ESERCIZI PER SCIENZE DELLA FORMAZIONE PRIMARIA

In questo documento sono proposti esercizi rivolti agli studenti di Scienze della Formazione relativi ai capitoli 1, 2, 3, 4, 5, 7 e 8 del libro. Alcuni di questi esercizi propongono temi da svolgere relativi agli aspetti matematici, culturali e di didattica della matematica trattati nel libro; fra questi temi, alcuni chiedono di elaborare una sintesi di questioni trattate in capitoli diversi del libro.

Esercizio SFP. 1
I cinque postulati della geometria piana nel Libro I degli *Elementi*. Enunciare i postulati e spiegare le implicazioni didattiche.

Esercizio SFP. 2
Il concetto di retta nella geometria euclidea.
(Indicazione: Considerare le origini di questo concetto e la sua evoluzione, e trarre le implicazioni didattiche).

Esercizio SFP. 3
Cosa è un teorema di matematica?
Proporre un esempio di un teorema di geometria euclidea e di un teorema di aritmetica elementare.

Esercizio SFP. 4

Enunciare gli assiomi di Peano per i numeri naturali e discutere le implicazioni didattiche di tale descrizione dei numeri naturali.

Esercizio SFP. 5

Cosa significa il simbolo 1011 in base 5, 2, 12, 20? Cosa significa il simbolo 222 nelle basi 5, 3, 12, 20?

Esercizio SFP. 6

(a) Rappresentare in base 6 il numero 2140. Spiegare la procedura utilizzata. Per raggruppare per 6 e per le potenze di 6, quale è lo strumento matematico più diretto?
(b) Eseguire in colonna l'addizione $2501_6 + 3153_6$. Come si può verificare il risultato?
(c) Rappresentare il numero 6 in base 6.
(d) Rappresentare 36, 36, 216, 256 in base 6.
(e) Rappresentare il numero 145_6 in numeri romani.

Esercizio SFP.7

Per dare un nome ai numeri naturali in base decimale ci occorrono parole per indicare le cifre da 1 a 9 e parole per indicare le potenze 10, 10^2, 10^3, 10^4, ecc. In generale, se esprimiamo i numeri in base b ci servono b parole per le cifre 1, 2, …, b − 1 e parole per indicare le potenze b, b^2, b^3, b^4, ecc.

a) Quante diverse parole sono necessarie per dare un nome a tutti i numeri da zero a

mille in base 2, 3, 4, 5, … 15?
b) Quale base richiede meno parole?
(Questo esercizio è tratto dal classico *Cos'è la matematica?* (Courant Robbins 1941)

Esercizio SFP.8

Dimostrare che gli angoli opposti al vertice sono uguali.

Esercizio SFP.9

Dimostrare che la somma degli angoli di un poligono convesso di $n+2$ lati è n angoli piatti.

Esercizio SFP. 10

Indichiamo con il simbolo a un numero naturale qualsivoglia. Scrivere simbolicamente:

(a) il successivo di a
(b) il doppio di a
(c) l'inverso di a ("fare a parti")
(d) la metà di a.
(e) l'area di un quadrato il cui lato ha lunghezza a
(f) il volume di un cubo il cui spigolo ha lunghezza a
(g) un multiplo di a
(h) il successivo del triplo di a
(i) il quadruplo del successivo di a.
(j) la lunghezza del lato di quadrato di area a

In ognuno di questi casi, che tipo di numero otteniamo?

Esercizio SFP. 11

(a) Confrontare la definizione di quadrato degli *Elementi* di Euclide con quella di un sussidiario della scuola primaria. Proporre una definizione equivalente di quadrato.
(b) Un quadrato è un parallelogramma? Un quadrato è un rettangolo?

Esercizio SFP. 12

(a) Quando si dice che un poligono è regolare?
(b) Quale è il quadrilatero regolare?
(c) Quale è il triangolo regolare?

Esercizio SFP. 13

Confrontare la definizione di triangolo isoscele degli *Elementi* di Euclide con quella di un sussidiario della scuola primaria. Proporre una definizione equivalente di triangolo isoscele.

(Indicazione: Le definizioni delle figure rettilinee di Euclide sono riportate in *Pensare in matematica*, p. 196; ricordare che condizione necessaria e sufficiente affinché un triangolo sia isoscele è che abbia due angoli congruenti – si veda ad esempio Bergamini, Trifone, Barozzi, *Manuale di geometria*, Zanichelli, varie edizioni.)

Esercizio SFP. 14

(d) Sia n un numero naturale. Per scrivere la rappresentazione decimale posizionale di questo numero, quale è la decomposizione che dobbiamo ottenere?
(e) Come si ottiene l'espressione o rappresentazione posizionale dei numeri frazionari? Proporre alcuni esempi usando la base decimale e la base sessagesimale e indicare la decomposizione usata.

