# Cosa ci insegna il modello dell'insegnamento della matematica in Finlandia

**di Giorgio Israel**

È ormai un luogo comune indicare la Finlandia come un modello di scuola innovativa, di successo e che riesce a conquistare le prime posizioni nelle classifiche internazionali OCSE-PISA, in particolare nella matematica; e quindi come un modello da seguire per avere successo nelle valutazioni. Ma un'analisi più approfondita dimostra che non è tutto oro quel che riluce e che ci si trova di fronte a un esempio che dimostra quanto lo slogan delle "valutazioni oggettive" e della "misurazione delle qualità" sia fondato sulla sabbia.

Diverse analisi sviluppate da matematici e studiosi di problemi dell'insegnamento finlandesi (tra cui ricordiamo articoli pubblicati dal 2006 in poi da G. Malaty, E. Pehkonen, O. Martio e altri)[1] mettono in luce una realtà molto diversa da quella dorata che si ricava dal test OCSE-PISA. Come intitola un appello firmato nel 2006 da Kari Astala, professore all'università di Helsinki, e da più di altri duecento professori,[2] «le

---

[1] Malaty, G. 2006, "What are the reasons behind the success of Finland in Pisa?", *Gazette des Mathematiciens*, pp. 59-66; Malaty, G. 2006, "What are the reasons behind the success of Finland in Pisa?", *Matilde – Nyhedsbrev for Dansk Matematisk Forening medlem af European Mathematical Society*, **29**, pp. 5-10; Malaty, G. 2007, "PISA Results and School Mathematics in Finland: strenghts, weaknesses and future", in *Proceedings of the Ninth International Conference of the Mathematical Education into the 21th Century Project: Mathematics Education in a Global Community*, Charlotte, University of North Carolina, pp. 420-424; Malaty, G. 2007, "Mathematics and Mathematics Education Development in Finland: the impact of curriculum changes on IEA, IMO and PISA results", Joensuu, Finland, pp. 390-394; Martio, O. "Long Term Effects in Learning Mathematics in Finland – Curriculum Changes and Calculators", *The Teaching in Mathematics*, **XII**, 2, pp. 51-56; Pehkonen, E. 2008, "How Finns Learn Mathematics: What is the Influence of 25 Years of Research in Mathematics Education?", ptt., pp. 30; Pehkonen, E., Ahtee, M., Lavonen. J. 2007, *How Finns learn mathematics and science*, Sense Publishers. Altri articoli sono citati in questi testi.

[2] Pubblicato in *Helsingin Sanomat*, 17 febbraio 2005 e riprodotto in inglese in Malaty 2006.

classifiche Pisa dicono soltanto una verità parziale circa le abilità matematiche dei bambini finlandesi», mentre, di fatto, «le conoscenze matematiche dei nuovi studenti hanno subito un declino drammatico». Del resto, i sondaggi TIMSS del 1999 avevano dato un ben altro risultato, mostrando che gli studenti finlandesi erano sotto la media in geometria e algebra. Secondo Astala e i duecento firmatari dell'appello, questa contraddizione è dovuta al fatto che PISA stima soprattutto la matematica di "tutti i giorni" (la "matematica del cittadino"), semplici calcoli numerici, l'interpretazione di grafici statistici e quasi mai la capacità di calcolare le frazioni, risolvere equazioni anche elementari, fare deduzioni geometriche, calcolare aree e volumi e manipolare espressioni algebriche. In altri termini, PISA non dice nulla circa le effettive competenze matematiche. I matematici K. Tarvainen e S. Kivelä, in un articolo intitolato «Gravi difetti nelle abilità matematiche finlandesi»[3] hanno sottolineato che il tentativo di minimizzare le critiche dell'appello, qualificandolo come espressione di una visione "accademica" o "teorica" è completamente infondato: gran parte dei firmatari dell'appello di Astala sono professori di politecnici o università tecniche e quindi «non insegnano una matematica "accademica", bensì una matematica richiesta nelle pratiche tecniche e nelle scienze dell'ingegneria». Da parte sua, George Malaty ha osservato con molta franchezza che «in Finlandia sappiamo che non avremmo avuto alcun successo in PISA se i test avessero riguardato la comprensione dei concetti o delle relazioni matematiche». Da più parti è stato severamente osservato che le varie riforme introdotte in Finlandia hanno finito col generare un "oggetto didattico" che con la matematica propriamente detta ha in comune soltanto il nome e che serve a superare bene i test OCSE-PISA ma ha avuto effetti disastrosi sulla cultura matematica diffusa, oltre che su un declino accertato della conoscenza superiore nelle università e nei politecnici. Nel 2006, soltanto il 40% degli studenti provenienti dalle scuole secondarie superiori è riuscito a superare le prove di ammissione di base ai politecnici. «Gli insegnanti dei politecnici su argomenti professionali sono stupefatti per quanto poco gli studenti sappiano maneggiare le espressioni algebriche e risolvere le equazioni. Le abilità matematiche declinanti degli studenti hanno indotto a ridurre il materiale d'insegnamento nei corsi di ingegneria che più poggiano sulla matematica. Questo è un problema serio tenendo conto dell'importanza delle conoscenze ingegneristiche nell'economia e nel welfare della Finlandia».[4]

