Modellistica e Controllo nello Spazio degli Stati

G. Marro

Dipartimento di Elettronica, Informatica e Sistemistica
Università di Bologna, Italy

e-mail: gmarro@deis.unibo.it

PREMESSA

Questo volumetto riporta le linee generali di una trattazione dei sistemi dinamici descritti con equazioni differenziali nelle variabili di stato anziché con funzioni di trasferimento. Esso si compone di due capitoli: il primo è dedicato alla presentazione dei modelli matematici nello spazio degli stati e all'illustrazione del concetto di matrice di transizione dello stato e delle proprietà di stabilità, controllabilità, osservabilità e minimalità, il secondo alla descrizione di alcune realizzazione canoniche particolarmente significative e delle procedure di sintesi dei regolatori nello spazio degli stati, per allocazione di poli e/o zeri.

Una spiegazione sulla terminologia adottata: il termine *spazio degli stati* (non *spazio di stato*) è la traduzione corretta di "state space" – come *spazio degli eventi* è la traduzione corretta di "event space".

Le dimostrazioni più pesanti sono riportate a parte, nei complementi ai diversi capitoli.

Giovanni Marro

Bologna, aprile 2004

INDICE

Premessa i

1 MODELLI NELLO SPAZIO DEGLI STATI E LORO PROPRIETÀ 1

1.1 Lo spazio degli stati 1
1.2 La soluzione numerica delle equazioni differenziali 10
1.2.1 Sistemi non lineari 10
1.2.2 Sistemi lineari non stazionari 14
1.2.3 Sistemi lineari stazionari 16
1.3 Estensioni ai sistemi a tempo discreto 23
1.3.1 I sistemi a dati campionati nello spazio degli stati 24
1.4 Stabilità 26
1.5 Controllabilità e osservabilità 29
1.6 Sistemi equivalenti e realizzazioni 34

C1 COMPLEMENTI AL CAPITOLO 1 40

C1.1 Basi, sottospazi 40
C1.2 Autovalori, autovettori, forma di Jordan 42
C1.2.1 Dalla forma di Jordan complessa a quella reale 46
C1.3 Controllabilità e osservabilità riferite alla forma di Jordan . . . 47
C1.4 Controllabilità e osservabilità dopo il campionamento 51
C1.5 Insieme raggiungibile e insieme inosservabile: sistemi a tempo discreto 53
C1.6 Insieme raggiungibile e insieme inosservabile: sistemi a tempo continuo 55
C1.7 Controllabilità, osservabilità e minimalità 58

2 ALLOCAZIONE DEI POLI E SINTESI DEI REGOLATORI 61

2.1 Alcune realizzazioni canoniche 61
2.2 Dallo spazio degli stati alla funzione di trasferimento 68
2.5.1 Sistemi SISO 68
2.5.2 Sistemi MIMO 71
2.5.3 La risposta armonica 72
2.3 Allocazione dei poli mediante retroazione 74
2.4 La sintesi diretta nello spazio degli stati 80
2.5 Allocazione di n zeri dell' unità stabilizzante e di n poli ad anello chiuso 82

2.6 Esercizi 84

C1 COMPLEMENTI AL CAPITOLO 2 **92**
C2.1 La risposta all'impulso in termini finiti 92
C2.2 Allocazione dei poli nel caso MIMO 95
C2.3 Stabilizzazione con osservatori di ordine ridotto 96

A AUSILI COMPUTAZIONALI IN MATLAB **101**
A.1 Breve prontuario di comandi Matlab 101
A.2 Comandi Matlab relativi ai sistemi lineari stazionari 104

1

MODELLI NELLO SPAZIO DEGLI STATI E LORO PROPRIETÀ

Viene introdotta ed illustrata con alcuni esempi la rappresentazione dei sistemi dinamici nello spazio degli stati. Anche se nel seguito per lo studio dei problemi di regolazione si farà riferimento esclusivamente ai sistemi lineari stazionari, per maggiore generalità si considerano qui anche i sistemi non lineari, stazionari e non, a dimensioni finite, e i sistemi lineari non stazionari, sia a tempo continuo sia a tempo discreto. Si analizzano quindi le principali proprietà dei sistemi dinamici, cioè la stabilità, la controllabilità e l'osservabilità. Per maggiore completezza le definizioni si riferiscono a sistemi relativamente generici (non lineari e non stazionari), ma la trattazione approfondita viene limitata ai sistemi lineari stazionari, a tempo continuo e discreto, la cui analisi conduce ad enunciati particolarmente semplici e intuitivi.

1.1 Lo spazio degli stati

Si indicano con $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ rispettivamente i campi dei numeri reali e complessi, con lettere maiuscole le matrici, reali o complesse, con lettere minuscole i vettori e gli scalari, con lettere greche minuscole gli scalari se nel contesto si può generare confusione con i vettori, con I la generica matrice identità, con I_n la matrice identità $n \times n$. I simboli $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$ rappresentano gli spazi vettoriali delle n-uple di numeri reali e delle n-uple di numeri complessi. In $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$ i vettori vengono normalmente riferiti alla cosiddetta *base principale*, $i_1, \ldots, i_n$, i cui elementi sono le colonne di I_n.

Si consideri il sistema generico Σ rappresentato schematicamente in Fig. 1.1, in cui il simbolo u indica l'*ingresso*, x lo *stato* e y l'*uscita*.

Si suppone che ingresso, stato e uscita siano vettori reali a dimensioni finite,

rispettivamente a p, n e q componenti, cioè che sia $u \in \mathbb{R}^p$, $x \in \mathbb{R}^n$ ed $y \in \mathbb{R}^q$. I vettori u, x ed y si rappresentano generalmente con matrici colonna, rispettivamente $p \times 1$, $n \times 1$ e $q \times 1$, funzioni del tempo. Nel caso frequente in cui il tempo sia una variabile reale, il sistema si dice *a tempo continuo* e tali funzioni si suppongono appartenere alla classe delle funzioni continue a tratti, sufficientemente ampia per i modelli matematici che vengono qui di seguito introdotti. Si hanno, però, anche sistemi *a tempo discreto* (tipicamente i sistemi comprendenti un elaboratore digitale) in cui ingresso, stato e uscita variano ad istanti discreti ed il tempo è rappresentato da un numero intero.

Il valore dello stato in un dato istante è l'informazione necessaria per specificare il comportamento futuro del sistema, a partire da quell'istante; in altri termini lo stato $x(t_0)$, unitamente al segmento di funzione d'ingresso $u|_{[t_0,t_1]}$, determina univocamente il segmento di funzione d'uscita $y|_{[t_0,t_1]}$.

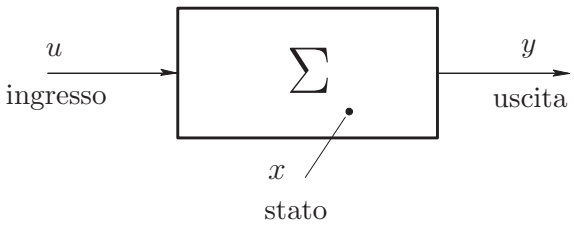


Fig. 1.1. Rappresentazione schematica di un sistema.

Si distinguono *sistemi monovariabili* o SISO (da "single-input, single-output"), in cui è $p = q = 1$, e *sistemi multivariabili* o MIMO (da "multi-input, multi-output"), in cui tale condizione non vale. Ci si limita qui a considerare sistemi *a parametri concentrati*, per i quali appunto lo stato è un vettore a dimensioni finite[1]. I sistemi a parametri concentrati a tempo continuo sono descritti da equazioni differenziali ordinarie, mentre quelli a tempo discreto sono descritti da equazioni alle differenze; i modelli matematici di maggior interesse si possono classificare nei seguenti tipi fondamentali:

- *Sistemi non lineari non stazionari, a tempo continuo e a tempo discreto:*

$$\dot{x}(t) = f\left(x(t), u(t), t\right) \ , \tag{1.1}$$
$$y(t) = g\left(x(t), u(t), t\right) \ ; \tag{1.2}$$

$$x(k+1) = f_d\left(x(k), u(k), k\right) \ , \tag{1.3}$$
$$y(k) = g_d\left(x(k), u(k), k\right) \ ; \tag{1.4}$$

t e k indicano rispettivamente il tempo continuo e quello discreto, mentre f, g e f_d, g_d sono funzioni non lineari con valori rispettivamente in $\mathbb{R}^n$ e in $\mathbb{R}^q$,

[1] Lo stato dei sistemi *a parametri distribuiti* è invece un vettore a dimensione infinita. Ad esempio una sbarra che conduce calore, in cui venga controllata la temperatura ad un'estremità variando quella all'altra estremità, è un sistema a parametri distribuiti, il cui stato è la distribuzione di temperatura lungo la sbarra, rappresentata da una funzione continua (vettore a dimensione infinita).

dette *funzione di evoluzione dello stato* e *funzione di uscita*. Qualora la funzione di uscita non presenti esplicitamente $u(t)$ o $u(k)$ come argomento il sistema si dice *puramente dinamico*. Con $\dot{x}(t)$ si indica la derivata della funzione $x(t)$; l'equazione differenziale (1.1) rappresenta un sistema dinamico solo se ammette un'unica soluzione per ogni stato iniziale.

- *Sistemi non lineari stazionari, a tempo continuo e a tempo discreto:*

$$\dot{x}(t) = f\left(x(t), u(t)\right) \ , \tag{1.5}$$
$$y(t) = g\left(x(t), u(t)\right) \ ; \tag{1.6}$$

$$x(k+1) = f_d\left(x(k), u(k)\right) \ , \tag{1.7}$$
$$y(k) = g_d\left(x(k), u(k)\right) \ . \tag{1.8}$$

- *Sistemi lineari non stazionari, a tempo continuo e a tempo discreto:*

$$\dot{x}(t) = A(t)\,x(t) + B(t)\,u(t) \ , \tag{1.9}$$
$$y(t) = C(t)\,x(t) + D(t)\,u(t) \ ; \tag{1.10}$$

$$x(k+1) = A_d(k)\,x(k) + B_d(k)\,u(k) \ , \tag{1.11}$$
$$y(k) = C_d(t)\,x(k) + D_d(k)\,u(k) \ ; \tag{1.12}$$

nelle $(1.9, 1.10)$ $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ e $D(t)$ sono matrici reali funzioni di t limitate e continue a tratti, mentre nelle $(1.11, 1.12)$ $A_d(k)$, $B_d(k)$, $C_d(k)$ e $D_d(k)$ sono matrici reali limitate per ogni valore di k.

- *Sistemi lineari stazionari, a tempo continuo e a tempo discreto:*

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t) \ , \tag{1.13}$$
$$y(t) = C\,x(t) + D\,u(t) \ ; \tag{1.14}$$

$$x(k+1) = A_d\,x(k) + B_d\,u(k) \ , \tag{1.15}$$
$$y(k) = C_d\,x(k) + D_d\,u(k) \ ; \tag{1.16}$$

si usa indicare un generico sistema lineare stazionario come "sistema (A, B, C, D) o (A_d, B_d, C_d, D_d)" nel caso MIMO e "sistema (A, b, c, d) o (A_d, b_d, c_d, d_d)" nel caso SISO. Le quattro matrici si dicono rispettivamente *matrice del sistema*, *matrice di distribuzione degli ingressi*, *matrice di distribuzione delle uscite* e *matrice del legame algebrico ingresso-uscita*. Nei sistemi puramente dinamici quest'ultima matrice è nulla.

Il significato delle matrici è evidenziato nello schema a blocchi di Fig. 1.2, che si riferisce a un sistema a tempo continuo, in cui i collegamenti multivariabili sono indicati con una doppia linea. Si hanno tre blocchi puramente algebrici e un blocco puramente dinamico, il cui ingresso $f \in \mathbb{R}^n$ viene detto *azione forzante*. Lo schema si riferisce ad un sistema lineare stazionario, ma può considerarsi valido anche nel caso dei sistemi non stazionari, posto che si

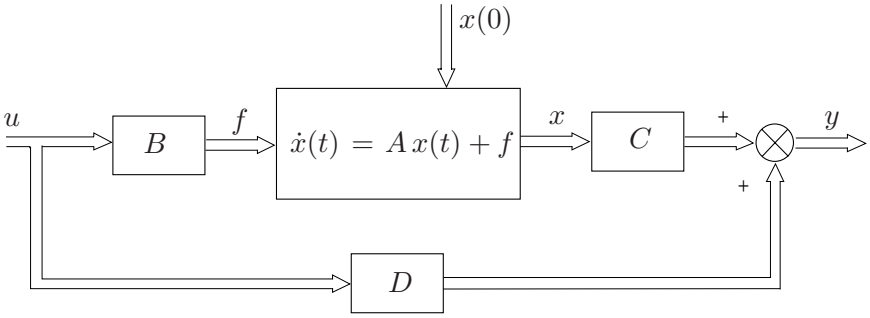


Fig. 1.2. Rappresentazione a blocchi di un sistema lineare stazionario.

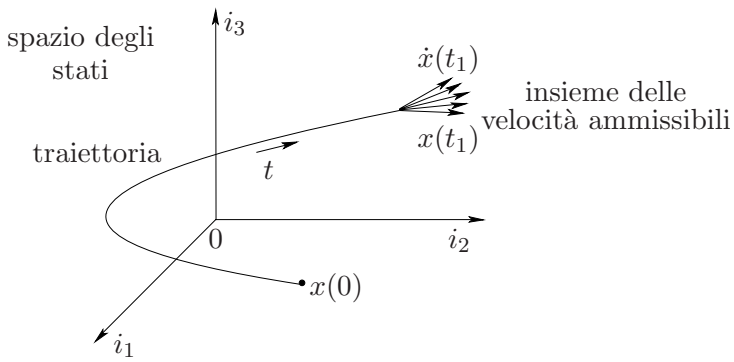


Fig. 1.3. Traiettoria nello spazio degli stati $\mathbb{R}^3$.

sostituiscano le matrici costanti con matrici variabili nel tempo. L'evoluzione nel tempo dello stato dei sistemi dinamici precedenti può essere rappresentata geometricamente con la relativa *traiettoria* nello spazio degli stati $\mathbb{R}^n$, che nel caso dei sistemi a tempo continuo può essere visualizzata come è indicato in Fig. 1.3. Con $i_1, \ldots, i_n$ si indicano le colonne della matrice identità I_n, che rappresentano i versori della *base principale* di $\mathbb{R}^n$, quella a cui normalmente si riferisce lo stato[2]. In figura è mostrato come in un generico stato $x(t_1)$ la *velocità dello stato*, cioè la tangente alla traiettoria, sia assegnabile in un insieme che dipende dalla funzione a secondo membro dell'equazione differenziale che descrive l'evoluzione dello stato. Per i sistemi lineari tale insieme è una varietà lineare (somma di un sottospazio e di un vettore).