Esercizio SFP. 15

Il contare è la prima e basilare attività numerica dei bambini, attraverso la quale inizia la loro relazione di intimità con i numeri. Spiegare la visione matematica del contare e il suo ruolo nell'alfabetizzazione numerica dei bambini.

Esercizio SFP. 16

Addizione e sottrazione nel sistema dei numeri.

Esercizio SFP.17

Calcolare il massimo comun divisore usando l'algoritmo euclideo: a) di 45 e 72; b) di 1338 e 750; c) 936 e 4.508; d) di 266 e 684.

Esercizio SFP. 18

(a) Rappresentare i numeri naturali 125_6 e 3042_6 usando il sistema di numerazione romano e il sistema di numerazione erudito babilonese, indicando le varie decomposizioni usate nei diversi sistemi di numerazione.
(b) Rappresentare $3 \times 125_6 + 3042_6$ nel sistema decimale posizionale corrente.

Esercizio SFP.19

Rappresentare in numeri romani il numero naturale 175_8 e rappresentare il doppio di questo numero nel sistema decimale posizionale corrente.

Esercizio SFP.20

Scrivere in forma posizionale decimale e in forma posizionale sessagesimale gli inversi dei primi venti numeri naturali: disporre il tutto in una tabella.
(N. B. L'inverso di 3 si scrive in notazione frazionaria $\frac{1}{3}$; verificare la soluzione di questo esercizio con la tabella 5.1 del libro).

Esercizio SFP.21

Rappresentare con il sistema sessagesimale erudito babilonese mille, diecimila, un milione. Indicare la decomposizione corrispondente per il tramite di un'espressione aritmetica.

Esercizio SFP.22

Nel sistema posizionale sessagesimale babilonese, quante posizioni servono a rappresentare il numero 13? E il numero 143? Quanti simboli sono adoperati in ognuna delle posizioni?

Esercizio SFP.23

Dimostrare che tracciando *n* rette in un piano non si può dividere il piano in più di 2^n parti.

Esercizio SFP.24

(a) Confrontare la struttura algebrica di **Z** con quella di **N**.
(b) Confrontare la struttura d'ordine di **Z** con quella di **N**.

Esercizio SFP.25

Calcolare il valore delle somme delle potenze di due: le prime due, le prime tre, le prime quattro, e così via (ricordare che convenzionalmente si scrive $2^0=1$). Riflettere sull'andamento di questa sequenza di numeri e provare a ottenere una formula per la somma delle prime *n* potenze di 2, con *n* un numero naturale scelto a piacere. Dimostrare la formula ottenuta applicando il principio di induzione.

Esercizio SFP.26

Cosa sono i sessagesimi di ora? Provare a indicare un quarto d'ora in sessagesimi.

Esercizio SFP.27

Due definizioni matematiche: Quando si dice che un numero naturale è *maggiore* di un altro numero naturale? Quando si dice che un numero naturale è *multiplo* di un altro numero naturale?

Esercizio SFP.28

Scrivere simbolicamente l'insieme dei numeri dispari, l'insieme dei numeri pari, l'insieme dei multipli di 4, l'insieme dei numeri che danno resto 3 nella divisione per 4. Rappresentare graficamente, usando i diagrammi di Euler Venn, questi sottoinsiemi di N.

Esercizio SFP.29

Molti numeri naturali si possono rappresentare attraverso figure geometriche, come i numeri triangolari. Quali sono gli unici numeri naturali che non possono essere rappresentati attraverso rettangoli?

Esercizio SFP.30

Stabilire un confronto in parallelo fra la geometria pratica delle civiltà antiche e la geometria greca.

Esercizio SFP.31

(a) Dimostrare che, se un triangolo è equilatero, allora ha i tre angoli congruenti, e che è vero anche l'inverso.
(b) Proporre due diverse definizioni di triangolo equilatero.

Esercizio SFP.32

(a) Si dimostra che un quadrilatero con i lati opposti congruenti è un parallelogramma. Ripercorrere la dimostrazione in un manuale di geometria della scuola secondaria. Quale è la strategia della dimostrazione, e quale teorema si applica?
(b) "Un rettangolo è un parallelogramma avente le diagonali congruenti". È una definizione corretta di rettangolo? Discutere dal punto di vista didattico questa definizione alternativa.

Esercizio SFP.33

Spiegare il passaggio dalla geometria euclidea sintetica a quella analitica considerando il concetto di punto e quello di retta.

Esercizio SFP.34

Le origini della geometria: aspetti storici ed epistemologici.