[3] Pubblicato in *Helsingin Sanomat*, 10 marzo 2005 e riprodotto in Malaty 2006.
[4] *Ivi*.

L'insegnamento della matematica in Finlandia ha conosciuto varie riforme. In sintesi: la riforma "New mathematics" implementata dal 1970 al 1980, la "Back-to-Basics" (1980-1985), seguita da altre due riforme che hanno prodotto un orientamento sempre più deciso verso un approccio pratico, e cioè verso il "Problem solving" (1985-1990), per finire con la riforma più radicale, "Everyday mathematics" (1990-95). La tendenza è stata quindi verso un approccio concreto ispirato a una visione puramente operativa della matematica, rivolta a scopi pratici e alla "matematica del cittadino". Inoltre tale approccio ha teso a dare un'importanza crescente al calcolatore, per giunta visto in un senso molto radicale, e cioè non come ausilio bensì come modello di riferimento. Ciò ha condotto, come vedremo, a sostituire le procedure di calcolo codificate nell'aritmetica e nell'algebra con quelle ideate *ad hoc* per far funzionare la macchina.

Sintetizziamo rapidamente le caratteristiche dell'"oggetto didattico" detto "matematica" che queste riforme hanno man mano costruito.

In primo luogo, non si fanno quasi più dimostrazioni. L'insegnante si limita a trasmettere i risultati come manuali d'istruzioni senza proporne quasi mai la prova logica. È superfluo dire che questa scelta, oltre a produrre un tipo di insegnamento nozionistico – che soltanto un estremo semplicismo rende accettabile – atrofizza le capacità logico-deduttive dello studente. Inoltre, insegnare la matematica senza dimostrazione è come pretendere di addestrare uno scultore senza mai mettergli in mano uno scalpello.

In secondo luogo, la geometria è praticamente sparita dall'insegnamento. Questo è coerente con la scelta di eliminare le dimostrazioni: difatti la geometria elementare senza dimostrazioni non ha senso. Questa sparizione produce un'altra conseguenza molto negativa: l'atrofizzazione delle capacità di intuizione spaziale che sono stimolate in modo decisivo dal pensiero geometrico.