Nel caso dei sistemi a tempo discreto la traiettoria nello spazio degli stati è costituita da una successione di punti e la velocità dello stato viene sostituita dalla *differenza prima dello stato* $x(k+1) - x(k)$.

Si presentano ora alcuni esempi di rappresentazioni nello spazio degli stati di sistemi dinamici a tempo continuo.

[2] Si possono peraltro impiegare altre basi, rispetto alle quali la matrice del sistema assume una forma particolare, che semplifica la soluzione dei problemi. Per la trattazione di questo concetto, si vedano i Paragrafi 1.6 e 2.1.

Esempio 1.1.1 - Circuito RLC

Si consideri il circuito RLC di Fig. 1.4. Per dedurne le equazioni nella

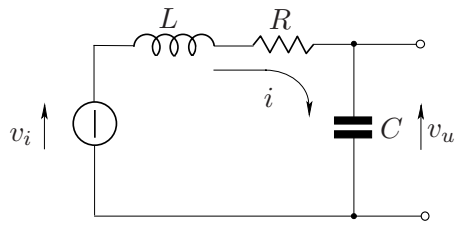


Fig. 1.4. Circuito RLC.

forma (1.13, 1.14) è opportuno scegliere come variabili di stato quelle legate ad accumuli di energia, cioè la corrente nell'induttanza e la tensione ai capi della capacità. Se con $v_R(t)$, $v_L(t)$ e $v_C(t)$ si indicano le cadute di tensione in R, L e C, si ha l'equazione di maglia

$$\begin{aligned} v_i(t) &= v_L(t) + v_R(t) + v_C(t) \\ &= vL\,\frac{d}{dt}\,i(t) + R\,i(t) + v_C(t)\ , \end{aligned}$$

cioè

$$\frac{d}{dt}\,i(t) = -\frac{R}{L}\,i(t) - \frac{1}{L}\,v_C(t) + \frac{1}{L}\,v_i(t)\ . \tag{1.17}$$

Altre relazioni sono:

$$\frac{d}{dt}\,v_C(t) = \frac{1}{C}\,i(t)\ , \tag{1.18}$$

$$v_u(t) = v_C(t)\ . \tag{1.19}$$

Si verifica immediatamente che, posto $u = v_i$, $x = [i\ \ v_C]^T$, $y = v_u$, il sistema è descritto da equazioni del tipo (1.13, 1.14), con

$$A = \begin{bmatrix} -\dfrac{R}{L} & -\dfrac{1}{L} \\ \dfrac{1}{C} & 0 \end{bmatrix}\ ,\quad B = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}\ ,\quad C = [\ 0 \quad 1\ ]\ ,\quad D = [\ 0\ ]\ . \tag{1.20}$$

Esempio 1.1.2 - Rete elettrica a più maglie

Si consideri la rete elettrica a più maglie rappresentata in Fig. 1.5. Essa è descritta dalle equazioni

$$\frac{d}{dt}\,v_1(t) = -\frac{1}{C_1}\,i_4(t)\ ,\qquad i_4(t) = i_3(t) - i_5(t)\ ,$$

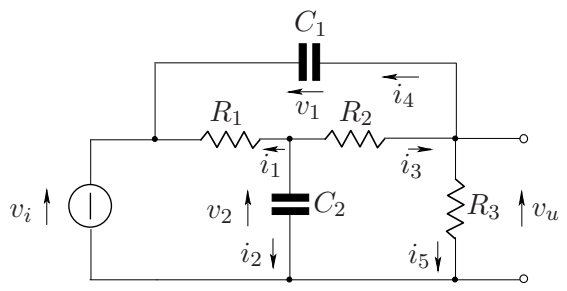


Fig. 1.5. Rete elettrica a più maglie.

$$R_2\, i_3(t) = v_2(t) - (v_i(t) - v_1(t)) \ , \qquad R_3\, i_5(t) = v_i(t) - v_1(t) \ ,$$

$$\frac{d}{dt}\, v_2(t) = \frac{1}{C_2}\, i_2(t) \ , \qquad i_2(t) = -\left(i_1(t) + i_3(t)\right) \ ,$$

$$R_1\, i_1(t) = v_2(t) - v_i(t) \ , \qquad v_u(t) = v_i(t) - v_1(t) \ ,$$

da cui per sostituzioni successive si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\, v_1(t) &= -\frac{1}{C_1}\left(\frac{v_2(t) - v_i(t) + v_1(t)}{R_2} - \frac{v_i(t) - v_1(t)}{R_3}\right) \ , \\ \frac{d}{dt}\, v_2(t) &= -\frac{1}{C_2}\left(\frac{v_2(t) - v_i(t)}{R_1} + \frac{v_2(t) - v_i(t) + v_1(t)}{R_2}\right) \ . \end{aligned}$$

Posto $u = v_i$, $x = [v_1 \ \ v_2]^T$, $y = v_u$, il sistema è descritto da equazioni del tipo (1.13, 1.14), con

$$A = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{C_1}\left(\dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3}\right) & -\dfrac{1}{C_1 R_2} \\ -\dfrac{1}{C_2 R_2} & -\dfrac{1}{C_2}\left(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}\right) \end{bmatrix} \ , \quad B = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{C_1}\left(\dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3}\right) \\ \dfrac{1}{C_2}\left(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}\right) \end{bmatrix} \ ,$$

$$C = [\ -1 \quad 0\ ] \ , \qquad D = [\ 1\ ] \ . \tag{1.21}$$

Si noti che il sistema non è puramente dinamico: infatti eventuali discontinuità della tensione di ingresso si trasmettono sull'uscita attraverso la capacità C_1.

Esempio 1.1.3 - Sistema meccanico

Si consideri il sistema meccanico di Fig. 1.6, composto di due masse M_1 ed M_2, due molle di costanti elastiche K_1 e K_2 e due ammortizzatori aventi coefficienti di attrito viscoso B_1 e B_2. Le variabili in gioco sono la forza applicata f e le posizioni x_1 e x_2 delle masse. Indicando con v_1 e v_2 le velocità

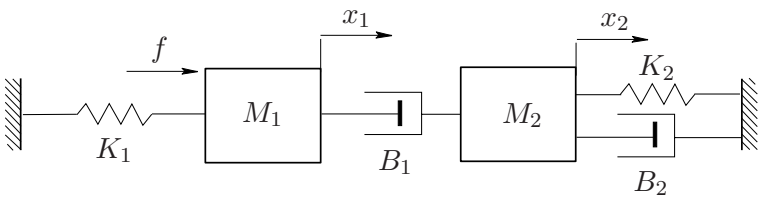


Fig. 1.6. Sistema meccanico

delle masse, si hanno le equazioni

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\,x_1(t) = v_1(t)\ ,\\
&\frac{d}{dt}\,x_2(t) = v_2(t)\ ,\\
&f(t) = M_1\,\frac{d}{dt}\,v_1(t) + K_1\,x_1(t) + B_1\,\left(v_1(t) - v_2(t)\right)\ ,\\
&0 = B_1\,\left(v_2(t) - v_1(t)\right) + M_2\,\frac{d}{dt}\,v_2(t) + K_2\,x_2(t) + B_2\,v_2(t)\ ;
\end{aligned}$$

le prime due di esse esprimono semplicemente il fatto che le velocità sono le derivate degli spostamenti, mentre le ultime due rappresentano gli equilibri delle forze agenti sulle due masse.

Posto $u = f$, $x = [x_1 \quad x_2 \quad v_1 \quad v_2]^T$, $y = [x_1 \quad x_2]^T$, il sistema è descritto da equazioni del tipo (1.13, 1.14) con

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\dfrac{K_1}{M_1} & 0 & -\dfrac{B_1}{M_1} & \dfrac{B_1}{M_1} \\ 0 & -\dfrac{K_2}{M_2} & \dfrac{B_1}{M_2} & -\dfrac{1}{M_2}\,(B_1 + B_2) \end{bmatrix}\ , \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{1}{M_1} \\ 0 \end{bmatrix}\ ,$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\ , \qquad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\ . \tag{1.22}$$

Esempio 1.1.4 - Motore elettrico in corrente continua

Si consideri il motore elettrico in corrente continua controllato in armatura e ad eccitazione costante rappresentato in Fig. 1.7. L'equazione di equilibrio delle forze elettromotrici nella maglia e quella di equilibrio delle coppie all'albero sono:

$$\begin{aligned}
v_a(t) &= L_a\,\frac{d}{dt}\,i_a(t) + R_a\,i_a(t) + k_1\,\omega(t)\ ,\\
k_2\,i_a(t) &= B\,\omega(t) + J\,\frac{d}{dt}\,\omega(t) + c_r(t)\ ,
\end{aligned}$$

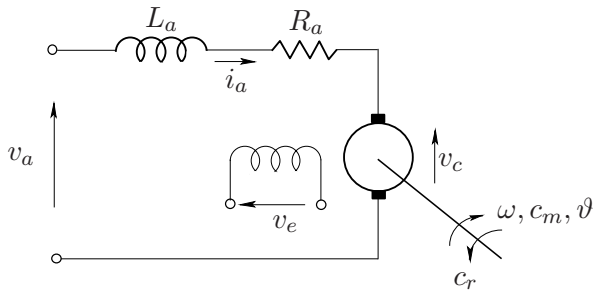


Fig. 1.7. Motore elettrico in corrente continua.

dove k_1 e k_2 indicano rispettivamente il coefficiente della forza controelettromotrice d'armatura e quello della coppia all'albero (legati da un coefficiente di proporzionalità), B il coefficiente d'attrito viscoso dei cuscinetti e J il momento d'inerzia della massa rotante. Si suppone che come variabile di uscita interessi la posizione angolare θ dell'albero: si aggiunge pertanto l'equazione

$$\frac{d}{dt}\,\theta(t) = \omega(t)\ .$$

Posto $u = [v_a \quad c_r]^T$, $x = [i_a \quad \omega \quad \theta]^T$, $y = \theta$, il sistema è descritto da equazioni del tipo (1.13, 1.14), con

$$A = \begin{bmatrix} -\dfrac{R_a}{L_a} & -\dfrac{k_1}{L_a} & 0 \\ \dfrac{k_2}{J} & -\dfrac{B}{J} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{L_a} & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{J} \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C = [\ 0 \quad 0 \quad 1\ ]\ , \qquad D = [\ 0\ ]\ . \tag{1.23}$$

Esempio 1.1.5 - Impianto idraulico

Come esempio di sistema non lineare, si consideri l'impianto idraulico di Fig. 1.8, costituito da un serbatoio, collegato mediante una galleria in pressione ad un pozzo piezometrico, a sua volta collegato ad una turbina mediante una condotta forzata; il pozzo piezometrico presenta una strozzatura alla base avente la funzione di aumentare lo smorzamento delle oscillazioni del livello dell'acqua. Il significato dei simboli è il seguente:

z_1	livello del pelo libero dell'acqua nel serbatoio;
z	livello dell'acqua nel pozzo;
$F(z)$	area della sezione trasversale del pozzo, supposta variabile;
z_2	carico piezometrico a valle della galleria;
q	portata nella galleria;
q_1	portata entrante nel pozzo;
q_2	portata nella condotta forzata.

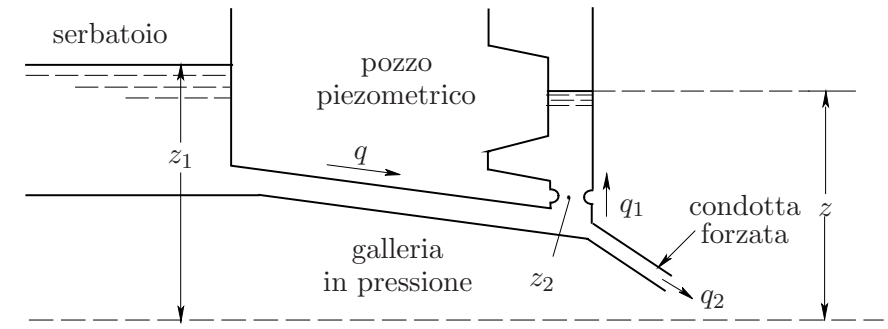


Fig. 1.8. Impianto idraulico.

Si suppone che l'effetto dell'inerzia dell'acqua nel pozzo sia trascurabile. Il sistema è descritto dalle seguenti equazioni, che si possono denominare rispettivamente equazione della galleria, equazione della strozzatura alla base del pozzo, equazione del pozzo ed equazione di continuità delle portate al nodo:

$$
\begin{aligned}
& k_2\ (z_1(t) - z_2(t)) = k_1\, q(t)\, |q(t)| + \frac{d}{dt} q(t)\ , \\
& z_2(t) - z(t) = k_3\, q_1(t)\, |q_1(t)|\ , \\
& \frac{d}{dt} z(t) = \frac{1}{F(z)}\, q_1(t)\ , \\
& q_1(t) = q(t) - q_2(t)\ ,
\end{aligned}
$$

in cui k_1, k_2 e k_3 indicano opportune costanti. Eliminando le variabili z_2 e q_1, si ottengono le due equazioni differenziali del primo ordine:

$$
\frac{d}{dt} q(t) \ = \ -k_1\, q(t)\, |q(t)| + k_2 \Big(z_1(t) - z(t) - k_3\ (q(t) - q_2(t))\ |q(t) - q_2(t)| \Big)\ , \tag{1.24}
$$

$$
\frac{d}{dt} z(t) \ = \ \frac{1}{F(z)}\ (q(t) - q_2(t))\ . \tag{1.25}
$$

Si assume come variabile d'uscita z_2, il carico piezometrico a monte della condotta forzata, cui è direttamente legata la potenza dell'impianto; essa è espressa dall'ulteriore equazione:

$$
z_2(t) = z(t) + k_3\ (q(t) - q_2(t))\ |q(t) - q_2(t)|\ . \tag{1.26}
$$

Il livello dell'acqua nel serbatoio si suppone costante. Si pone $u = q_2$, $x = [q \quad z]^T$, $y = z_2$; il sistema è descritto da equazioni del tipo (1.5, 1.6) con la funzione vettore f data dai secondi membri delle (1.24, 1.25) e la funzione scalare g data dal secondo membro della (1.26).