Esercizio SFP.35

Calcolare i numeri generati dalle seguenti formule per i valori indicati

(a) 2^{2^n} per $n = 1,2,3,4$
(b) $n^2 - n + 41$ per $n = 1,2,3,4,\ldots,10,20,30,40$

Il successivo di ognuno dei numeri trovati con la formula (a) è un primo. Invece $2^{2^5}+1$ non lo è (nel 1732 Eulero scoprì che si tratta di $2^{2^5}+1 = 641 \times 6.700.417$)
Altri commenti sui tentativi di trovare formule per ottenere numeri primi si trovano in Courant Robbins 1941.

Esercizio SFP.36

Spiegare la differenza fra notazione additiva e notazione posizionale nei sistemi di numerazione e indicare il metodo o i metodi di notazione dei sistemi usati nei seguenti contesti storico-culturali del mondo premoderno: 1) Egitto, 2) Roma, 3) Mesopotamia, 4) India.

Esercizio SFP.37

Considerare i due numeri naturali seguenti: $a = 201_3 \qquad b = 22_3$

a) Scrivere i numeri a e b in base 10, in numeri romani e in un sistema di numerazione additivo.
b) Esprimere $2 \cdot a + b$ in base 3
c) a è un multiplo di 3? a è un numero primo? Giustifichi la risposta.

Esercizio SFP. 38

Quale è l'origine del sistema di numerazione di uso generale del mondo contemporaneo? Illustrarne le caratteristiche.

Esercizio SFP.39

Quale decomposizione e quali proprietà sono utili nel calcolo mentale delle operazioni seguenti: (a) 27 + 13, (b) 27 + 14 (c) 7+2, 2 +7. Costruire molti altri esempi.

Esercizio SFP.40

Abbiamo introdotto due definizioni (segmento iniziale di N, corrispondenza biunivoca) che sono servite a ottenere la definizione di insieme finito e della cardinalità di un insieme finito. Confrontare queste definizioni astratte con l'operazione concreta del contare.

Esercizio SFP.41

Proporre esempi sui diversi tipi di errori nel contare.

Esercizio SFP. 42

Perché è importante contare con i bambini piccoli?

Esercizio SFP.43

"Sei pagnotte per cinque operai". Scrivere il numero "rotto" *un quinto* nella scrittura frazionaria egizia; nella scrittura posizionale sessagesimale babilonese; nelle varie notazioni odierne.

Esercizio SFP.44

Considerare i numeri naturali n = XL e m = XIII. Calcolare la loro somma, la differenza $n - m$ e il loro prodotto, esprimendo tutti e tre i risultati in base 7.

Esercizio SFP.45

Rappresentare la retta r di equazione $y = 2x + 1$. Colorare in due colori diversi i due semipiani di origini la retta r. Trovare la condizione che verificano le coordinate dei punti di ognuno dei semipiani. Scegliere un punto A a piacere sulla retta r e colorare in due colori diversi le due semirette di origine A. Trovare la condizione che verificano le coordinate dei punti su una delle due semirette.

Esercizio SFP.46

Quando due numeri interi sono congrui modulo 7? Trovare le classi di congruenza che la congruenza modulo 7 determina nell'insieme Z: la famiglia di sottoinsiemi che ha ottenuto è una partizione di Z (*Pensare in matematica*, p. 113). Quante sono? Considerare l'insieme Z_7 e calcolare le tabelline dell'addizione e della moltiplicazione.

DEFINIZIONE (Insieme delle parti di un insieme). La famiglia dei sottoinsiemi di un insieme U è a sua volta un insieme, detto *insieme delle parti* o *insieme potenza*, e si indica con $\wp(U)$.
DEFINIZIONE (Partizione). Una *partizione* di U è un sottoinsieme di $\wp(U)$ che verifica le condizioni seguenti:

– l'unione di tutti i sottoinsiemi di U che appartengono alla partizione è uguale a U;

– due qualsivoglia sottoinsiemi di U diversi della partizione sono disgiunti.

Esercizio SFP.47

Il D.M. n° 345 del 23/12/1976 disciplina il modo in cui viene stabilito il codice fiscale delle persone fisiche. L'articolo 7 stabilisce come si trova il sedicesimo e ultimo carattere del codice. Quale modulo di congruenza aritmetica è usato alla fine della procedura?

