Delta x)^2 - 8x - 8\Delta x + 16 - x^2 + 8x - 16\right]}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\,(\Delta x) + (\Delta x)^2 - 8\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x - 8) = 2x - 8\end{aligned}$$

Questo risultato coincide con quello ottenuto nell'esempio A.2 applicando le regole di derivazione.

## A.4. Integrali

Un integrale è un'"antiderivata". Se $f(x)$ è una funzione, possiamo chiederci: qual è la funzione $F(x)$ che ha per derivata $f(x)$? La risposta è data dall'**integrale indefinito**:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

La funzione $F(x) + C$, dove $C$ è una costante chiamata **costante di integrazione**, è un'antiderivata di $f(x)$, dato che:

$$\frac{d[F(x)+C]}{dx} = \frac{d[F(x)]}{dx} + \frac{dC}{dx} = f(x)$$

Per calcolare $F(x)$ dobbiamo applicare al contrario le regole di derivazione. Per esempio, usando le regole di derivazione:

$$\frac{d(x^n + C)}{dx} = nx^{n-1}$$

Di conseguenza, $\int nx^{n-1}dx = x^n + C = F(x) + C$ e in questo caso $F(x) = x^n$. Molti integrali indefiniti sono ben noti e riportati in apposite tabelle nei libri di testo di analisi matematica, nonché in numerosi siti web.

Ecco due importanti proprietà degli integrali:

**Regola di integrazione 1.**

$$\int [f(x) + g(x)]\, dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

L'integrale di una somma è la somma degli integrali.

**Regola di integrazione 2.**

$$\int c\, f(x)dx = c \int f(x)dx$$

Le costanti possono essere portate fuori dall'integrale.

Queste regole possono essere combinate in una sola:

**Regola di integrazione 3.**

$$\int [c_1 f(x) + c_2 g(x)]\, dx = c_1 \int f(x)dx + c_2 \int g(x)dx$$

Inoltre:

**Regola di integrazione 4 (integrale di una potenza).**

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}\, x^{n+1} + C, \quad \text{dove } n \neq -1$$

### A.4.1. Calcolo dell'area sotto una curva

Un uso importante degli integrali in econometria e statistica riguarda il calcolo di aree al di sotto di una curva. Nella figura A.7, per esempio, a quanto ammonta l'area ombreggiata sotto la curva $f(x)$?

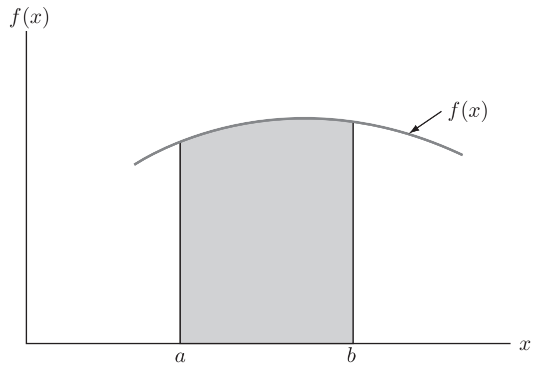


**Figura A.7**
Area sotto una curva.

L'area fra una curva $f(x)$ e l'asse orizzontale compresa fra i due estremi $a$ e $b$ è data dall'**integrale definito**:

$$\int_a^b f(x)dx$$

Il valore di questo integrale è fornito dal **teorema fondamentale del calcolo integrale**, secondo il quale:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

**Esempio A.6**
Consideriamo la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{A.12}$$

Questa equazione descrive il segmento di retta passante per l'origine illustrato nella figura A.8.