Modelli normalizzati. Spesso le equazioni vengono riferite a variabili adimensionali, cioè rapportate ad un particolare valore del loro campo di variabilità (in genere il massimo in modulo, per ottenere valori limitati all'intervallo $[-1, 1]$). Ciò si traduce nella confrontabilità diretta dei coefficienti che ne rappresentano l'influenza sull'evoluzione del sistema. Ad esempio, nel caso del motore in corrente continua dell'Esempio 1.1.4, ponendo

$$\bar{\imath}_a = \frac{i_a}{I_a} \ , \quad \bar{\omega} = \frac{\omega}{\Omega} \ , \quad \bar{\vartheta} = \frac{\vartheta}{\Theta} \ , \quad \bar{v}_a = \frac{v_a}{V_a} \ , \quad \bar{c}_r = \frac{c_r}{C_r} \ ,$$

si ottiene in tali variabili un modello dello stesso tipo di quello espresso dalle (1.13,1.14,1.23), ma con le matrici

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} -\dfrac{R_a}{L_a} & -\dfrac{k_1 \Omega}{L_a I_a} & 0 \\ \dfrac{k_2 I_a}{J\,\Omega} & -\dfrac{B}{J} & 0 \\ 0 & \dfrac{\Omega}{\Theta} & 0 \end{bmatrix} \ , \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} \dfrac{V_a}{L_a I_a} & 0 \\ 0 & -\dfrac{C_r}{J\,\Omega} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \ ,$$

$$\bar{C} = [\ 0 \quad 0 \quad 1\ ] \ , \qquad \bar{D} = [\ 0\ ] \ .$$

I coefficienti delle matrici $\bar{A}$ e $\bar{B}$ hanno le dimensioni dell'inverso del tempo, in accordo con il fatto che a primo membro della (1.13) compare ora la derivata rispetto al tempo di una variabile adimensionale, mentre quelli delle matrici $\bar{C}$ e $\bar{D}$ sono adimensionali.

1.2 La soluzione numerica delle equazioni differenziali

In questo paragrafo si passano in rassegna i procedimenti per la soluzione delle equazioni differenziali dei tipi precedentemente utilizzati per la rappresentazione dei sistemi a tempo continuo.

1.2.1 Sistemi non lineari

Si ricorda che un teorema di esistenza e unicità stabilisce che l'equazione differenziale

$$\dot{x}(t) = f\,(x(t), t) \tag{1.27}$$

ammette un'unica soluzione $x(t)$, $t \geq t_0$, per ogni stato iniziale assegnato $x(t_0)$ se la funzione $f(x, t)$ è lipschitziana, cioè se

$$\|f(x_1, t) - f(x_2, t)\| \leq k(t)\,\|x_1 - x_2\| \quad \forall\, x_1, x_2\,, \tag{1.28}$$

con $k(t)$ limitata e continua a tratti; la soluzione $x(t)$ è una funzione continua[3].

Una volta assegnato il segmento di funzione di ingresso $u|_{[t_0,t_1]}$, relativo all'intervallo di tempo in cui interessa integrare l'equazione differenziale del sistema, per sostituzione le equazioni differenziali (1.1) e (1.5) vengono poste nella forma (1.27). Dato che per ovvie ragioni fisiche il modello matematico deve garantire l'unicità dell'evoluzione dello stato, si suppone che, eseguita tale sostituzione, si ottenga una funzione lipschitziana.

Per la soluzione della (1.27) si possono seguire due procedimenti fondamentali, che verranno brevemente descritti: la determinazione di $x(t)$ per approssimazioni successive e l'approssimazione locale della equazione differenziale con un'equazione alle differenze finite. Il secondo metodo è il più diffuso per la soluzione con elaboratore digitale ed ampiamente trattato nell'ambito dell'analisi numerica (metodi di Runge-Kutta).

Successione di funzioni convergente alla soluzione. Come corollario alla dimostrazione del teorema sull'esistenza ed unicità della soluzione della (1.27) si prova che la successione di funzioni (detta di Peano-Picard)

$$\begin{aligned} x_0(t) &= x_0 \ , \\ x_i(t) &= x_0 + \int_{t_0}^{t} f\left(x_{i-1}(\tau), \tau\right) \, d\tau \quad (i = 1, 2, \dots) \ , \end{aligned} \tag{1.29}$$

converge uniformemente in norma alla soluzione $x(t)$ della (1.27) per $t \in [t_0, t_1]$, con t_1 arbitrario.

La soluzione si può pertanto calcolare come limite di tale successione; si consideri peraltro che, per un dato t, la convergenza di $x_i(t)$ ad $x(t)$ è tanto più lenta quanto più grande è l'intervallo $[t_0, t]$. Le funzioni vengono memorizzate nei calcolatori come sequenze di valori: si indica con h il passo di discretizzazione scelto, da cui, ovviamente, dipende la precisione del calcolo. Siano $t_0, t_1, \dots, t_n$ i valori del tempo discretizzato; i metodi numerici più comuni per il calcolo di un integrale sono il *metodo dei rettangoli*, che per ogni intervallo elementare usa l'approssimazione:

$$\int_{t_0}^{t_n} f(t) \, dt \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i) \, h \ ,$$

[3] Con $\|x\|$ si conviene di indicare la norma euclidea del vettore generico x, che in $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$ si definisce con la relazione

$$\|x\| = \sqrt{\sum\nolimits_{i=1}^{n} |x_i|^2} \ ,$$

mentre negli spazi funzionali delle funzioni del tempo $f|_{[t_0,t_1]}$, continue a tratti e con valori in $\mathbb{R}^n$ o in $\mathbb{C}^n$ la norma euclidea è

$$\|f_{[t_0,t_1]}\| = \sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \|f(t)\|^2 \, dt} \ .$$

quello *dei trapezi*, basato sulla

$$\int_{t_0}^{t_n} f(t)\,dt \approx \sum_{i=0}^{n-1} \left(f(t_i) + f(t_{i+1})\right) \frac{h}{2}$$
$$= \left(f(t_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(t_i) + f(t_n)\right) \frac{h}{2} \ ,$$

che corrisponde all'interpolazione lineare della funzione data nell'intervallo elementare, e la *regola di Simpson*, basata sull'interpolazione quadratica. Essa richiede che n sia pari (cioè che il numero di valori della funzione impiegati per il calcolo dell'integrale sia dispari) ed è espressa dalla relazione

$$\int_{t_0}^{t_n} f(t)\,dt \approx \sum_{i=0}^{n/2-1} \left(f(t_{2i}) + 4\,f(t_{2i+1}) + f(t_{2i+2})\right) \frac{h}{3}$$
$$= \left(f(t_0) + 4\sum_{i=1}^{n/2} f(t_{2i-1}) + 2\sum_{i=1}^{n/2-1} f(t_{2i}) + f(t_n)\right) \frac{h}{3} \ .$$

Metodi di Runge-Kutta. Una successione che approssima i valori assunti dalla soluzione della (1.27) negli istanti $t_0, t_1, \ldots,$ corrispondenti al passo di discretizzazione h, si può ottenere con la relazione ricorrente

$$x(t_{i+1}) = x(t_i) + f\left(x(t_i), t_i\right)\, h \quad (i = 0, \ldots, n-1) \ , \tag{1.30}$$

in cui la derivata è stata sostituita con il rapporto incrementale. Si noti che il secondo membro della (1.30) riporta i primi due termini dello sviluppo in serie di Taylor di $x(t)$ in t_i, con la derivata prima espressa utilizzando la (1.27). I metodi di Runge-Kutta approssimano lo sviluppo in serie di Taylor

$$x(t_{i+1}) = x(t_i) + \dot{x}(t_i)\,h + \ddot{x}(t_i)\,\frac{h^2}{2!} + \ \ldots$$

sostituendovi le derivate di ordine superiore al primo con un'opportuna combinazione lineare dei valori della derivata prima, calcolati in vari punti dell'intervallo elementare. Ad esempio, il metodo di Runge-Kutta del terzo ordine consiste nella relazione:

$$x(t_i + h) = x(t_i) + (S_1 + 4\,S_3 + S_2)\,\frac{h}{6} \ ,$$

con

$$\begin{aligned} S_1 &= f\left(x(t_i), t_i\right) \ , \\ S_2 &= f\left(x(t_i) + S_1 h, t_i + h\right) \ , \\ S_3 &= f\left(x(t_i) + (S_1 + S_2)\,h/4, t_i + h/2\right) \ . \end{aligned}$$

Nelle applicazioni più sofisticate dei metodi di Runge-Kutta il valore di h viene variato ad ogni passo per mantenere l'errore entro un prefissato limite di tolleranza. Se si desidera una discretizzazione uniforme del tempo si esegue successivamente un'opportuna interpolazione dei valori ottenuti.

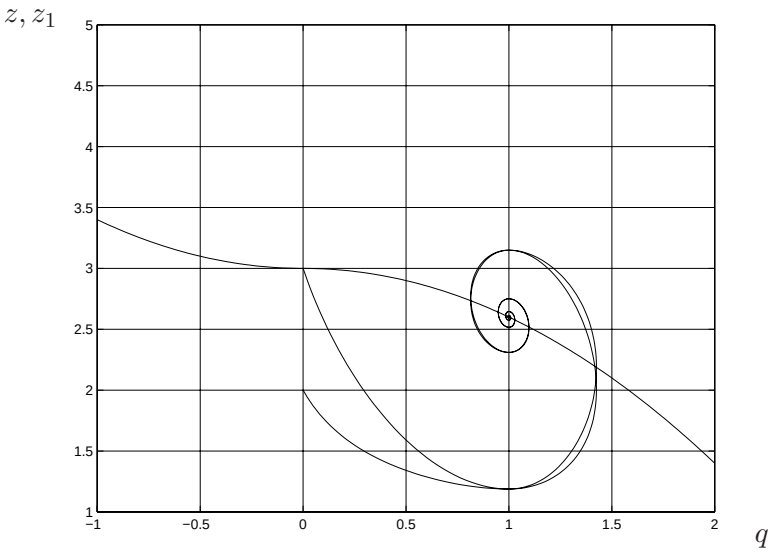


Fig. 1.9. Manovra di apertura nell'impianto idraulico di Fig. 1.8.

Esempio 1.2.1 - Impianto idraulico
Si considera ancora l'impianto idraulico di Fig. 1.8, descritto dalle equazioni (1.24–1.26). Si assumono i seguenti valori adimensionali: $z_1 = 3$, $F(z) = \text{cost.} = 0,2$, $k_1 = 0,4$, $k_2 = k_3 = 1$. Si analizza dapprima il risultato di una *manovra di apertura*, immaginando che il sistema si trovi nello stato di equilibrio corrispondente a $q_2 = 0$ e si vari improvvisamente la portata in centrale portandola a $q_2 = 1$. Si impiega il metodo di Runge-Kutta del terzo ordine nell'intervallo $t \in [0, 20]$ con passo di discretizzazione fisso $h = 0,05$, relativamente piccolo al fine di ottenere una buona restituzione grafica senza bisogno di alcuna interpolazione. Il luogo degli stati di equilibrio si ottiene ponendo uguali a zero i primi membri delle (1.24,1.25). Si ottiene la relazione

$$z = z_1 - \frac{k_1}{k_2} q \, |q| \ ,$$

che rappresenta una curva nel piano degli stati q, z. Per $q = q_1 = 0$ si ha $z = z_1 = 3$. In Fig. 1.9 sono riportati gli andamenti delle variabili di stato in funzione del tempo e le traiettorie q, z e q, z_2 nel piano degli stati, in cui è rappresentata anche la curva degli stati di equilibrio. Le traiettorie tendono allo stato di equilibrio $q = 1$, $z = 2,6$. In Fig. 1.10 è riportata la *manovra di chiusura* a partire da tale stato di equilibrio, consistente nel repentino annullarsi della portata in centrale ($q_2 = 0$), calcolata nell'intervallo $t \in [0, 50]$ con lo stesso metodo e lo stesso passo di discretizzazione $h = 0,05$. Si noti che, in conseguenza della nonlinearità della resistenza idraulica (la relazione che lega la portata alla differenza di carico è di tipo quadratico), le oscillazioni in questo secondo caso sono molto meno smorzate.

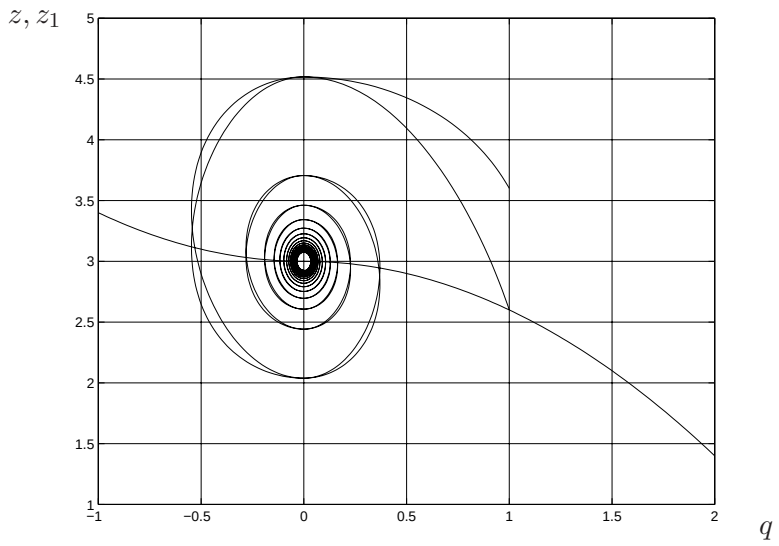


Fig. 1.10. Manovra di chiusura nell'impianto idraulico di Fig. 1.8.