Articolo 7) Carattere alfabetico di controllo. Il sedicesimo carattere ha funzione di controllo dell'esatta trascrizione dei primi quindici caratteri. Esso viene determinato nel modo seguente: ciascuno degli anzidetti quindici caratteri, a seconda che occupi posizione di ordine pari o posizione di ordine dispari, viene convertito in un valore numerico in base alle corrispondenze indicate rispettivamente ai successivi punti 1) e 2). 1) Per la conversione dei sette caratteri con posizione di ordine pari:

A o zero	= zero	O	= 14
B o 1	= 1	P	= 15
C o 2	= 2	Q	= 16
D o 3	= 3	R	= 17
E o 4	= 4	S	= 18
F o 5	= 5	T	= 19
G o 6	= 6	U	= 20
H o 7	= 7	V	= 21
I o 8	= 8	W	= 22
J o 9	= 9	X	= 23
K	= 10	Y	= 24
L	= 11	Z	= 25
M	= 12	-	-
N	= 13	-	-

2) Per la conversione degli otto caratteri con posizione di ordine dispari:

A o zero	= 1	O	= 11
B o 1	= 0	P	= 3
C o 2	= 5	Q	= 6
D o 3	= 7	R	= 8
E o 4	= 9	S	= 12
F o 5	= 13	T	= 14
G o 6	= 15	U	= 16
H o 7	= 17	V	= 10
I o 8	= 19	W	= 22
J o 9	= 21	X	= 25
K	= 2	Y	= 24

L = 4	Z = 23
M = 18	
N = 20	

I valori numerici così determinati vengono addizionati e la somma si divide per il numero 26. Il carattere di controllo si ottiene convertendo il resto di tale divisione nel carattere alfabetico ad esso corrispondente nella sottoindicata tabella:

zero = A	14 = O
1 = B	15 = P
2 = C	16 = Q
3 = D	17 = R
4 = E	18 = S
5 = F	19 = T
6 = G	20 = U
7 = H	21 = V
8 = I	22 = W
9 = J	23 = X
10 = K	24 = Y
11 = L	25 = Z
12 = M	- -
13 = N	- -

Esercizio SFP.48

Discutere il brano seguente:

> "Il matematico può, almeno in certo grado, prescindere dalle questioni propriamente filosofiche che qui si riattaccano: se, e fino a che punto e in qual senso, l'idea di un oggetto in generale e della sua identificazione e discriminazione da altri oggetti, resulti da esperimenti; e se ancora da esperimenti fisici e psicologici rilevi la corrispondenza che poniamo fra oggetti e oggetti, in cui altri vede piuttosto la consapevolezza delle facoltà associative dello stesso pensiero. Sebbene accada pure di scorgere un qualche influsso del presupposto filosofico sull'indirizzo della critica matematica, per esempio nella preferenza che alcuni critici danno al numero ordinale sul cardinale, perché quello, a differenza di questo, sembra riflettere l'idea del tempo, e perché venga ritenuto come primo nell'acquisto psicologico"
> F. Enriques, *Questioni riguardanti la matematica elementare*. Parte I. Critica dei principi, vol. 1, La serie infinita dei numeri, 3° edizione, 1924, p. 235.

Esercizio SFP.49

(a) Scrivere il numero naturale *cinque* in altri sistemi di numerazione: in base 5, in numeri romani, usando la numerazione maya, geroglifica egizia, in base 3, in base 2.
(b) Scrivere il numero *diciannove* in base 3.

Esercizio SFP.50

Dimostrare che l'insieme dei numeri interi è numerabile.

Esercizio SFP.51

Spiegare cosa sono gli assiomi e cosa sono i concetti primitivi nel punto di vista assiomatico.

Esercizio SFP.52

È possibile introdurre il concetto di angolo retto ai bambini senza fare ricorso alla misura?

Esercizio SFP.53

Considerare i due numeri naturali seguenti $a = 201_3$ $b = 22_3$

a) Scrivere i numeri a e b in base 10 e in numeri romani.
b) Rappresentare i numeri usando diversi sistemi di numerazione, anche storici. Indicare la decomposizione aritmetica soggiacente. Indicare i sistemi additivi e i sistemi posizionali.
c) Esprimere $2 \cdot a + b$ in base 3
d) a è un multiplo di 3? a è un numero primo? Giustificare la risposta.

Esercizio SFP.54

4) Scrivere il numero 1/2 in forma posizionale in base 10 e in base 60. È possibile scrivere il numero 1/3 in forma posizionale in base 60? E in base 10?

Esercizio SFP.55

Se si deve indicare un peso di $\frac{4}{5}$ kg di pane, quale espressione è usuale utilizzare per indicare questo numero frazionario? Se si deve indicare un tempo di $\frac{4}{5}$ h, quale espressione si può utilizzare per indicare questo numero frazionario? È possibile indicare queste quantità adoperando i numeri naturali?

Esercizio SFP.56

Considerare i numeri naturali seguenti:

$$n = \text{CXX}$$
$$m = \text{VIII}$$

(a) Scriva n ed m in base 7, usando il sistema di numerazione egizio antico e il sistema di numerazione posizionale babilonese. Indicare in ognuno dei sistemi di numerazione la decomposizione del numero che è stata adoperata.
(b) È possibile eseguire la divisione $n : m$ nell'insieme **N** dei numeri naturali? Proponga un esempio della vita quotidiana per illustrare la situazione numerica astratta.
(c) È possibile eseguire la divisione $n : m$ nell'insieme **Q** dei numeri razionali?