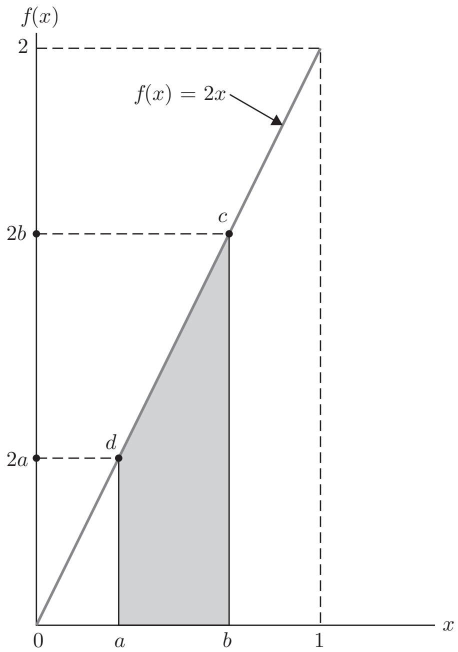


**Figura A.8**
Area sotto la curva $f(x) = 2x, \quad a \leq x \leq b.$

Quanto vale l'area ombreggiata nella figura A.8, quella sotto la retta e compresa fra $a$ e $b$? La risposta può essere ottenuta sfruttando le proprietà geometriche dei triangoli. L'area di un triangolo è pari al prodotto di base per altezza diviso 2, $\frac{1}{2} \times$ base $\times$ altezza. I triangoli sono identificati dai propri vertici. Indichiamo con $\Delta 0bc$ l'area del triangolo di vertici 0 (l'origine), $b$ e $c$. Allo stesso modo $\Delta 0ad$ rappresenta l'area del triangolo più piccolo di vertici 0, $a$ e $d$. L'area ombreggiata al di sotto di $f(x) = 2x$ e compresa fra $a$ e $b$ è pari alla differenza fra le aree dei due triangoli.

$$\begin{aligned} \text{area} &= \Delta 0bc - \Delta 0ad \\ &= \left(\frac{1}{2}\, b\right)(2b) - \frac{1}{2}\, a(2a) \\ &= b^2 - a^2 \end{aligned} \tag{A.13}$$

L'equazione (A.13) rappresenta uno strumento semplice per calcolare l'area al di sotto di $f(x) = 2x$ compresa fra $a$ e $b$.

In alternativa possiamo ricavare l'area compresa fra la curva $f(x) = 2x$, l'asse delle $x$ e i due estremi $a$ e $b$ calcolando l'**integrale definito** di $f(x) = 2x$. Per usare il teorema fondamentale del calcolo integrale abbiamo bisogno dell'integrale indefinito. Usando la Regola di integrazione 4 (integrale di una potenza), otteniamo:

$$\int 2x dx = 2 \int x dx = 2 \left[ \frac{1}{2} x^2 + C \right] = x^2 + 2C = x^2 + C_1 = F(x) + C_1$$

dove $F(x) = x^2$ e $C_1$ è la costante di integrazione. L'area che cerchiamo è data da:

$$\int_a^b 2x dx = F(b) - F(a) = b^2 - a^2 \tag{A.14}$$

Questa risposta coincide con quella ottenuta con (A.13) usando le proprietà geometriche dei triangoli.

Molto spesso i passaggi algebrici sono presentati in forma abbreviata, dato che la costante di integrazione non ha alcun effetto sull'integrale definito. Gli integrali definiti che incontrerete saranno spesso scritti come:

$$\int_a^b 2x dx = x^2 \Big|_a^b = b^2 - a^2$$

Questa notazione, caratterizzata dalla presenza dalla barra verticale, significa che l'espressione che precede la barra deve essere valutata dapprima in $b$ e al risultato così ottenuto deve essere sottratto il valore dell'espressione in $a$.

### A.4.2. L'integrale definito

Consideriamo ora un approccio più generale al calcolo dell'area al di sotto della curva $f(x) = 2x$ che ci consentirà di precisare il concetto di integrale. Dividiamo l'intervallo $[a, b]$ in $n$ sottointervalli di ampiezza $\Delta x = (b - a)/n$ inserendo gli $n - 1$ punti equidistanti $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ fra $a = x_0$ e $b = x_n$, come illustrato nella figura A.9.

Gli $n - 1$ punti sono:

$$\begin{aligned} x_1 &= a + \Delta x \\ x_2 &= a + 2(\Delta x) \\ &\vdots \\ x_i &= a + i(\Delta x) \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= a + (n-1)(\Delta x) \end{aligned} \tag{A.15}$$

L'individuazione di questi punti ci permette di costruire $n$ rettangoli al di sotto della curva $f(x) = 2x$. L'idea fondamentale consiste nell'approssimare l'area sotto la curva con la somma delle aree del rettangoli inscritti. L'approssimazione sarà leggermente per difetto, dato che non comprende le piccole aree triangolari in cima a ciascun rettangolo. Se tuttavia consideriamo un gran numero di rettangoli, ognuno con una base molto stretta, l'errore dell'approssimazione sarà molto piccolo. L'area "esatta" viene ottenuta facendo tendere all'infinito il numero di rettangoli.