1.2.2 Sistemi lineari non stazionari

In primo luogo si considera il sistema lineare non stazionario omogeneo

$$\dot{x}(t) = A(t)\, x(t)\,, \quad x(t_0) = x_0\ , \tag{1.31}$$

in cui $x(t)$ è un vettore colonna $(n \times 1)$, $A(t)$ una matrice reale $n \times n$ di funzioni del tempo continue a tratti. In relazione a tale sistema si definisce la *matrice di transizione dello stato* $\Phi(t, t_0)$ come la matrice $n \times n$ avente come colonne le n soluzioni della (1.31) corrispondenti alle condizioni iniziali $x(t_0) = i_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, in cui i_i indica l'i-esima colonna della matrice identità I_n. La matrice di transizione dello stato soddisfa chiaramente l'equazione differenziale

$$\dot{\Phi}(t, t_0) = A(t)\, \Phi(t, t_0)\,, \quad \Phi(t_0, t_0) = I_n\ . \tag{1.32}$$

Per linearità la soluzione della (1.31) è

$$x(t) = \Phi(t, t_0)\, x_0\ ; \tag{1.33}$$

la matrice di transizione dello stato consente pertanto di determinare ogni soluzione della (1.31): essa rappresenta il legame lineare fra lo stato all'istante t_0 e lo stato all'istante t. Le sue principali proprietà sono:

1. *nonsingolarità* per ogni coppia (t, t_0);
2. *invertibilità*: $\Phi(t, t_0) = \Phi^{-1}(t_0, t)$;
3. *componibilità*: $\Phi(t, t_0) = \Phi(t, t_1)\, \Phi(t_1, t_0)$.

La matrice di transizione dello stato si può determinare come limite della successione di Peano-Baker

$$\begin{aligned} \Phi_0(t,t_0) &= I \quad , \\ \Phi_i(t,t_0) &= I + \int_{t_0}^{t} A(\tau)\,\Phi_{i-1}(\tau,t_0)\,d\tau \quad (i=1,2,\dots)\ , \end{aligned} \tag{1.34}$$

che si ricava immediatamente dalla (1.29). In alternativa, anche in questo caso si possono usare i metodi di Runge-Kutta.

Si considera ora il sistema lineare non stazionario non omogeneo

$$\dot{x}(t) = A(t)\,x(t) + B(t)\,u(t)\,, \quad x(t_0) = x_0\ . \tag{1.35}$$

La soluzione della (1.35) in $[t_0,t_1]$, una volta assegnata la funzione di ingresso $u|_{[t_0,t_1]}$, è data dalla relazione

$$x(t) = \Phi(t,t_0)\,x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)\,B(\tau)\,u(\tau)\,d\tau\ , \tag{1.36}$$

in cui il primo termine a secondo membro rappresenta evidentemente il moto libero e il secondo il moto forzato, che si sommano per la linearità del sistema.

Dimostrazione della (1.36). Data una matrice generica $X(t)$ non singolare funzione del tempo, derivando l'identità $X^{-1}(t)\,X(t) = I$ si ottiene

$$\frac{d}{dt}X^{-1}(t) = -X^{-1}(t)\,\dot{X}(t)\,X^{-1}(t)\ ;$$

quindi, per sostituzione di $X(t)$ con $\Phi(t,t_0)$ risulta

$$\frac{d}{dt}\left(\Phi^{-1}(t,t_0)\,x(t)\right) = -\Phi^{-1}(t,t_0)\,\dot{\Phi}(t,t_0)\,\Phi^{-1}(t,t_0)\,x(t) + \Phi^{-1}(t,t_0)\,\dot{x}(t)\ .$$

Tenendo conto della (1.32) e della (1.35) si ricava

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\Phi^{-1}(t,t_0)\,x(t)\right) &= \Phi^{-1}(t,t_0)\,\left(\dot{x}(t) - A(t)\,x(t)\right) \\ &= \Phi^{-1}(t,t_0)\,B(t)\,u(t)\ , \end{aligned}$$

e, integrando, si ha

$$\Phi^{-1}(t,t_0)\,x(t) = c + \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(\tau,t_0)\,B(\tau)\,u(\tau)\,d\tau\ ,$$

in cui c è un vettore costante dipendente dalla condizione iniziale. Utilizzando le proprietà di invertibilità e componibilità della matrice di transizione dello stato, è immediato verificare che la formula precedente equivale alla (1.36).

Si consideri ora il sistema complessivo (1.9, 1.10): con ovvie sostituzioni si ricava

$$y(t) = C(t)\,\Phi(t,t_0)\,x_0 + C(t)\int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)\,B(\tau)\,u(\tau)\,d\tau + D(t)\,u(t)\ . \tag{1.37}$$

Gli integrali a secondo membro delle (1.36) e (1.37) sono *integrali di convoluzione*, i cui *nuclei* sono le funzioni $\Phi(t,\tau)\,B(\tau)$ e $C(t)\,\Phi(t,\tau)\,B(\tau)$. Le matrici

$$V(t,\tau) = \Phi(t,\tau)\,B(\tau)\ , \tag{1.38}$$

$$W(t,\tau) = C(t)\,\Phi(t,\tau)\,B(\tau) + D(\tau)\,\delta(t-\tau)\ , \tag{1.39}$$

dette rispettivamente *matrice di risposta all'impulso ingresso-stato* e *matrice di risposta all'impulso ingresso-uscita* o semplicemente *matrice di risposta all'impulso* del sistema, forniscono l'effetto sullo stato e sull'uscita, all'istante t, di un impulso di Dirac unitario applicato all'istante τ. Si noti che gli integrali di convoluzione rappresentano funzioni lineari da uno spazio vettoriale a dimensione infinita ad uno spazio vettoriale a dimensione finita.

1.2.3 Sistemi lineari stazionari

Il caso in cui la soluzione si semplifica notevolmente, fino ad essere esprimibile in termini finiti, è quello del sistema lineare stazionario omogeneo

$$\dot{x}(t) = A\,x(t)\,, \quad x(0) = x_0\,, \tag{1.40}$$

in cui la matrice di transizione dello stato coincide con l' *esponenziale di matrice*, cioè

$$\Phi(t,0) = e^{At} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i t^i}{i\,!} = I + A\,t + \frac{A^2t^2}{2} + \frac{A^3t^3}{3!} + \dots\ ; \tag{1.41}$$

si noti che l'esponenziale di matrice è definita attraverso la serie di potenze che corrisponde all'esponenziale scalare. La (1.41) si ricava immediatamente dalla (1.34) per A costante. La serie converge in norma per ogni t[4]. Infatti, posto

[4] Una norma di matrice (o, più in generale, di trasformazione lineare) è un numero reale che consente una stima per eccesso della norma del vettore ottenuto in funzione di quella del vettore cui è applicata la trasformazione. Le norme di trasformazione lineare soddisfano le relazioni:

$$\|A\| \geq \sup_{\|x\|=1} \|A\,x\| \quad \forall\, x\ ,$$

$$\|\alpha\,A\| = |\alpha|\|A\| \quad \forall\, \alpha\ ,$$

da cui seguono le

$$\|A\,x\| \leq \|A\|\,\|x\| \quad \forall\, x\ ,$$

$m = \|A\|$, per cui è $\|A^i\| \leq m^i$, segue

$$\Big\|\sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i t^i}{i\,!}\Big\| \leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\|A^i\||t^i|}{i\,!} \leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{m^i |t^i|}{i\,!} = e^{m|t|} \ .$$

Un artifizio computazionale. La (1.41) può essere impiegata per il calcolo numerico dell'esponenziale di matrice; tuttavia essa richiede numerose moltiplicazioni e comporta un errore di troncamento fortemente legato alle proprietà della matrice A. Per migliorare la precisione spesso si introduce una messa in scala preliminare. Ad esempio, si divide per 2 ripetutamente la matrice A finché non sia soddisfatta la condizione $\|At\| < 1/2$; sia $q \geq 0$ il numero di tali divisioni. Si applica quindi lo sviluppo in oggetto finché la differenza in norma fra due somme parziali consecutive non sia uguale allo zero di macchina e si esegue la messa in scala inversa elevando al quadrato q volte il risultato ottenuto. Risulta infatti

$$e^{At} = \left(e^{At/2^q}\right)^{2^q} \ .$$

Al Paragrafo C1.2 si mostra, mediante la forma canonica di Jordan, che l'esponenziale di matrice, quindi la soluzione del sistema (1.40), è anche esprimibile in termini finiti.

Si considera, infine, il sistema lineare stazionario non omogeneo

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t)\,, \quad x(0) = x_0 \ ; \tag{1.42}$$

applicando la (1.36) si deduce

$$x(t) = e^{At}\,x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}\,B\,u(\tau)\,d\tau \ , \tag{1.43}$$

mentre per il sistema complessivo descritto dalle (1.13, 1.14) risulta

$$y(t) = C\,e^{At}\,x_0 + C\int_0^t e^{A(t-\tau)}\,B\,u(\tau)\,d\tau + D\,u(t) \ . \tag{1.44}$$

Nel caso dei sistemi stazionari la matrice di risposta all'impulso ingresso-stato e la matrice di risposta all'impulso ingresso-uscita si definiscono assumendo

---

$$\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\| \ ,$$
$$\|A\,B\| \leq \|A\|\,\|B\| \ .$$

Una norma di matrice di frequente impiego è la *norma di Frobenius*:

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2} \ .$$

che l'impulso di Dirac venga applicato all'istante zero, per cui dipendono da un solo parametro (il tempo t al quale ne rappresentano l'effetto); esse sono espresse dalle relazioni

$$V(t) = e^{At}\,B\ , \tag{1.45}$$

$$W(t) = C\,e^{At}\,B + D\,\delta(t)\ . \tag{1.46}$$

Il calcolo numerico dell'integrale di convoluzione a secondo membro delle (1.43, 1.44) si può effettuare con due procedimenti: l'approssimazione del continuo con il discreto e l'uso di un esosistema. La seconda tecnica risulta particolarmente interessante in relazione alla sintesi di sistemi di controllo, in cui in genere ci si riferisce a segnali di saggio elementari che si possono esprimere come soluzioni di sistemi differenziali lineari stazionari omogenei.

Approssimazione del continuo con il discreto. Si approssima il segnale di ingresso con quello di Fig. 1.11, consistente in una funzione costante a tratti, corrispondente al passo di discretizzazione arbitrario T.

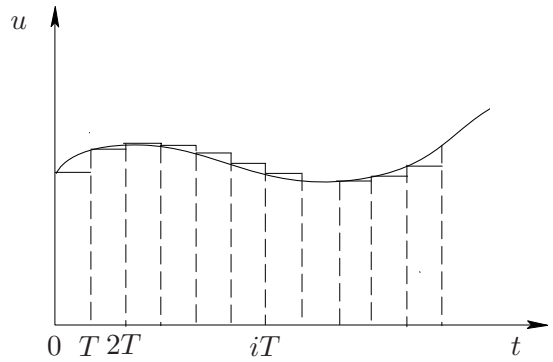


Fig. 1.11. Approssimazione con una funzione costante a tratti.

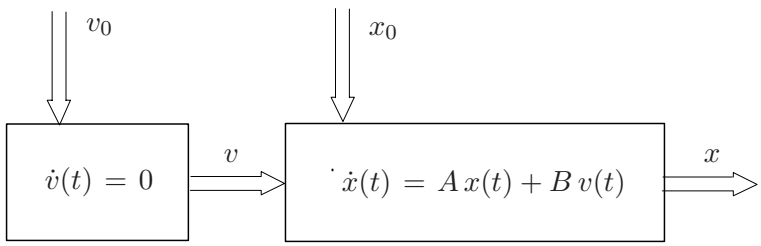


Fig. 1.12. Simulazione di un ingresso a gradino ottenuta per estensione del sistema.

Per determinare lo stato negli stessi istanti discreti in cui varia l'ingresso si utilizza la relazione ricorrente

$$x((k+1)T) = N\,x(kT) + M\,u(kT) \quad (k=0,1,\dots)\ , \tag{1.47}$$

in cui è

$$N = e^{AT} \ , \tag{1.48}$$

$$M = \int_0^T e^{A(T-\tau)} \, B \, d\tau \ , \tag{1.49}$$

o anche, eseguendo semplici passaggi,

$$M = \Big(\int_0^T e^{A(T-\tau)} \, d\tau \Big) \, B = -\Big(\int_T^0 e^{A\rho} \, d\rho \Big) \, B = \Big(\int_0^T e^{A\tau} \, d\tau \Big) \, B \ .$$

Il calcolo di M si può effettuare mediante un artifizio, che lo riconduce a quello di un' esponenziale di matrice. Si consideri il complesso di Fig. 1.12, in cui l' applicazione del gradino è simulata con uno stadio di integratori, che forniscono al sistema (1.42) un segnale v costante e uguale alla condizione iniziale v_0. Risulta

$$x(T) = e^{AT} \, x_0 + \Big(\int_0^T e^{A(T-\tau)} \, B \, d\tau \Big) \, v_0 = N \, x_0 + M \, v_0 \ . \tag{1.50}$$

Il complesso corrisponde peraltro al *sistema esteso*

$$\dot{\hat{x}}(t) = \hat{A} \hat{x}(t) \, , \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0 \ , \tag{1.51}$$

chiaramente omogeneo (privo di ingresso), con stato, matrice del sistema e stato iniziale definiti dalle relazioni

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} \ , \quad \hat{A} = \begin{bmatrix} A & B \\ O & O \end{bmatrix} \ , \quad \hat{x}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \ . \tag{1.52}$$

L' evoluzione nel tempo dello stato del sistema esteso è data da $e^{\hat{A}t} \hat{x}_0$: il confronto della (1.50) con la (1.52) fornisce

$$e^{\hat{A}T} = \begin{bmatrix} e^{AT} & \int_0^T e^{A(T-\tau)} \, B \, d\tau \\ O & I_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N & M \\ O & I_p \end{bmatrix} \ ,$$

relazione da cui risulta che N ed M si possono determinare come sottomatrici di un' esponenziale di matrice.