Esercizio SFP.57

Sia C l'insieme delle cifre che servono a scrivere il numero *centoquarantamila duecentosei* e consideri il segmento iniziale I_3 di N. Determinare:

(a) l'insieme intersezione di C e I_3
(b) l'insieme unione di C e I_3

Esercizio SFP.58

(a) Trovare due numeri interi, uno positivo e uno negativo, congrui con 5 modulo 6.
(b) Trovare due numeri interi, uno positivo e uno negativo, congrui con 9 modulo 12.

Esercizio SFP.59

Considerare la frazione 3/4.
(a) Scrivere il numero razionale indicato dalla notazione in forma di frazione e altre possibili notazioni.
(Indicazione: si veda *Pensare in matematica*, p. 148)
(b) Proporre una situazione della vita quotidiana o un esempio in cui si usa ognuna delle notazioni indicate nel punto (a).
(c) Rappresentare la frazione sulla retta e usando un triangolo equilatero.

Esercizio SFP.60

Spiegare e confrontare le due relazioni d'ordine definite nell'insieme dei numeri naturali N. Proporre e discutere, per ognuna delle due, una situazione della vita quotidiana o un problema elementare della scuola primaria in cui trova applicazione tale relazione d'ordine.

Esercizio SFP.61

(a)Quando due numeri interi sono congrui modulo 4? Scrivere un numero positivo e uno negativo congrui con 1 modulo 4.
(b) Scrivere le proprietà della relazione di congruenza modulo 4 in **Z** e le classi di resto determinate in **Z** da tale relazione. Rappresentare geometricamente $\mathbf{Z}_4$.

Esercizio SFP.62

Considerare la proprietà dei numeri naturali descritta in notazione simbolica nel modo seguente:

$$1+2+\ldots+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2} \quad \forall n\in N$$

(a) Enunciare a parole la proprietà descritta da questa formula.
(b) Verificare la validità della formula per il numero naturale 5.
(c) Che numeri si ottengono applicando questa formula?
(d) Dimostrare la proprietà.

Esercizio SFP.63

(a) Calcolare il massimo comun divisore di 561 e 238 usando l'algoritmo euclideo.
(b) Enunciare e dimostrare la proprietà matematica sulla quale si basa l'algoritmo euclideo.

Esercizio SFP.64

Confrontare il concetto di numero naturale che si trova esposto negli *Elementi* di Euclide con la presentazione dei numeri naturali attraverso degli assiomi di Peano.

Esercizio SFP.65

(a) Scrivere il numero razionale rappresentato dalla frazione 3/5.
(b) Rappresentare geometricamente la frazione 3/5 in due modi, usando la retta e una figura piana.
(c) Scrivere la frazione 3/5 come percentuale e proporre una situazione della vita quotidiana che usi tale percentuale.
c) Trovare l'espressione decimale e l'espressione sessagesimale di 3/5 e proporre per ognuna di esse un esempio di uso di questa espressione per indicare misure.
d) Calcolare l'addizione (3/5) + 3 e proporre un rappresentazione geometrica.

Esercizio SFP.66

I numeri primi nei libri di aritmetica degli *Elementi* di Euclide

Da Euclide, *Elementi*, Libro VII,
Proposizione 31. Ogni numero composto è misurato da qualche numero primo.
Proposizione 32. Ogni numero o è primo o è misurato da qualche primo.

Da Euclide, *Elementi*, Libro IX
Proposizione 20. Vi sono più primi di ogni quantità proposta di numeri primi.

Ritrovare la discussione di queste proposizioni nel libro *Pensare in matematica* e confrontare l'enunciato proposto.

Esercizio SFP.67

Il sistema di notazione numerico erudito adoperato dagli scribi babilonesi a partire dal XIX secolo a. C. circa, era posizionale oppure e additivo? Quale è la base? Scrivere, adoperando questo sistema, i numeri 11, 70 e confrontare l'iscrizione sulla *Pietra nera* di Asarhadon riportata nel libro (*Pensare in matematica*, p. 41, in basso)

Esercizio SFP.68

Perché è necessario estendere il sistema dei numeri della matematica oltre i numeri naturali?

Esercizio SFP.69

1) Scrivere i numeri: 11, 13, 12, 9, 8 e 7 usando i simboli dei Maya
2) Nei testi riguardanti la cronologia maya, è usata anche una notazione posizionale in disposizione verticale, con le unità nella posizione più in basso. Scriva seguendo questo principio 43 giorni, 310 giorni.