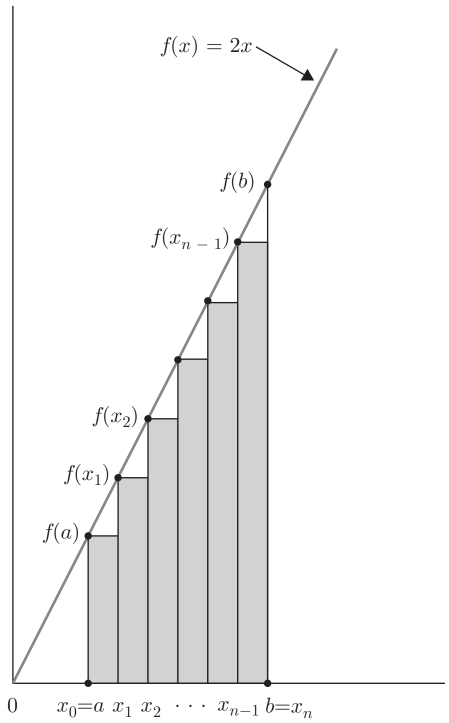


**Figura A.9**
Area sotto la curva
$f(x) = 2x, \quad a \leq x \leq b.$

### A.4.3. Integrale definito: alcuni dettagli[3]

L'area di un rettangolo è data dal prodotto di base e altezza. Il primo rettangolo, quello più piccolo, ha base $x_1 - x_0 = \Delta x$ e altezza $f(x_0) = 2a$. La sua area è:

$$A_1 = f(x_0)\Delta x = (2a)(\Delta x)$$

Allo stesso modo, il secondo rettangolo ha la stessa base e altezza $f(x_1)$, dove $x_1$ è espresso dalla (A.15), e ha area:

$$A_2 = f(x_1)\Delta x = 2(a + \Delta x)(\Delta x)$$

L'area dell'ultimo e più grande rettangolo è pari a:

$$A_n = f(x_{n-1})\Delta x = 2[a + (n - 1)\Delta x](\Delta x)$$

Per sviluppare un'espressione generale è utile considerare la rappresentazione dell'$i$-esimo rettangolo:

$$A_i = f(x_{i-1})\Delta x = 2[a + (i - 1)\Delta x](\Delta x)$$

Possiamo approssimare l'area $A = \Delta 0bc - \Delta 0ad$ sommando le aree degli $n$ rettan-

[3] Questo paragrafo contiene materiale di livello avanzato.

goli. Questa somma, $S_n$, è pari a:

$$\begin{aligned} S_n &= A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x = \sum_{i=1}^{n} 2[a + (i-1)\Delta x]\Delta x \\ &= 2a\Delta x \sum_{i=1}^{n} 1 + 2(\Delta x)^2 \sum_{i=1}^{n} (i-1) \end{aligned} \tag{A.16}$$

Questa sommatoria può essere calcolata usando un paio di utili proprietà. Primo, se $c$ è una costante, $\sum_{i=1}^{n} c = nc$; di conseguenza, $\sum_{i=1}^{n} 1 = 1 + 1 + \ldots + 1 = n$. Secondo, $\sum_{i=1}^{k} i = k(k+1)/2$; di conseguenza:

$$\sum_{i=1}^{n} (i-1) = 0 + 1 + \ldots + (n-1) = \sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{(n-1)n}{2}$$

Usando queste due espressioni possiamo semplificare la seconda riga di (A.16) come:

$$\begin{aligned} S_n &= 2a\,\frac{(b-a)}{n}\,n + \frac{2(b-a)^2}{n^2} \cdot \frac{(n-1)n}{2} \\ &= 2a(b-a) + (b-a)^2 \cdot \frac{n-1}{n} \end{aligned} \tag{A.17}$$

Questa somma, $S_n$, approssima l'area sotto la curva $f(x) = 2x$ compresa fra i punti $a$ e $b$. L'approssimazione migliora al crescere del numero di rettangoli considerati – in altre parole, quando $n$, il numero di volte in cui l'intervallo fra $a$ e $b$ viene suddiviso, è più elevato. In effetti, l'area esatta sotto il grafico può essere ottenuta calcolando il limite di $S_n$ per $n \to \infty$. L'unica posizione in cui appare $n$ nella (A.17) è l'ultimo addendo. Il suo limite è:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 1 \tag{A.18}$$

Usando la (A.18) possiamo calcolare il limite di (A.13):

$$\begin{aligned} \text{area} &= \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_1)\Delta x = 2a(b-a) + (b-a)^2 \\ &= (b-a)(b+a) = b^2 - a^2 \end{aligned}$$

Questa soluzione coincide con quella ottenuta in (A.13) usando le proprietà geometriche dei triangoli e il teorema fondamentale del calcolo integrale.

## A.5. Esercizi

Alla pagina web `http://online.universita.zanichelli.it/hillecon` sono disponibili le risposte agli esercizi indicati con un asterisco.

**A.1*** Considerate l'espressione $Q^s = -3 + 1{,}5P$, dove $Q^s$ è la quantità offerta di un bene e $P$ è il suo prezzo di mercato.