Come ottenere un' approssimazione migliore. In Fig. 1.13 è riportata una diversa approssimazione del segnale di ingresso, l' interpolazione lineare, che in ogni singolo passo si riconduce alla somma di un gradino e una rampa.

A partire dallo stato zero, il valore dello stato all' istante T conseguente all' applicazione di un gradino unitario è dato dalla matrice M definita nella (1.49), mentre quello conseguente all' applicazione di una rampa di pendenza unitaria è

$$M_1 = \int_0^T e^{A(t-\tau)} \, B \, \tau \, d\tau \ . \tag{1.53}$$

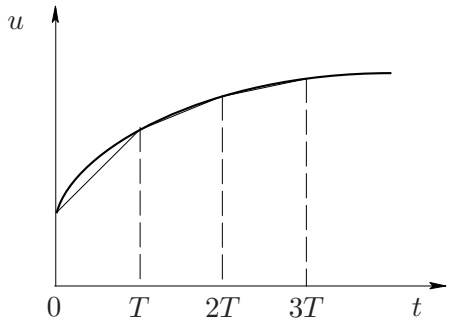


Fig. 1.13. Approssimazione con una funzione lineare a tratti.

Lo stato negli istanti corrispondenti alla discretizzazione con passo T si determina con la relazione ricorrente

$$x((k+1)T) = N\,x(kT)+M\,u(kT)+M_1\,\frac{1}{T}\,(u((k+1)T)-u(kT)) \quad (k=0,1,\dots)\,, \tag{1.54}$$

in cui le matrici a secondo membro si possono ricavare considerando un sistema esteso simile a quello di Fig. 1.12, ma con due stadi di integratori in cascata sull'ingresso anziché uno. Siano r e v i relativi stati: tale sistema esteso si può descrivere ancora con la (1.51), ridefinendo lo stato, la matrice del sistema e lo stato iniziale come

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} x \\ v \\ r \end{bmatrix}\,, \quad \hat{A} = \begin{bmatrix} A & B & O \\ O & O & I_p \\ O & O & O \end{bmatrix}\,, \quad \hat{x}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ v_0 \\ r_0 \end{bmatrix}\,. \tag{1.55}$$

L'esponenziale della matrice $\hat{A}T$ soddisfa l'uguaglianza

$$e^{\hat{A}T} = \begin{bmatrix} N & M & M_1 \\ O & I_p & T\,I_p \\ O & O & I_p \end{bmatrix}\,,$$

che suggerisce un procedimento di calcolo per N, M ed M_1.

Uso di un esosistema. L'uso di un esosistema per riprodurre particolari segnali non è che la generalizzazione dell'artifizio appena introdotto per calcolare l'effetto di gradini e rampe. Come è noto, per saggiare il comportamento dei sistemi dinamici si impiegano i *segnali di saggio* che presentano il vantaggio di essere generati da semplici sistemi lineari stazionari omogenei. Tipici segnali di saggio sono il gradino, la rampa e la sinusoide rappresentati in Fig. 1.14. L'esosistema è descritto dalle equazioni

$$\dot{v}(t) = W\,v(t)\,, \quad v(0) = v_0\,, \tag{1.56}$$

$$u(t) = \ell\,v(t)\,, \tag{1.57}$$

in cui le matrici W e ℓ e lo stato iniziale v_0 dipendono dal segnale che si vuole generare. Si riportano alcuni esempi, relativi al caso monovariabile.

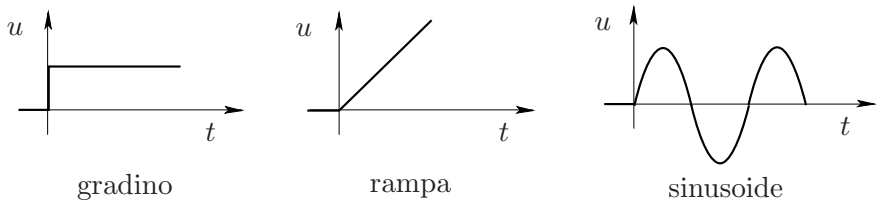


Fig. 1.14. Segnali di saggio.

Esempio 1.2.2 - Esosistema per il gradino unitario
Si assume $W=0$ (scalare), $\ell=1$, $v_0=1$, per cui risulta $e^{Wt}=1$ ed $u(t)=\ell\, e^{Wt}\, v_0$ è un gradino unitario[5]

.

Esempio 1.2.3 - Esosistema per la rampa unitaria
Si assume

$$W=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \ell=[\,1 \quad 0\,], \quad v_0=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

per cui risulta

$$e^{Wt}=\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad u(t)=\ell\, e^{Wt}\, v_0 = t\ .$$

Esempio 1.2.4 - Esosistema per la sinusoide
Si assume

$$W=\begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix}, \quad \ell=[\,1 \quad 0\,], \quad v_0=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

per cui risulta

$$e^{Wt}=\begin{bmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t \\ -\sin\omega t & \cos\omega t \end{bmatrix}, \quad u(t)=\ell\, e^{Wt}\, v_0 = \sin\omega t\ .$$

Se si vuole generare una sinusoide con angolo di fase iniziale come quella di Fig. 1.15, cioè si vuole che sia

$$u(t)=\sin(\omega t+\varphi)=\sin\omega t\cos\varphi+\cos\omega t\sin\varphi\ ,$$

basta assumere $\ell=[\cos\varphi \;\; \sin\varphi]$.

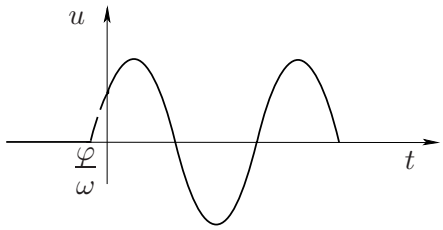


Fig. 1.15. Sinusoide con angolo di fase iniziale.

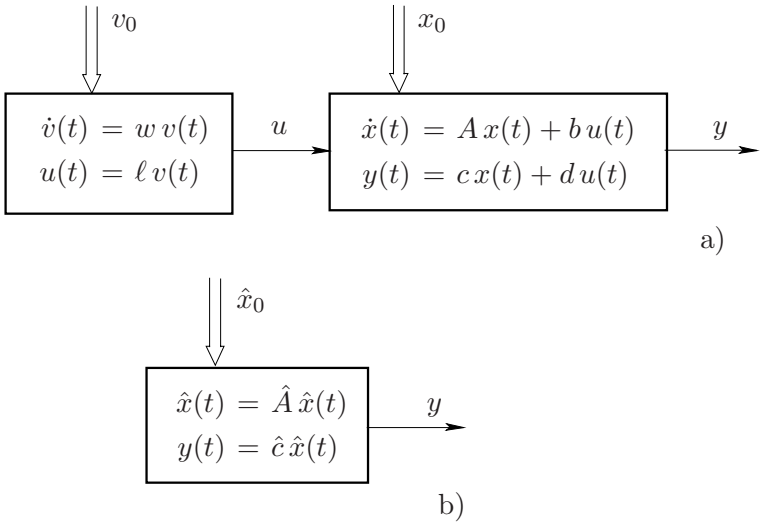


Fig. 1.16. Un sistema SISO con esosistema e il sistema omogeneo corrispondente.

Il segnale generato dall' esosistema viene applicato all' ingresso di un sistema dinamico e il complesso viene descritto come un unico sistema omogeneo: per esempio, in Fig. 1.16,a è indicata la connessione di uno degli esosistemi precedentemente esaminati ad un sistema SISO: il sistema complessivo corrisponde al blocco di Fig. 1.16,b, in cui l' unico "collegamento con l' esterno" è lo stato iniziale $\hat{x}_0$. Lo stato e le matrici del sistema omogeneo esteso sono

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} , \quad \hat{x}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ v_0 \end{bmatrix} , \quad \hat{A} = \begin{bmatrix} A & b\,\ell \\ O & W \end{bmatrix} , \quad \hat{c} = [\, c \quad d\,\ell \,] \ .$$

L' evoluzione nel tempo dello stato del sistema esteso e dell' uscita si ricavano mediante l' esponenziale di matrice; infatti chiaramente risulta

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) &= e^{\hat{A}\,t}\,\hat{x}_0 \ , \\ y(t) &= \hat{c}\,\hat{x}(t) \ . \end{aligned}$$

[5] Per verificare se l' esponenziale di matrice $X(t) = e^{W\,t}$, data in termini finiti, è corretta, si impiega l' equazione matriciale $\dot{X}(t) = W\,X(t)$.

1.3 Estensioni ai sistemi a tempo discreto

Molti dei concetti presentati al precedente paragrafo con riferimento ai sistemi lineari a tempo continuo si possono estendere ai sistemi a tempo discreto. In relazione al sistema alle differenze finite non stazionario omogeneo

$$x(k+1) = A_d(k)\, x(k)\,, \quad x(h) = x_0\ , \tag{1.58}$$

si può definire, analogamente al caso a tempo continuo, la *matrice di transizione dello stato* $\Phi(k,h)$ come la matrice $n \times n$ avente per colonne le n soluzioni della (1.58) corrispondenti alle condizioni iniziali $x(h) = i_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, in cui i_i indica l'i-esima colonna della matrice identità I_n.

La matrice di transizione dello stato soddisfa chiaramente l'equazione alle differenze

$$\Phi(k+1,h) = A_d(k)\, \Phi(k,h)\,, \quad \Phi(h,h) = I_n\ . \tag{1.59}$$

Contrariamente al caso a tempo continuo, la matrice di transizione dei sistemi a tempo discreto può essere singolare.

Nel caso stazionario, in cui la (1.58) diviene

$$x(k+1) = A_d\, x(k)\,, \quad x(0) = x_0\ , \tag{1.60}$$

la matrice di transizione dello stato coincide con la potenza di matrice, cioè si ha

$$\Phi(k,0) = A_d^k\ . \tag{1.61}$$

Un artifizio computazionale. In apparenza il calcolo numerico della potenza di matrice non presenta difficoltà; tuttavia ripetere molte volte la moltiplicazione di matrici può comportare errori significativi dovuti al troncamento e un alto tempo di calcolo. Per ridurre questi inconvenienti risulta conveniente il *metodo delle potenze binarie*: si esprime l'esponente k nella forma binaria

$$k = \sum_{i=0}^{n} \beta_i\, 2^i\ ;$$

si inizializzano quindi le variabili come $i \leftarrow 0$, $Z \leftarrow A_d$, $B \leftarrow I$ se $\beta_0 = 0$ oppure $B \leftarrow A_d$ se $\beta_0 = 1$ e, finché non sia $i = n$, si calcola $i \leftarrow i+1$, $Z \leftarrow Z^2$, $B \leftarrow B$ se $\beta_i = 0$ oppure $B \leftarrow ZB$ se $\beta_i = 1$. Al temine della procedura, si ottiene il risultato $B = A_d^k$. I coefficienti β_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ si possono ottenere ad ogni passo come resti delle divisioni ripetute di k per 2 nell'insieme degli interi, finchè il quoziente non sia nullo.

Al Paragrafo C1.2 si impiega la forma canonica di Jordan per esprimere la potenza di matrice in termini finiti.

In relazione al sistema lineare stazionario non omogeneo

$$x(k+1) = A_d\, x(k) + B_d\, u(k)\,, \quad x(0) = x_0\ , \tag{1.62}$$

si ricava la relazione

$$x(k) = A_d^k\, x_0 + \sum_{h=0}^{k-1} A_d^{k-h-1} B_d\, u(h)\ , \tag{1.63}$$

facilmente dimostrabile per verifica diretta e, per il sistema complessivo (1.15, 1.16),

$$y(k) = C_d\, A_d^k\, x_0 + C_d \sum_{h=0}^{k-1} A_d^{k-h-1} B_d\, u(h) + D_d\, u(k)\ . \tag{1.64}$$

La matrice di risposta all'impulso ingresso-stato e la matrice di risposta all'impulso ingresso-uscita sono

$$V(k) = \begin{cases} O & \text{per } k=0 \\ A_d^{k-1}\, B_d & \text{per } k>0 \end{cases}\ ; \tag{1.65}$$

$$W(k) = \begin{cases} D_d & \text{per } k=0 \\ C_d\, A_d^{k-1}\, B_d & \text{per } k>0 \end{cases}\ . \tag{1.66}$$

Si noti che nel caso a tempo discreto la matrice di risposta all'impulso ingresso-uscita è definita anche nel caso in cui il sistema non sia puramente dinamico.

1.3.1 I sistemi a dati campionati nello spazio degli stati

Nello spazio degli stati alcuni problemi collegati alla rappresentazione matematica dei sistemi di controllo a dati campionati si possono affrontare e risolvere in modo relativamente semplice.