Veniamo ora agli effetti dell'esasperata tendenza a vedere la matematica come un insieme di procedure di "problem solving". Per inchiodare nella testa all'allievo questo approccio, fin dalle elementari le operazioni dell'aritmetica sono introdotte in modo puramente grafico, ovvero strettamente pensate come un procedimento di incolonnamento delle cifre e di applicazione di regole meccaniche. È noto come la tendenza a concepire le operazioni in termini di "incolonnamento" si sia fatta strada anche nell'insegnamento primario in Italia, con effetti pessimi. Difatti, identificare un'operazione con una rappresentazione grafica impedisce di comprenderne il concetto e svilisce il ruolo del calcolo mentale. Ma nella scuola finlandese questa discutibile tendenza è arrivata al punto di escludere il simbolo "=" a favore della lettera "V" che sta per "Vastaus", in finlandese "Risultato". L'alunno è chiamato a incolonnare i dati e a scrivere il risultato in un apposito riquadro denotato con il simbolo "V". Come osservano gli autori citati, alla fine del percorso primario un bambino finlandese non conosce il simbolo e il concetto di uguaglianza e concepisce pertanto ogni espressione matematica come la richiesta di ottenere un "risultato".

La sostituzione del simbolo "=" con quello di "risultato" implica quindi l'identificazione del concetto di "uguaglianza" con quello di risultato. È un approccio puramente operativo che fa pagare un prezzo pesantissimo. È come se fossero cancellati più di duemila anni di matematica e di logica – è come se fossero cancellati dalla storia gli *Elementi* di Euclide – per tornare allo stadio della matematica pratica, approssimata e puramente operativa dei babilonesi. Con tutto il rispetto per le conquiste di questi ultimi, straordinarie in relazione con i tempi, far fuori il grandioso impianto concettuale della matematica da Euclide in poi non è un progresso, bensì un autentico imbarbarimento. I risultati sono disastrosi. Come racconta Martio, in un test quasi nessuno studente è riuscito a spiegare perché la somma degli angoli di un triangolo sia 180 gradi. In linea generale, quel che resta della geometria viene "spiegato" in classe con esempi materiali, ricorrendo alla carta e alle forbici e senza mai alcun ragionamento concettuale.

Viste queste premesse anti-concettuali, era inevitabile che nella scuola finlandese venisse smantellata anche l'algebra. Così, non s'insegnano più le proprietà fondamentali dell'aritmetica: associatività, distributività, commutatività, ecc. Al loro posto viene somministrato un insieme di istruzioni per l'uso detto "Ordine delle operazioni", chiaramente copiato dalle procedure usate dai computer. Prima occorre calcolare le espressioni tra parentesi, poi moltiplicare, poi dividere, infine sommare o sottrarre da sinistra a destra. Come osserva Malaty, il risultato è che uno studente non è in grado di scrivere correttamente un testo matematico e questo produce problemi gravissimi all'università. Di fatto, l'"Ordine delle operazioni" mette in mora l'algebra. Difatti, non si saprebbe come operare con espressioni del tipo $2x + 3y + 3x + y$, visto che non sono date regole per associare e distribuire i termini. Il modo di cavarsela (e di smantellare l'algebra) è il seguente. Dapprima si osserva come l'esperienza suggerisca che la somma di due mele e di tre mele sia cinque mele, ovvero 2mela + 3mela ha come risultato 5mela. Analogamente 2kg + 3kg ha come risultato 5kg e 2metro + 3metro valgono 5metro. Insomma, l'esperienza suggerisce che è possibile sommare grandezze omogenee e quindi in generale calcolare

$2x + 3x$ ottenendo $5x$. Dall'esempio pratico si passa all'espressione simbolica, sostituendo alle mele o ai metri l'indeterminata $x$. Ma, in tal modo, $x$ non è più il simbolo algebrico di un numero bensì il simbolo di un oggetto. Pertanto, immaginando che nell'espressione di partenza $x$ sia una mela e $y$ una banana, se ne conclude che l'espressione $2x + 3y + 3x + y$ vale $5x + 4y$ (5mela + 4 banana). Inutile dire che in tal modo l'algebra è completamente distrutta, sostituita da un insieme di procedure pratiche basate su analogie empiriche di valore assai inferiore alle manipolazioni che venivano fatte prima degli Arabi.