Esercizio SFP.70

Siano a e b due numeri interi congrui con 3 modulo 4. Dimostrare a quale classe di congruenza modulo 4 appartiene $a + b$.

Esercizio SFP.71

Le parole numerali, i simboli numerici e il concetto astratto di numero.

Esercizio SFP.72

Il teorema di rappresentazione dei numeri naturali in una base b: enunciato del teorema, aspetti storici e implicazioni didattiche.
(Indicazioni: *Pensare in matematica*, p. 48-49 e 107.

Esercizio SFP.73

Stabilire un confronto in parallelo tra oggetti, operazioni e relazioni della geometria elementare e oggetti, operazioni e relazioni dell'aritmetica elementare. Considerare anche le implicazioni didattiche.
(Indicazione. Esempi: concetti primitivi; addizione dei numeri e addizione di segmenti; relazioni di equivalenza)

Esercizio SFP.74
Dimostrare la seguente formula per la somma di n termini consecutivi di una progressione aritmetica di primo termine 1 e differenza 4

$$1+5+9+\ldots+(4n+1)=2n^2+3n+1$$

Esercizio SFP.75

Scrivere il numero *milletrecentocinquanta* nei sistemi di numerazione conosciuti e indicare per ognuno di essi la decomposizione del numero usata per rappresentarlo.

Esercizio SFP.76

Enunciare il teorema di esistenza e unicità di quoziente e resto. Su quale principio fondamentale della aritmetica si basa la dimostrazione del teorema?

Esercizio SFP.77

Scrivere tutti i numeri a una, due, tre cifre nel sistema posizionale decimale; scrivere tutti i numeri a una, due, tre cifre nel sistema posizionale in base 6.

Esercizio SFP.78

La rappresentazione simbolica dei numeri naturali nei sistemi di numerazione: aspetti matematici, culturali e didattici.

Esercizio SFP.79

a) Trovare un numero congruo con 17 modulo 7.
b) Trovare un numero congruo con 3 modulo 5 e minore di –10.

Esercizio SFP.80

Il concetto di angolo nella geometria euclidea.

Esercizio SFP.81

Scrivere il numero seguente in base 6 e nel sistema di numerazione egizio, indicando la decomposizione utilizzata: $3\times 6^4+6^3+5\times 6+1$

Esercizio SFP.82

Nel sistema posizionale sessagesimale babilonese, quante posizioni servono a rappresentare il numero 13? E il numero 143? Quanti simboli sono adoperati in ognuna delle posizioni?

Esercizio SFP.83

(a) La ricerca di k e delle cifre a_i nella scrittura posizionale dei numeri interi. Scriva 424 in base 3. Dobbiamo quindi ricercare i gruppi di 3, di 9, di 27, di 81 e di 243. Quante sono le posizioni o cifre che servono a decomporre questo numero? Scrivere la decomposizione del numero ad ogni tappa della ricerca delle cifre. Notare che si tratta di una serie di *divisioni*.
(b) Scrivere 254 in base 7 e in base 2. Quante cifre sono state utilizzate?

Esercizio SFP.84

Calcolare il valore di n:

a) $5000\times n=50$
b) $0{,}005\times n=50$
c) $1-n=0{,}09$
d) $0{,}02:n=2$

Esercizio SFP.85

Completare la tabella:

Frazione ridotta ai minimi termini	Forma decimale	Percentuale
1/2		
1/4		
		60%
	0,32	

(Nota: Gli esercizi 83 e 84 sono tratte dalle prove di concorso di Magistero in Spagna (Madrid, 2011).

Esercizio SFP.86

Siano a e b due numeri naturali che si scrivono nel modo seguente in base quattro (adoperando le quattro cifre 0, 1, 2, 3):

$$a = 101_4 \qquad b = 23_4$$

a) Scrivere a e b in altri due modi: prima in un sistema di numerazione posizionale diverso e poi usando un sistema di numerazione additivo.
b) Esprimere il numero naturale $3 \cdot a - b$ nel sistema di numerazione decimale posizionale.
c) Esiste un numero naturale c tale che $a + c = 0$?
d) b è un numero primo? Giustifichi la sua risposta.
e) La proprietà associativa della moltiplicazione si applica ai numeri naturali scritti in base quattro? Giustificare la risposta.

Esercizio SFP.85

Il principio di induzione matematica.
Spiegare il principio di induzione matematica e il suo ruolo negli assiomi di Peano, e discutere le implicazioni didattiche nella scuola dell'infanzia e primaria.