Campionamento della risposta all'impulso. Ci si propone di determinare i parametri di un sistema MIMO a tempo discreto

$$x_d(k+1) = A_d\, x_d(k) + B_d\, u_d(k)\ , \tag{1.67}$$

$$y_d(k) = C_d\, x_d(k) + D_d\, u_d(k)\ , \tag{1.68}$$

la cui risposta all'impulso discreto (cioè alla successione $1, 0, 0, \ldots$, applicata a tutti gli ingressi) corrisponda alla successione che si ricava campionando con periodo T la risposta all'impulso di Dirac del sistema MIMO a tempo continuo

$$\dot{x}(t) = A\, x(t) + B\, u(t)\ , \tag{1.69}$$

$$y(t) = C\, x(t) + D\, u(t)\ , \tag{1.70}$$

che si suppone puramente dinamico, cioè con $D = O$. Tale risposta campionata è

$$y(kT) = C\, e^{AkT}\, B = C\, N^k\, B \ , \quad k = 0, 1, \dots \ , \tag{1.71}$$

con $N = e^{AT}$, e si ottiene pertanto come uscita $y_d(k)$ del sistema (1.67, 1.68) assumendo

$$A_d = N \ , \quad B_d = N\, B \ , \quad C_d = C \ , \quad D_d = C\, B \ , \quad x_d(0) = 0 \ . \tag{1.72}$$

Equivalenza secondo la tenuta di ordine zero. Si considera il complesso costituito dal collegamento in cascata di un convertitore D/A con tenuta di ordine zero, del sistema a tempo continuo (1.69, 1.70), inizialmente nello stato generico x_0, e di un convertitore A/D (campionatore). L'ingresso $u_d(k)$ $(k = 0, 1, \dots)$ rappresenta la successione dei campioni applicati con passo T al convertitore D/A.

In questo caso si possono applicare direttamente i risultati del Paragrafo 1.2 relativi all'approssimazione del continuo con il discreto ottenuta considerando la funzione di ingresso costante a tratti. Se si assume $A_d = N$ e $B_d = M$, con N ed M definite dalle (1.48, 1.49) in funzione di A, B e T, l'equazione alle differenze (1.67) risolta con $x_d(0) = x_0$ soddisfa manifestamente la relazione $x_d(k) = x(kT)$. La relazione imposta dal campionamento $y_d(k) = y(kT)$ viene pertanto soddisfatta assumendo $C_d = C$, $D_d = D$.

Equivalenza secondo la tenuta di ordine uno. Nel caso della tenuta di ordine uno la funzione di ingresso continua $u(t)$ è scomponibile, in ogni intervallo compreso fra due istanti di campionamento, nella somma di un gradino e una rampa. Nel generico intervallo k-esimo essa è esprimibile come

$$u(t) = u_d(k) + \frac{t}{T}\, (u_d(k) - u_d(k-1)) \ , \quad k\,T \le t < (k+1)\,T \ , \quad u_d(-1) = 0 \ ; \tag{1.73}$$

i valori dello stato del sistema a tempo continuo (1.69) agli istanti di campionamento sono dati dalla relazione

$$x((k+1)T) = N\, x(kT) + M\, u_d(k) + M_1\, \frac{1}{T}\, (u_d(k) - u_d(k-1)) \quad (k = 0, 1, \dots) \ , \tag{1.74}$$

del tutto analoga alla (1.54), con M_1 definita dalla (1.53). Per realizzare tale relazione si deve ricorrere ad un sistema a tempo discreto ampliato, con p stati (tanti quante sono le componenti dell'ingresso) destinati a memorizzare il valore $u_d(k-1)$, che deve essere elaborato insieme ad $u_d(k)$. Per verifica diretta si dimostra che la scelta

$$A_d = \begin{bmatrix} N & -\dfrac{M_1}{T} \\ O & O \end{bmatrix} \ , \quad B_d = \begin{bmatrix} M + \dfrac{M_1}{T} \\ I_p \end{bmatrix} \ , \quad x_d(0) = \begin{bmatrix} x_0 \\ 0 \end{bmatrix} \ ,$$

$$C_d = [\ C \quad O\ ] \ , \qquad D_d = D \ , \tag{1.75}$$

dà luogo al comportamento voluto.

1.4 Stabilità

Lo studio delle proprietà di un sistema generico descritto mediante una funzione di evoluzione dello stato e una funzione di uscita, come quelli introdotti al Paragrafo 1.1, si può effettuare con riferimento alla relazione funzionale ingresso-stato o a quella ingresso-uscita, cioè considerando il *comportamento interno* del sistema, o il suo *comportamento esterno*. Nelle seguenti definizioni relative alla stabilità ci si riferisce al comportamento interno.

Per maggiore generalità il concetto di stabilià viene introdotto in relazione al sistema non lineare non stazionario

$$\dot{x}(t) = f\left(x(t), u(t), t\right) \ , \quad x(t_0) = x_0 \ , \tag{1.76}$$

$$y(t) = g\left(x(t), u(t), t\right) \ . \tag{1.77}$$

Definizione 1.4.1 - Stato di equilibrio
Con riferimento alla descrizione ingresso-stato (1.76), uno stato x_1 si dice *di equilibrio all'istante* t_1 se esiste almeno una funzione $u_1|_{[t_1,\infty]}$ tale che sia $f\left(x_1, u_1(t), t\right) = 0$ quasi ovunque nell'intervallo $[t_1, \infty]$. Se il sistema è stazionario, cioè se la funzione a secondo membro della (1.76) non dipende esplicitamente dal tempo, uno stato x_1 si dice *di equilibrio* se esiste almeno un valore u_1 tale che sia $f(x_1, u_1) = 0$.

Il concetto di condizione di equilibrio è un tipico esempio in cui il riferirsi al comportamento interno o a quello esterno può portare a risultati diversi. Si consideri, infatti, un sistema stazionario: allo stato di equilibrio x_1 corrisponde evidentemente l'uscita costante $y_1 = g(x_1, u_1)$; in generale però non è necessario che lo stato rimanga costante per mantenere costante l'uscita, in quanto possono esistere traiettorie dello stato e corrispondenti funzioni di ingresso $x(t), u(t)$ per cui è $y_1 = g\left(x(t), u(t)\right)$ per ogni t. Infatti l'equazione $y_1 = g(x, u)$ in genere definisce una varietà (estensione ad $\mathbb{R}^n$ del concetto di curva o superficie) nel dominio della funzione g cui può appartenere una traiettoria ammissibile $x(t), u(t)$: in questo caso l'equilibrio esterno (uscita costante) non è associato a quello interno (stato costante).

Operando eventualmente una traslazione dell'origine dello spazio degli stati e ridefinendo la funzione a secondo membro, un sistema non stazionario mantenuto in uno stato di equilibrio generico x_1 dall'istante generico t_0 applicando la funzione d'ingresso $u_1(t)$ si può descrivere con un'equazione del tipo

$$\dot{x}(t) = \varphi\left(x(t), t\right) \ , \quad \text{con} \quad \varphi(0, t) = 0 \ , \quad (t \geq t_0) \ ; \tag{1.78}$$

in altri termini l'assumere come stato di equilibrio lo stato zero non lede la generalità. La (1.78) nel caso stazionario diviene

$$\dot{x}(t) = \varphi\left(x(t)\right) \ , \quad \text{con} \quad \varphi(0) = 0 \ . \tag{1.79}$$

La stabilità dell'equilibrio si definisce con riferimento a tali rappresentazioni nei seguenti termini.

Definizione 1.4.2 - Stabilità asintotica
Dato il dominio $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^n$ avente l'origine come punto interno, il sistema non stazionario (1.78) si dice *asintoticamente stabile in* $\mathcal{D}$ *all'istante* t_0 se le corrispondenti traiettorie soddisfano la relazione

$$\lim_{t \to \infty} \|x(t)\| = 0 \quad \forall\, x(t_0) \in \mathcal{D} \ .$$

Il sistema stazionario (1.79) si dice *asintoticamente stabile in* $\mathcal{D}$ se le corrispondenti traiettorie soddisfano la relazione

$$\lim_{t \to \infty} \|x(t)\| = 0 \quad \forall\, x(0) \in \mathcal{D} \ .$$

La stabilità asintotica si dice *globale* se le precedenti definizioni valgono per $\mathcal{D} = \mathbb{R}^n$.

Si considera ora il sistema lineare stazionario

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t) \ , \quad x(0) = x_0 \ , \tag{1.80}$$

$$y(t) = C\,x(t) + D\,u(t) \ , \tag{1.81}$$

il cui moto rispetto allo stato zero, che è di equilibrio per l'ingresso identicamente nullo, è descritto dall'equazione differenziale omogenea

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) \ , \quad x(0) = x_0 \ . \tag{1.82}$$

Vale il seguente teorema.

Teorema 1.4.1 Il sistema (1.82) è asintoticamente stabile nello stato zero se e solo se tutti gli autovalori di A hanno la parte reale negativa.

Dim. Si opera una trasformazione di similitudine che riconduce la matrice del sistema alla forma di Jordan (vedi Paragrafo C1.2). In tal modo si riesce ad esprimere la traiettoria generica $x(t)$ come combinazione lineare di funzioni del tempo del tipo $t^i\, e^{\rho t}$ (corrispondenti ad ogni autovalore reale ρ) o $t^i\, e^{\sigma t} \sin \omega t$ e $t^i\, e^{\sigma t} \cos \omega t$ (corrispondenti ad ogni coppia coniugata di autovalori complessi $\sigma \pm j\omega$). Tali funzioni sono dette *modi* della risposta libera del sistema: poiché tutti i modi possono essere eccitati scegliendo opportunamente lo stato iniziale e questo per la definizione di stabilità è arbitrario, si conclude che la condizione enunciata è necessaria e sufficiente affinché $x(t)$ tenda a zero per ogni stato iniziale. □

Quanto esposto si estende al sistema lineare stazionario a tempo discreto

$$x(k+1) = A_d\,x(k) + B_d\,u(k) \ , \quad x(0) = x_0 \ , \tag{1.83}$$

$$y(k) = C_d\,x(k) + D_d\,u(k) \ , \tag{1.84}$$

per il quale in luogo della (1.79) si può scrivere

$$x(k+1) = A_d\,x(k) \ , \quad x(0) = x_0 \ . \tag{1.85}$$

In questo caso vale il seguente teorema.

Teorema 1.4.2 Il sistema (1.85) è asintoticamente stabile nello stato zero se e solo se tutti gli autovalori di A_d hanno modulo minore di uno.

Dim. Anche in questo caso ci si riferisce alla forma di Jordan, introdotta al Paragrafo C1.2: la traiettoria generica $x(k)$ è esprimibile come combinazione lineare di successioni del tipo $k^i\,\rho^k$ (corrispondenti ad ogni autovalore reale ρ) o $k^i\,\mu^k \sin((k-i)\vartheta)$ e $k^i\,\mu^k \cos((k-i)\vartheta)$, (corrispondenti ad ogni coppia coniugata di autovalori complessi $\mu\, e^{\pm j\vartheta}$). Tali funzioni sono dette *modi* della risposta libera del sistema: poiché tutti i modi possono essere eccitati scegliendo opportunamente lo stato iniziale, la condizione enunciata è necessaria e sufficiente affinché la traiettoria tenda asintoticamente a zero per ogni stato iniziale. □

Nel caso dei sistemi lineari stazionari, a tempo continuo e discreto, la stabilità asintotica è sempre globale e indipendente dal particolare stato di equilibrio. Inoltre la stabilità interna implica la stabilità esterna, cioè la stabilità riferita ad un' uscita di equilibrio, a seguito di perturbazioni applicate all' ingresso[6].

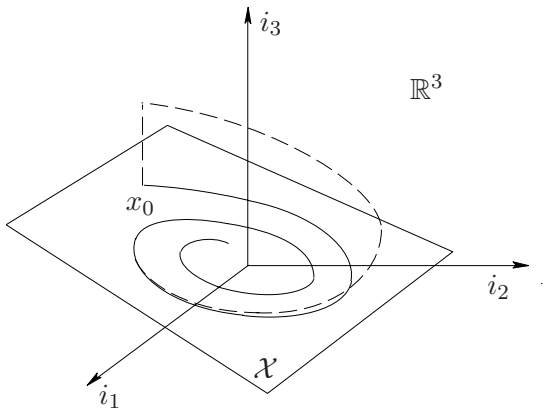


Fig. 1.17. Stabilità interna ed esterna di un invariante.

Il concetto di stabilità del moto di un sistema omogeneo può essere riferito agli invarianti. Si consideri infatti la trasformazione (1.117) in relazione ad un sottospazio $\mathcal{H} \subseteq \mathbb{R}^n$ invariante in A. Se è $x_0 \in \mathcal{H}$, la traiettoria si svolge completamente su $\mathcal{H}$ in quanto la velocità $\dot{x}(t)$ appartiene ad $\mathcal{H}$ per ogni $t \geq t_0$ e tende all' origine se e solo se la matrice A'_{11} nella (1.117) è stabile. Una traiettoria che si origina fuori da $\mathcal{H}$ tende ad $\mathcal{H}$ se e solo se la matrice A'_{22} nella (1.117) è stabile. Il concetto è illustrato in Fig. 1.17. Se A'_{11} è stabile, l' invariante $\mathcal{H}$ si dice *internamente stabile*, se A'_{22} è stabile esso si dice *esternamente stabile*.

[6] Applicando la scomposizione canonica di Kalman, introdotta al seguente Paragrafo 1.6, si può dimostrare che nel caso dei sistemi lineari stazionari completamente controllabili ed osservabili la stabilità interna e quella esterna coincidono.

1.5 Controllabilità e osservabilità

Ci si riferisce ancora al sistema (1.76, 1.77), per il quale si introduce un *insieme delle funzioni di ingresso ammissibili* $\mathcal{U}_{[t_0,t_1]}$ (ad esempio le funzioni continue a tratti, o le funzioni continue a tratti con valori appartenenti a un dato insieme, o le funzioni con derivata prima limitata). Una traiettoria dello stato si dice *ammissibile* se corrisponde ad una funzione di ingresso ammissibile.

Sia x_0 uno stato e t_0 un valore del tempo: l'*insieme degli stati raggiungibili da* x_0 *in* $[t_0, t_1]$ è l'insieme di tutti gli stati per i quali ad un istante generico $t_2 \in [t_0, t_1]$ passa almeno una traiettoria ammissibile $x(t)$ con $x(t_0) = x_0$; l'*insieme degli stati controllabili ad* x_0 *in* $[t_0, t_1]$ è l'insieme di tutti gli stati dai quali si origina all'istante t_0 almeno una traiettoria ammissibile $x(t)$ tale che $x(t_2) = x_0$, $t_2 \in [t_0, t_1]$. Se l'insieme degli stati raggiungibili da qualunque stato o quello degli stati controllabili a qualunque stato coincide con l'intero spazio degli stati, il sistema si dice *completamente controllabile*.