È importante soffermarsi ancora un poco su questo aspetto perché la diffusione della cosiddetta "didattica per competenze" lascia credere a qualche insegnante che un simile approccio sia accettabile, e anzi valido. Si dice che, anziché proporre tante manipolazioni – passaggi da una parte all'altra del segno "=" che confonderebbero le idee – tanto vale fa constatare che 2mela + 3mela ha come risultato 5mela, per poi invitare lo studente a mettere $x$ al posto di "mela". Ma occorre ripetere che $x$ non è simbolo di un oggetto, bensì *il simbolo di un numero*, altrimenti la soluzione dell'equazione $2x = 4$ sarebbe mela = 2, il che è un'assurdità totale, come è facile capire. Come si potrebbe giustificare un passaggio come $2x + 2y = 2(x + y)$ nella logica della didattica finlandese? Occorrerebbe dire, ad esempio che 2mela + 2banana = 2(mela + banana). Ma il concetto di somma di mele e banane (come oggetti!) è privo di senso, mentre l'espressione precedente ha perfettamente senso in quanto $x$ e $y$ sono numeri che simbolizzano *la quantità* di determinati oggetti – per esempio di mele e banane – non gli oggetti medesimi, che non possono comparire nell'equazione. C'è poco da fare: l'algebra ha un carattere astratto e formale e si può ben sostenere – come fa il celebre matematico René Thom, a nostro avviso a ragione – che dal punto di vista didattico l'algebra non è la giusta porta d'ingresso alla matematica: lo sono la geometria e l'aritmetica. Ma poiché l'algebra è comunque uno strumento fondamentale nella matematica pura e applicata, sia pure in una fase successiva al primo ingresso elementare alla matematica, essa deve essere insegnata come tale, e non sostituendola con qualcosa che ne tradisce l'essenza e introduce un modo di ragionare assurdo.

Lo smantellamento della matematica nella scuola finlandese non si ferma qui e investe direttamente anche l'aritmetica. Abbiamo già parlato del modo di pensare le operazioni. Ma il disastro peggiore di tutti è la sostanziale abolizione del concetto di frazione. Difatti, nell'insegnamento finlandese della matematica i numeri sono concepiti soltanto in espressione decimale, e questo per ovvi motivi, in quanto è soltanto in questa forma che possono essere digitati su un calcolatore. Ma questo rappresenta un'autentica catastrofe, perché il concetto di numero non si identifica con la sua espressione decimale che, nella maggior parte dei casi ne rappresenta soltanto un'approssimazione: 1/3 non è la stessa cosa di 0,3333333… La forza incomparabile della matematica sta nel poter manipolare in modo esatto dei numeri dati *al di là della loro rappresentazione numerica decimale* (per lo più approssimata) ed è questo che permette alla matematica di ottenere formulazioni generali che servono a rappresentare le leggi naturali. Si tratta quindi di qualcosa che ha un valore eminentemente "concreto": la fisica e le nostre scienze applicate non esisterebbero senza la matematica "esatta", cui è subordinato il calcolo numerico approssimato. I Greci si attennero alla geometria per perseguire l'ideale di esattezza che non riuscivano a realizzare nei numeri. Ci sono voluti secoli per sviscerare la struttura dei numeri e riuscire a pensare "numeri" come 1/3 al di là della loro approssimazione decimale. Ora si propone nientemeno che cassare tutto questo.

Racconta Martio (in Martio 2009) che chi entri oggi in una macelleria finlandese e chieda 3/4 di kg di carne non viene capito: occorre dire 750 grammi, perché nella "matematica del cittadino" le frazioni non esistono. E osserva: «La matematica non riguarda soltanto i professionisti. La matematica è usata sempre di più nelle professioni ordinarie e i problemi connessi sono diversi da quelli dei test PISA. In Finlandia, come in molti altri paesi, il curriculum matematico include concetti e abilità che vi sono stati messi perché qualcuno ha ritenuto che fossero utili. Nella maggior parte dei casi il tempo ha dimostrato che queste abilità speciali non corrispondono più alle richieste della società. L'architettura del curriculum finlandese e le pratiche di insegnamento richiedono considerevoli cambiamenti per venire incontro alla sfida». Come spesso accade, confondendo la concretezza con l'empirismo si distruggono le basi stesse di ciò che rende una scienza come la matematica efficace sul piano concreto. Così l'"Everyday mathematics" rischia di diventare poco utile, salvo per operazioni di livello minimo, come quelle alla cassa del macellaio.