(a) Fornite l'interpretazione economica della pendenza.
(b) Calcolate l'elasticità per $P = 10$ e $P = 50$, e date un'interpretazione dei risultati.

**A.2** Supponete che il tasso d'inflazione *INF*, il tasso di crescita percentuale annuo del livello generale dei prezzi, sia collegato al tasso annuo di disoccupazione *DISOCC* attraverso l'equazione $INF = -2 + 6 \times (1/DISOCC)$.
(a) Tracciate questa curva per valori di *DISOCC* compresi fra 1 e 10.
(b) In quale punto è massimo l'effetto sull'inflazione di una variazione del tasso di disoccupazione?
(c) Se il tasso di disoccupazione è del 5%, qual è l'effetto marginale sul tasso d'inflazione di un suo aumento?

**A.3** Semplificate le espressioni seguenti:
(a) $x^{1/2}x^{1/6}$
(b) $x^{2/3} \div x^{7/8}$
(c) $(x^4y^3)^{-1/2}$

**A.4** (a) La velocità della luce è di circa 299 460 kilometri al secondo. Esprimete la velocità della luce usando la notazione scientifica.
(b) Calcolate il numero di secondi contenuti in un anno ed esprimetelo in notazione scientifica.
(c) Usando i risultati ottenuti ai punti (a) e (b), esprimete in notazione scientifica la distanza percorsa dalla luce in un anno.

**A.5*** La tecnologia influisce sulla produzione agricola aumentando il raccolto nel corso del tempo. Indichiamo con *WHEAT* la produzione media di grano (in tonnellate per ettaro) per il periodo 1950-2000 ($t = 1, 2, \ldots, 51$) nel distretto di Chapman Valley nell'Australia occidentale.
(a) Supponete che la produzione sia data da $WHEAT_t = 0{,}5 + 0{,}20\log(t)$. Tracciate il grafico di questa curva. Calcolatene pendenza ed elasticità nel punto $t = 49$ (1998).
(b) Supponete che la produzione sia data da $WHEAT_t = 0{,}80 + 0{,}0004\,t^2$. Tracciate il grafico di questa curva. Calcolatene pendenza ed elasticità nel punto $t = 49$ (1998).

**A.6** I medici legali possono dedurre la quantità di arsenico nell'acqua potabile misurandone la concentrazione (in parti per milione) nelle unghie dei piedi. Indichiamo con $y$ la concentrazione di arsenico nelle unghie e con $x$ la concentrazione di arsenico nell'acqua. Le tre equazioni seguenti descrivono la relazione fra $y$ e $x$:

$$\log(y) = 0{,}8 + 0{,}4\log(x)$$
$$y = 1{,}5 + 0{,}2\log(x)$$
$$\log(y) = -1{,}75 + 20x$$

(a) Tracciate il grafico di queste funzioni per $x$ compresa fra 0 e 0,15.
(b) Calcolate la pendenza di queste tre funzioni per $x = 0{,}10$. Fornite l'interpretazione della pendenza.
(c) Calcolate l'elasticità di ciascuna funzione per $x = 0{,}10$ e fornitene un'interpretazione.

**A.7*** Considerate i numeri $x = 4\,573\,239$ e $y = 59\,757{,}11$.
(a) Esprimete entrambi i numeri in notazione scientifica.
(b) Usate la notazione scientifica per esprimere il prodotto $xy$.
(c) Usate la notazione scientifica per esprimere il rapporto $x/y$.
(d) Usate la notazione scientifica per esprimere la somma $x + y$. [*Suggerimento*: esprimete entrambi i numeri come il prodotto di un numero decimale per $10^6$.]

**A.8** Considerate la funzione $y = f(x) = 3 + 2x + 3x^2$.
(a) Tracciate il grafico di questa funzione per valori di $x$ compresi fra $x = 0$ e $x = 4$.
(b) Calcolate la derivata $dy/dx$ e valutatela per $x = 2$. Tracciate la tangente alla curva in questol punto.
(c) Calcolate $y_1 = f(1{,}99)$ e $y_2 = f(2{,}01)$. Individuate (approssimativamente) questi valori nel vostro grafico.
(d) Valutate $m = [f(2{,}01) - f(1{,}99)]/0{,}02$. Confrontate questo valore con quello della derivata calcolata al punto (b). Spiegate geometricamente per quale motivo questi due valori dovrebbero essere vicini fra loro. Il valore di $m$ è chiamato "derivata numerica", e la tecnica usata per calcolarla rappresenta uno strumento utile per approssimare numericamente una derivata.