Siano $u_0|_{[t_0,t_1]}$, $y_0|_{[t_0,t_1]}$ una funzione di ingresso ammissibile e la corrispondente funzione di uscita: l'*insieme degli stati iniziali compatibili con* $u_0|_{[t_0,t_1]}$, $y_0|_{[t_0,t_1]}$ è l'insieme di tutti gli stati $x(t_0)$ per i quali passa almeno una traiettoria ammissibile corrispondente alle funzioni date; l'*insieme degli stati finali compatibili con* $u_0|_{[t_0,t_1]}$, $y_0|_{[t_0,t_1]}$ è l'insieme di tutti gli stati $x(t_1)$ per i quali passa almeno una traiettoria ammissibile corrispondente alle funzioni date. Se il primo insieme comprende un solo elemento per ogni coppia ammissibile di funzioni di ingresso e di uscita, il sistema si dice *completamente osservabile*, mentre se ciò avviene per il secondo insieme, il sistema si dice *completamente ricostruibile*. Se esiste una particolare coppia ammissibile di funzioni di ingresso e di uscita per cui il primo insieme comprende un solo elemento, il sistema si dice *completamente diagnosticabile*; se ciò accade per il secondo insieme, il sistema si dice *completamente incasellabile*.

Ciò posto, si fa riferimento di nuovo al sistema lineare stazionario a tempo continuo (1.80, 1.81) e al sistema a tempo discreto (1.83, 1.84), per i quali i concetti ora esposti si semplificano e si traducono direttamente in proprietà delle matrici.

Definizione 1.5.1 - Raggiungibilità dei sistemi lineari stazionari
Il sistema a tempo continuo (1.80, 1.81) si dice *completamente raggiungibile* se per ogni stato $x_1 \in \mathbb{R}^n$ esistono un valore del tempo t_1 e una funzione di ingresso limitata e continua a tratti $u|_{[0,t_1]}$ tali che la corrispondente traiettoria $x(t)$ iniziantesi nell'origine passi per x_1 all'istante t_1. Analogamente, il sistema a tempo discreto (1.83, 1.84) si dice completamente raggiungibile se per ogni stato $x_1 \in \mathbb{R}^n$ esistono un valore del tempo discreto k_1 e una successione di ingresso limitata $u|_{[0,k_1-1]}$ tali che la corrispondente traiettoria $x(k)$ iniziantesi nell'origine passi per x_1 all'istante k_1.

Un sistema lineare stazionario completamente raggiungibile nel senso della Definizione 1.5.1 è anche completamente controllabile (ammette il passaggio da qualunque stato a qualunque altro stato). Infatti il passaggio dallo stato x_0 allo stato x_1 all'istante t_1, in virtù della relazione (1.43), si ottiene con la stessa funzione di ingresso che porta il sistema dall'origine ad $x_1 - e^{At_1}\, x_0$; analogamente, nel caso a tempo discreto, il passaggio da x_0 a x_1 all'istante k_1, in virtù della (1.63), si ottiene con la stessa successione che conduce dall'origine ad $x_1 - A_d^{k_1}\, x_0$.

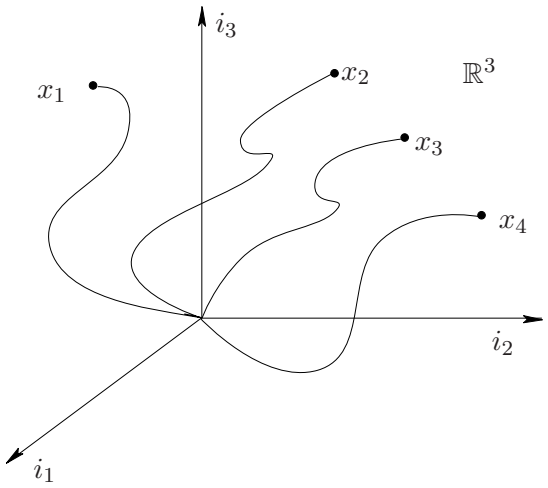


Fig. 1.18. Traiettorie nello spazio degli stati.

Il concetto di raggiungibilità è illustrato dalla Fig. 1.18, dove sono rappresentate diverse traiettorie che si originano nello stato zero e raggiungono più stati: il sistema è completamente raggiungibile se e solo se esiste una traiettoria dall'origine ad ogni punto dello spazio degli stati.

La raggiungibilità dei sistemi lineari stazionari è correlata a precise proprietà strutturali delle corrispondenti matrici; il seguente Teorema 1.5.1, relativo alla raggiungibilità, costituisce, insieme al Teorema 1.5.2, duale di esso sull'osservabilità, la base per un rigoroso approccio ai problemi di analisi e sintesi dei sistemi lineari. Per le dimostrazioni dei teoremi si rimanda ai Complementi di questo capitolo.

Definizione 1.5.2 - Matrice di controllabilità
La matrice

$$R := [\, B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B \,] \;, \tag{1.86}$$

è detta *matrice di controllabilità* del sistema (1.80, 1.81). La coppia (A, B) si dice *controllabile* se R ha rango massimo.

Teorema 1.5.1 - Insieme raggiungibile
Per ogni $t_1 > 0$, applicando un'opportuna funzione di ingresso $u|_{[0,t_1]}$ si può imporre al sistema (1.80, 1.81), inizialmente supposto nello stato zero, uno stato finale arbitrario $x(t_1)$ se e solo se questo appartiene al sottospazio (detto *insieme raggiungibile*)

$$\mathcal{R} = \mathrm{im}R = \mathrm{im}B + \mathrm{im}(AB) + \ldots + \mathrm{im}(A^{n-1}B) \ . \tag{1.87}$$

Per ogni $k_1 \geq n$ (in cui n è la dimensione dello spazio degli stati), applicando un'opportuna funzione di ingresso $u|_{[0,k_1-1]}$ si può imporre al sistema (1.83, 1.84), inizialmente supposto nello stato zero, uno stato finale arbitrario $x(k_1)$ se e solo se questo appartiene all'insieme raggiungibile relativo alla coppia (A_d, B_d)

$$\mathcal{R}_d = \mathrm{im}B_d + \mathrm{im}(A_d B_d) + \ldots + \mathrm{im}(A_d^{n-1} B_d) \ . \tag{1.88}$$

Si noti che l'insieme raggiungibile di un sistema lineare stazionario a tempo discreto è uguale a quello del sistema a tempo continuo avente le stesse matrici.

Conseguenza del Teorema 1.5.1: un sistema lineare stazionario a tempo continuo è completamente raggiungibile in un intervallo di tempo piccolo a piacere se e solo se la coppia (A, B) è controllabile, mentre un sistema lineare stazionario a tempo discreto è completamente raggiungibile in n campioni del tempo discreto se e solo se la coppia (A_d, B_d) è controllabile.

Proprietà 1.5.1 Il sottospazio $\mathcal{R}$ definito dalla (1.87) è il più piccolo invariante in A contenente im$B$.

Dim. $\mathcal{R}$ contiene im$B$ in quanto somma di più sottospazi uno dei quali è appunto im$B$. Indicando con $q(s) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \ldots + \alpha_0$ il polinomio caratteristico di A, in base al teorema di Cayley-Hamilton risulta

$$A^n B = -\alpha_{n-1}A^{n-1}B - \ldots - \alpha_0 B \ . \tag{1.89}$$

Sia x un qualunque vettore di $\mathcal{R}$, scomponibile nella somma di n vettori, ciascuno appartenente a uno dei sottospazi a secondo membro della (1.87): pertanto Ax è la somma di n vettori appartenenti rispettivamente al secondo, al terzo, e così via fino all'ultimo di tali sottospazi e ad im$(A^n B)$: quest'ultimo, in virtù della (1.89) è scomponibile nella somma di vettori appartenenti ancora ai sottospazi a secondo membro della (1.87); quindi $\mathcal{R}$ è invariante in A. Ogni invariante in A contenente un dato sottospazio contiene anche il suo trasformato secondo A; in particolare ogni invariante in A contenente im$B$ contiene il trasformato secondo A di im$B$, il trasformato di questo e così via, cioè contiene $\mathcal{R}$; segue che $\mathcal{R}$ è il più piccolo invariante in A contenente im$B$. $\square$

Si può dimostrare che nel caso dei sistemi a tempo continuo il sottospazio degli stati controllabili all'origine in qualunque intervallo di tempo finito coincide anch'esso con $\mathcal{R}$, mentre nel caso dei sistemi a tempo discreto in generale contiene $\mathcal{R}_d$ e coincide con esso se A_d è non singolare.

Si esamina ora il concetto di osservabilità dei sistemi lineari stazionari, che conduce a risultati perfettamente duali.

Definizione 1.5.3 - Matrice di osservabilità
La matrice

$$Q := \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ C\,A^{n-1} \end{bmatrix} , \tag{1.90}$$

è detta *matrice di osservabilità* del sistema (1.80, 1.81) La coppia (A, C) si dice *osservabile* se Q ha rango massimo.

Teorema 1.5.2 - Insieme inosservabile
Per ogni $t_1 > 0$, noti un segmento finito di funzione di ingresso $u|_{[0,t_1]}$ e il corrispondente segmento di funzione di uscita $y|_{[0,t_1]}$ si può determinare lo stato iniziale $x(0)$ del sistema (1.80, 1.81) a meno di un vettore del sottospazio (detto *insieme inosservabile*)

$$\mathcal{Q} = \ker Q = \ker C \cap \ker(CA) \cap \ldots \cap \ker(CA^{n-1}) \ . \tag{1.91}$$

Per ogni $k_1 \geq n$ (in cui n è la dimensione dello spazio degli stati), noti un segmento di funzione di ingresso $u|_{[0,k_1-1]}$ e il corrispondente segmento di funzione di uscita $y|_{[0,k_1-1]}$ si può determinare lo stato iniziale $x(0)$ del sistema (1.83, 1.84) a meno di un vettore dell'insieme inosservabile della coppia (A_d, C_d), che è

$$\mathcal{Q}_d = \ker C_d \cap \ker(C_d A_d) \cap \ldots \cap \ker(C_d A_d^{n-1}) \ . \tag{1.92}$$

Si noti che l'insieme inosservabile di un sistema lineare stazionario a tempo discreto è uguale a quello del sistema a tempo continuo avente le stesse matrici.

Conseguenza del Teorema 1.5.2: un sistema lineare stazionario a tempo continuo è completamente osservabile in un intervallo di tempo piccolo a piacere se e solo se la coppia (A, C) è osservabile, mentre un sistema lineare stazionario a tempo discreto è completamente osservabile in n campioni del tempo discreto se e solo se la coppia (A_d, C_d) è osservabile.

Proprietà 1.5.2 Il sottospazio $\mathcal{Q}$ definito dalla (1.91) è il più grande invariante in A contenuto in $\ker C$.

Dim. $\mathcal{Q}$ è contenuto in $\ker C$ in quanto intersezione di più sottospazi uno dei quali è appunto $\ker C$. In base al teorema di Cayley-Hamilton risulta

$$CA^n = -\alpha_{n-1} CA^{n-1} - \ldots - \alpha_0 C \ . \tag{1.93}$$

Sia x un qualunque vettore di $\mathcal{Q}$, appartenente a ciascuno dei sottospazi a secondo membro della (1.91), per cui è $CA^i x = 0$ $(i = 0, \ldots, n-1)$: il trasformato Ax appartiene quindi al primo, al secondo e così via fino al penultimo di tali sottospazi; essendo, però, $CA^n = 0$ in virtù della (1.93), Ax appartiene anche all'ultimo; quindi $\mathcal{Q}$ è invariante in A. Ogni invariante in A contenuto in un dato sottospazio è contenuto anche nel sottospazio luogo dei vettori che si trasformano in esso secondo A; in particolare ogni invariante in A contenuto in $\ker C$ è contenuto nel luogo dei vettori che si trasformano in $\ker C$ secondo A, in quello dei vettori che si trasformano in quest'ultimo e così via, cioè è contenuto in $\mathcal{Q}$: segue che $\mathcal{Q}$ è il più grande invariante in A contenuto in $\ker C$. $\square$

Si può dimostrare che nel caso dei sistemi a tempo continuo il sottospazio degli stati non ricostruibili in qualunque intervallo di tempo finito coincide anch'esso con $\mathcal{Q}$, mentre nel caso dei sistemi a tempo discreto in generale esso è contenuto in $\mathcal{Q}_d$ e coincide con esso solo se A_d è non singolare.

Si dimostra inoltre che nel caso dei sistemi lineari, a tempo continuo e discreto, poter applicare una funzione di ingresso opportuna per risolvere il problema dell'osservazione o quello della ricostruzione dello stato non porta ad alcun vantaggio; pertanto i problemi della diagnosi e dell'incasellamento non si distinguono da quelli dell'osservazione e della ricostruzione.

Definizione 1.5.4 - Sistema duale
Il sistema a tempo continuo

$$\dot{w}(t) = A^T w(t) + C^T v(t) \ , \tag{1.94}$$
$$e(t) = B^T w(t) + D^T v(t) \ , \tag{1.95}$$

e il sistema a tempo discreto

$$w(k+1) = A_d^T w(k) + C_d^T v(k) \ , \tag{1.96}$$
$$e(k) = B_d^T w(k) + D_d^T v(k) \ , \tag{1.97}$$

sono detti *duali* rispettivamente dei sistemi (1.80, 1.81) e (1.83, 1.84).

Si noti che se un sistema è asintoticamente stabile, anche il duale è asintoticamente stabile; se il primo è completamente raggiungibile, il secondo è completamente osservabile e viceversa; se il primo è completamente osservabile, il secondo è completamente raggiungibile e viceversa.