Nel 2003 sono state svolte ricerche per valutare gli effetti del curriculum matematico finlandese proponendo a ragazzi di 15-16 anni alcuni test (diversi da quelli OCSE-PISA) che erano stati già proposti nel 1981. Ecco alcuni risultati.

Nel 1981 il 95,2% riusciva a calcolare $5^4$: nel 2003 la percentuale era scesa al 90,1%. Ancor più significativo è il fatto che se nel 1981 il 79,0% era in grado di constatare che $0 \cdot 8436 = 0 \cdot 0{,}536$, nel 2003 questo era chiaro soltanto al 65,6%.

Il crollo più grave, fino a punte del 20% si è manifestato nelle questioni concernenti i numeri razionali. La moltiplicazione (1/2)·(2/3) che il 56,4% riusciva a fare nel 1981, veniva eseguita correttamente nel 2003 soltanto dal 36,9%. Ancor più impressionante il crollo relativo alla corretta esecuzione della divisione (1/5):5 : si passa dal 49,2% al 27,5%.

Anche il calcolo delle potenze dava esiti deludenti. Mentre nel 1981 il 55,1% riusciva a giustificare il fatto che $(59^2)^3 = (59^3)^2$, nel 2003 soltanto 31,7% riusciva a farlo. La percentuale di coloro che erano capaci di fare il banale calcolo di $x^4 \cdot x^5$ crollava dal 71,7% al 47,3%. Ancor più devastante l'esito del calcolo corretto di $10^3 \cdot 10^2$: dal 72,5% al 43,3%.

Potremmo continuare. Ma forse il risultato peggiore è dato dall'esito (nel 2003) delle risposte alla domanda «spiegate con parole vostre il significato di (4/5)·5». Soltanto il 6,5% rispose correttamente a questa domanda e il 5,4% "quasi correttamente". Il restante 88,1% diede risposte sbagliate o gravemente sbagliate.

Concludiamo qui con alcune osservazioni generali.

È opportuno non attribuire il valore di "prova scientifica" ai test OCSE-PISA, senza preoccuparsi della loro sostanza, e su questa base fragile imbastire in modo apodittico considerazioni generali e impartire ricette e comandamenti. Occorre tornare a riflettere sugli orientamenti dell'insegnamento della matematica riferendosi ai *contenuti* e non in modo astratto e puramente metodologico. Dire che una metodologia di insegnamento è buona soltanto perché ha successo in certi test, senza chiedersi quale sia il contenuto dei test proposti è profondamente sbagliato.

Questo esempio – come tanti altri – dovrebbe suggerire di accantonare l'inconsistente slogan della "misurazione oggettiva" basata sui test. I test contengono una fortissima componente soggettiva di arbitrarietà, derivante dalle scelte e dalle visioni di chi le formula. In questo caso, come si è visto, derivante da una visione molto particolare della matematica, che nessuna persona competente potrebbe avvallare. L'autentica valutazione è qualcosa di infinitamente più complesso della misurazione della superficie di un appartamento. Essa coinvolge una gran quantità di aspetti qualitativi, spesso non quantificabili ma che possono essere analizzati e giudicati seriamente senza numeri, e tra i quali ha un posto centrale il contenuto della disciplina in oggetto. La valutazione ha senso soltanto se è concepita come un processo interattivo volto a produrre una crescita culturale. Ma se è gestita da "esperti" incompetenti a entrare nel merito si traduce in un autentico disastro.

Nel caso specifico, un cattivo uso dei test conduce a occultare che l'orientamento verso una visione empirista della matematica sta manifestandosi come un totale insuccesso e che appare necessario un radicale cambiamento di orientamento se non vogliamo compromettere le basi stesse su cui si regge una società capace di sviluppo scientifico-tecnologico.