Esercizio SFP.86

Considerare i seguenti due sottoinsiemi dell'insieme dei numeri naturali ***N***: A è l'insieme dei multipli di 3 e B è l'insieme dei numeri naturali che danno resto 1 nella divisione per 3

$$A = \{3 \cdot k, k \in N\}$$
$$B = \{3 \cdot k + 1, k \in N\}$$

(i) Indicare tre elementi di ognuno di questi insiemi
(ii) Rappresentare graficamente gli insiemi A, B e l'insieme dei numeri naturali ***N*** con un diagramma di Eulero-Venn
(iii) A e B sono disgiunti?
(iv) L'insieme dei multipli di 9 è un sottoinsieme di A?

Esercizio SFP.87

Spiegare la divisione 18 : 5 in **N** e in **Q**. Proporre un esempio della vita quotidiana per illustrare nella scuola primaria la situazione in ognuno dei due insiemi numerici.

Esercizio SFP.88

Discutere i problemi elementari seguenti:

1) Dobbiamo distribuire 27 biscotti a 5 bambini. Quanti per uno?
2) Dobbiamo spezzare un nastro che misura 27 cm in 5 parti uguali. Quanto è lungo ogni pezzo?
3) Cinque tecnici devono sorvegliare una macchina in riparazione per un totale di 27 ore. Quale è la durata del turno di sorveglianza di ogni tecnico.

(Per gli esercizi 87 e 88, cfr. *Pensare in matematica*, § 4.1 e cap. 5)

Esercizio SFP.89

Scrivere il numero 1066_7 nei sistemi di numerazione antichi egizio, babilonese e romano, e usando il sistema di numerazione posizionale in base 3 usando le cifre usuali. Indicare in ogni caso la decomposizione utilizzata per rappresentare simbolicamente il numero.

Esercizio SFP.90

Rappresentare geometricamente la frazione 6/5 in meno tre modi diversi, spiegando quale interpretazioni della frazione mette in primo piano, e proporre per ognuno di essi un problema elementare o una situazione di vita quotidiana che permetta di illustrare tale interpretazione nella scuola primaria.

Esercizio SFP.91

i) Siano a e b due numeri naturali che si scrivono nel modo seguente in base sei (adoperando i simboli 0, 1, 2, 3, 4 e 5):

$$a = 201_6 \qquad b = 24_6$$

a) Scrivere a e b in altri due modi: prima in un sistema di numerazione posizionale diverso e poi usando un sistema di numerazione additivo.
b) Esprimere il numero naturale $5 \cdot a + b$ nel sistema di numerazione decimale posizionale.
c) Esiste un numero naturale c tale che $a \cdot c = 1$?
d) a è un numero pari? Giustificare la risposta.
e) La proprietà associativa della moltiplicazione si applica ai numeri naturali scritti in base sei? Giustificare la risposta.

Esercizio SFP.92

Consideri l'insieme A dei numeri naturali che danno resto 3 nella divisione per 4 e risponda ai quesiti seguenti.

(a) Scriva questo insieme simbolicamente.
(b) Trovi un sottoinsieme di A.
(c) Sia B l'insieme dei multipli di 4. Trovi $A \cap B$.

Esercizio SFP.91

Definizione e proprietà della relazione "maggiore o uguale" nell'insieme dei numeri naturali. È possibile estendere questa definizione agli insiemi Z e Q? Quali proprietà si conservano?

Esercizio SFP.92

L'insieme delle frazioni unitarie ha un elemento minimo? Ha un elemento massimo? Considerare il numero 0,35 e trovare una frazione unitaria minore di questo numero decimale.

Esercizio SFP.93

Spiegare le proprietà di cui godono le operazioni con i numeri naturali e come le loro limitazioni portano ad ampliare il sistema dei numeri della matematica.

Esercizio SFP.94

Dimostri che, dati $z, l \in Z$, se $z \leq l$, allora $-l \leq -z$.

Esercizio SFP.95

Rispondere alle seguenti domande giustificando la risposta sulla base delle definizioni matematiche opportune:

a) l'insieme delle vocali italiane è un insieme finito?
b) l'insieme dei numeri dispari è un insieme numerabile?

Esercizio SFP.96

Dobbiamo impacchettare 224 mele da agricoltura biologica. Abbiamo a disposizione il necessario per preparare confezioni da 6 mele. Studiare l'andamento dei resti in funzione del numero di confezioni preparate.
Quale è il resto minimo? A quale numero di confezioni corrisponde?

Esercizio SFP.97

Il rapporto tra la geometria e l'esperienza e l'insegnamento della matematica nella scuola primaria.

Esercizio SFP.98

e) Perché è necessario estendere il sistema dei numeri della matematica oltre i numeri naturali?

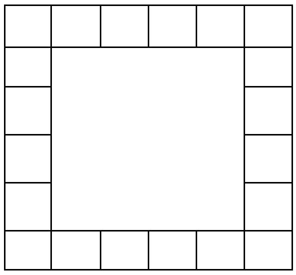
Esercizio SFP.99

f) Spiegare la differenza tra spazio rappresentativo e spazio geometrico secondo il punto di vista di Henri Poincaré sul problema della geometria e la realtà. Discutere le implicazioni di questa distinzione nel lavoro geometrico nella scuola dell'infanzia e primaria.

Esercizio SFP.100

(a) Risolvere il seguente problema elementare.

Attorno a una piscina quadrata di lato 4 si colloca un bordo di piastrelle quadrate di lato 1. Quante piastrelle sono necessarie? E se la piscina ha lato 20?



(b) Risolvere il seguente problema più generale.

Attorno a una piscina quadrata di lato l (con l un numero intero) si colloca un bordo di piastrelle quadrate di lato 1. Si chiede di trovare una regola per calcolare il numero di piastrelle necessarie per costruire il bordo.

(Indicazione: In una regola ricorsiva, si specificano uno o più valori espliciti, e ogni valore successivo è dato in termini del valore o di alcuni valori precedenti. In questo caso:

$$P_1 = 8$$

$$P_l = P_{l-1} + 4,\ l > 1$$

(c) Provare a discutere il ragionamento che permette di ottenere le formule seguenti

a) $(l+2)^2 - l^2$

b) $4(n+2) - 4$

Esercizio SFP.101

La regola ottenuta nell'esercizio precedente stabilisce una relazione fra due variabili: la lunghezza della piscina e il numero di piastrelle necessarie per costruire il bordo di tale piscina. Si tratta di una funzione:

$$P : N \longrightarrow N$$

$$l \longrightarrow P(l) = 4l + 4$$

Il dominio della funzione è l'insieme dei numeri naturali; si tratta quindi di una successione:

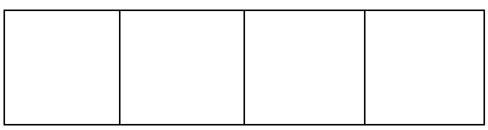
8, 12, 16, 20, 24, …, $4l + 4$, …

Proporre altri esempi di successioni e se possibile, indichi la regola di formazione.

Esercizio SFP.102

Consideri ora, seguendo le stesse indicazioni dell'esercizio 100, il problema seguente:

Per costruire questa fila, di 4 cellette quadrate, quanti stuzzicadenti sono stati usati?



Quanti ne servirebbero, per costruire una fila più lunga, di 50 cellette?

[Un altro enunciato, più generale] *Un contadino costruisce recinti per i suoi animali adoperando pannelli seguendo questo modello. Quanti panelli sono necessari per n animali?*

Consideri le regole ricorsive ed esplicite.

Esercizio SFP.103

Proporre una regola ricorsiva e una formula esplicita per le successioni seguenti:

a) i numeri pari
b) i numeri dispari
c) le potenze di due.

Esercizio SFP.104

Spiegare la costruzione dell'insieme dei numeri razionali Q come estensione dell'insieme dei numeri interi Z.

Esercizio SFP.105

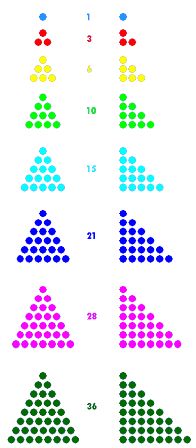
Rappresentare $3 \times 125_6 + 3042_6$ nel sistema decimale posizionale corrente.

Esercizio SFP.106

Scrivere il numero 2.850 in base sessanta.

Esercizio SFP.107

Tra i numeri figurati dei pitagorici vi sono i numeri triangolari. Scrivere una regola ricorsiva per i numeri triangolari (una regola esplicita è stata ottenuta nell'esercizio 62).



Esercizio SFP.108

Rispondere alle seguenti domande giustificando la risposta sulla base delle definizioni matematiche opportune:

(a) L'insieme dei multipli di 5 è un insieme numerabile?
(b) L'insieme dei divisori di 100 è un insieme finito?

Esercizio SFP.109

Scrivere il risultato della divisione 3 : 8 con diverse notazioni proponendo per ognuna di esse un esempio di uso della vita quotidiana.

Esercizio SFP.109

Considerare i numeri naturali seguenti, rappresentati simbolicamente in base 6:

$$n = 113_6 \text{ e } m = 320_6.$$

Calcolare $n+m, n-m, n\times m, m:n$.

Esercizio SFP.110

I concetti geometrici di punto e di retta nella geometria euclidea.

Esercizio SFP.111

Scrivere il numero CXLIII in base 3. Questo numero è multiplo di 3?

Esercizio SFP.113

Discutere il concetto matematico di relazione di equivalenza: definizione, esempi in aritmetica e in geometria e implicazioni didattiche.