1.6 Sistemi equivalenti e realizzazioni

La trasformazione dei sistemi in base al concetto di equivalenza consente, nell'analisi, di evidenziarne le proprietà strutturali e, nella sintesi, di operare la scelta più opportuna fra diverse realizzazioni equivalenti a un sistema dato. Per non appesantire eccessivamente la trattazione, le considerazioni svolte in questo paragrafo e nei successivi del presente capitolo vengono presentate con riferimento ai soli sistemi a tempo continuo, in quanto la loro estensione ai sistemi a tempo discreto si effettua con procedure di routine (sostituzione delle equazioni differenziali con quelle alle differenze finite, dell'esponenziale di matrice con la potenza di matrice, della variabile s con la variabile z). È utile premettere la seguente definizione.

Definizione 1.6.1 - Sistemi equivalenti (internamente equivalenti)
Due sistemi lineari stazionari (A, B, C, D) e (A_1, B_1, C_1, D_1) si dicono *equivalenti* o, più specificamente, *internamente equivalenti* se è $D_1 = D$ ed esiste una trasformazione non singolare T tale che

$$A_1 = T^{-1} A T\,, \quad B_1 = T^{-1} B\,, \quad C_1 = C\,T\ . \tag{1.98}$$

Due sistemi equivalenti si possono pertanto considerare ottenuti l'uno dall'altro mediante un cambiamento di base nello spazio degli stati; in Fig. 1.19 sono rappresentati due sistemi così ottenuti: qualora essi siano inizialmente entrambi nello stato zero o i loro stati iniziali vengano imposti tenendo conto del cambiamento di base, l'evoluzione dell'uscita per una stessa funzione di ingresso risulta identica.

Il concetto di equivalenza viene utilizzato per ottenere le matrici dei sistemi lineari stazionari in forme ben determinate particolarmente semplici, dette *forme canoniche*, che agevolano la comprensione del loro comportamento in presenza di controllo, cioè per funzioni di ingresso opportunamente scelte e, inoltre, interviene nella dimostrazione di numerose proprietà.

Proprietà 1.6.1 Sistemi equivalenti presentano uguali proprietà di stabilità, raggiungibilità e osservabilità.

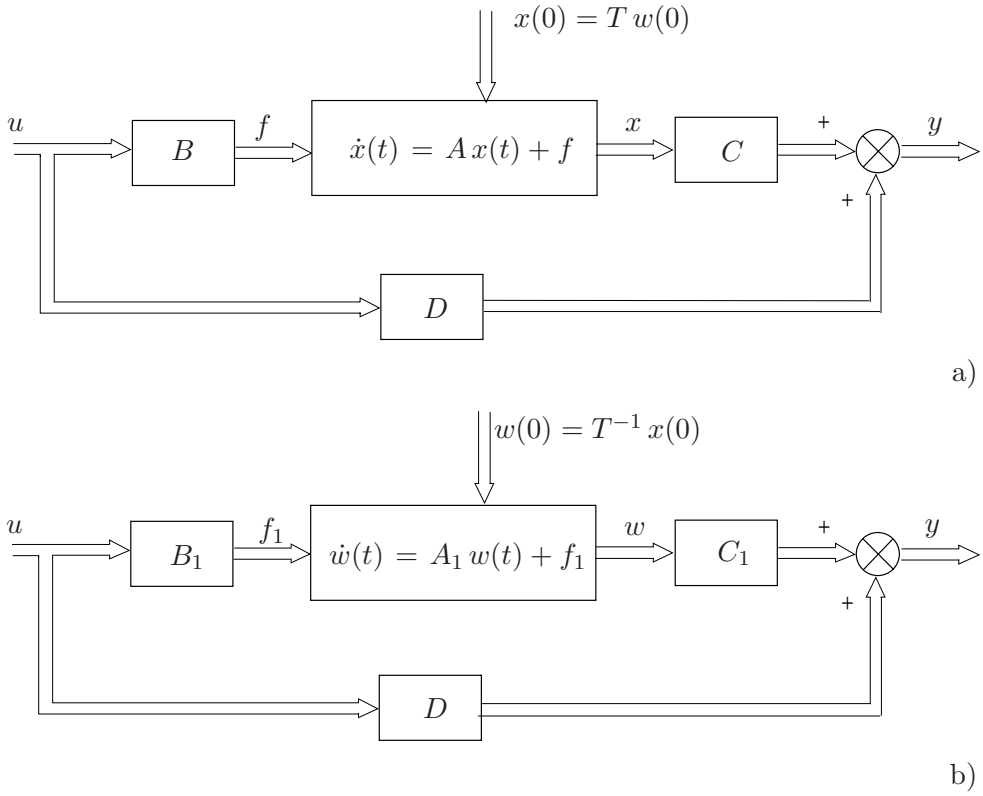


Fig. 1.19. Sistemi equivalenti.

Dim. Le matrici del sistema, legate dalla trasformazione di similitudine espressa dalla prima delle (1.98), presentano gli stessi autovalori. Infatti risulta

$$\begin{aligned}\det(\lambda I - A_1) &= \det(\lambda I - T^{-1} A\,T)\\ &= \det(\lambda T^{-1} I\,T - T^{-1} A\,T)\\ &= \det(T^{-1}(\lambda I - A)\,T)\\ &= \det T^{-1}\det(\lambda I - A)\det T\ . \end{aligned} \tag{1.99}$$

Essendo $\det T^{-1}$ e $\det T$ diversi da zero, le equazioni $\det(\lambda I - A_1) = 0$ e $\det(\lambda I - A) = 0$ sono identiche. In relazione alla controllabilità e all'osservabilità si può scrivere

$$\begin{aligned} R_1 &= [\,B_1 \quad A_1 B_1 \quad \dots \quad A_1^{n-1} B_1\,]\\ &= [\,T^{-1}B \quad T^{-1}A\,T\,T^{-1}B \quad \dots \quad T^{-1}A^{n-1}\,T\,T^{-1}B\,]\\ &= T^{-1}\,[\,B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B\,] = T^{-1}\,R\ ; \end{aligned} \tag{1.100}$$

$$Q_1 = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_1 A_1 \\ \vdots \\ C_1\,A_1^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\,T \\ C\,T\,T^{-1}A\,T \\ \vdots \\ C\,T\,T^{-1}A^{n-1}\,T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ C\,A \\ \vdots \\ C\,A^{n-1} \end{bmatrix} T = Q\,T\ ; \tag{1.101}$$

poiché T e T^{-1} sono non singolari, le matrici R_1 ed R, Q_1 e Q hanno lo stesso rango. □

Per la deduzione delle forme canoniche si richiede la matrice di trasformazione T che lega fra loro le matrici di due sistemi che si sappia a priori essere equivalenti. A tal fine si utilizzerà il seguente teorema.

Teorema 1.6.1 - Trasformazione fra due sistemi equivalenti
Siano (A, b, c, d) e (A_1, b_1, c_1, d) due sistemi SISO equivalenti, completamente raggiungibili e/o completamente osservabili. La matrice di trasformazione T è data da

$$T = R\,R_1^{-1} \quad \text{oppure} \quad T = Q^{-1}\,Q_1 \ , \tag{1.102}$$

in cui R e Q sono le matrici di controllabilità e di osservabilità del primo sistema, R_1 e Q_1 quelle del secondo. Nel caso di due sistemi MIMO (A, B, C, D) e (A_1, B_1, C_1, D) si ha

$$T = R\,R_1^{+} \quad \text{e/o} \quad T = Q^{+}\,Q_1 \ , \tag{1.103}$$

in cui R_1^+ e Q^+ indicano rispettivamente la pseudoinversa destra di R_1 e la pseudoinversa sinistra di Q[7].

Dim. Per maggiore generalità si dimostrano le (1.103). La prima uguaglianza si ricava da

$$R_1 := [\,T^{-1}B \quad T^{-1}AT\,T^{-1}B \quad \dots \quad T^{-1}A^{n-1}T\,T^{-1}B\,] = T^{-1}\,R \ ;$$

la seconda si ricava dall'analoga relazione che si può stabilire fra le matrici di osservabilità. □

Una rappresentazione canonica interessante, che stabilisce la struttura dei sistemi lineari stazionari in rapporto alle proprietà di controllabilità e di osservabilità, è la *scomposizione canonica di Kalman*.

Con riferimento al sistema lineare stazionario generico (1.80, 1.81) si opera la trasformazione di coordinate $x = T\,w$, $w = T^{-1}\,x$, in cui è $T := [T_1\ T_2\ T_3\ T_4]$ +onsingolare, con $\mathrm{im}T_1 = \mathcal{R} \cap \mathcal{Q}$, $\mathrm{im}[T_1\ T_2] = \mathcal{R}$, $\mathrm{im}[T_1\ T_3] = \mathcal{Q}$. In tal modo si definisce il sistema equivalente

$$A_1 = T^{-1}A\,T = \begin{bmatrix} A'_{11} & A'_{12} & A'_{13} & A'_{14} \\ O & A'_{22} & O & A'_{24} \\ O & O & A'_{33} & A'_{34} \\ O & O & O & A'_{44} \end{bmatrix} \ , \quad B_1 = T^{-1}B = \begin{bmatrix} B'_1 \\ B'_2 \\ O \\ O \end{bmatrix} \ ,$$

$$C_1 = C\,T = [\,O \quad C'_2 \quad O \quad C'_4\,] \ , \qquad D_1 = D \ , \tag{1.104}$$

[7] Data una matrice reale A, $m \times n$ con $m \le n$ e di rango massimo, la sua pseudoinversa destra è $A^+ := A^T(AA^T)^{-1}$; risulta evidentemente $AA^+ = I_m$. Se invece è $m \ge n$ si definisce la pseudoinversa sinistra come $A^+ := (A^TA)^{-1}A^T$ e risulta $A^+A = I_n$. Per $m = n$ entrambe le pseudoinverse coincidono con l'inversa.

in cui le sottomatrici nulle nella prima, seconda e terza colonna di A_1 derivano dal fatto che $\mathcal{R} \cap \mathcal{Q}$, $\mathcal{R}$ e $\mathcal{Q}$ sono invarianti in A (il primo come intersezione di due invarianti in A), quelle in B_1 dal fatto che $\mathcal{R}$ contiene im$B$, quelle in C_1 dal fatto che $\mathcal{Q}$ è contenuto in ker$C$.

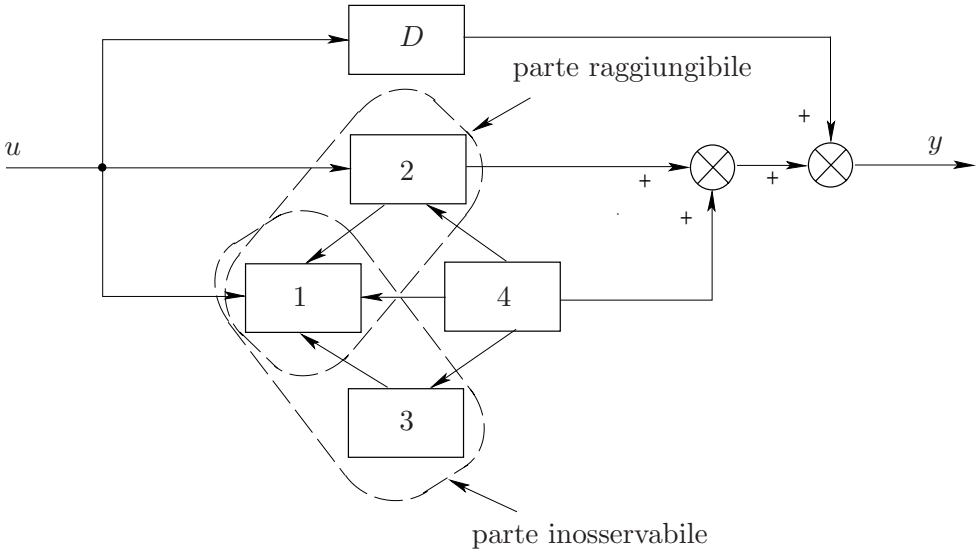


Fig. 1.20. La scomposizione canonica di Kalman.

La particolare struttura delle matrici A_1, B_1 e C_1 consente di scomporre il sistema dato (ridefinendone lo stato) in quattro sottosistemi dinamici, più un sistema puramente algebrico, interconnessi come è indicato in Fig. 1.20. I sottosistemi 1 e 2 sono completamente raggiungibili, mentre i sottosistemi 1 e 3 sono inosservabili. Il solo sistema 2 è completamente raggiungibile ed osservabile ed è il solo che, unitamente al sistema privo di memoria D, determina il legame ingresso-uscita, cioè la risposta del sistema complessivo con stato iniziale zero. Risulta infatti

$$W(t) = C\, e^{At}\, B + D\, \delta(t) = C_1\, e^{A_1 t}\, B_1 + D\, \delta(t) = C_2'\, e^{A_{22}' t}\, B_2' + D\, \delta(t)\ . \quad (1.105)$$

Definizione 1.6.2 - Realizzazione e realizzazione minima
Data una matrice di risposta all'impulso $W(t) = W_0(t) + W_1 \delta(t)$, il sistema (A, B, C, D) costituisce una *realizzazione* di $W(t)$ se risulta $C\, e^{At} B = W_0(t)$, $D = W_1$. Data una matrice di trasferimento $G(s)$, il sistema (A, B, C, D) costituisce una *realizzazione* di $G(s)$ se risulta $C\,(sI - A)^{-1} B + D = G(s)$[8]. Una realizzazione si dice *minima* se il corrispondente spazio degli stati ha dimensione minima.

[8] Per la deduzione di questa espressione nel caso SISO (il caso MIMO non presenta differenze di rilievo) si rimanda al Paragrafo 2.2.

Due sistemi equivalenti sono due diverse realizzazioni di una stessa risposta all'impulso. Vale il seguente teorema.

Teorema 1.6.2 - Controllabilità, osservabilità e minimalità
Una realizzazione (A, B, C, D) è minima se e solo se (A, B) è controllabile e (A, C) osservabile.

Dim. La dimostrazione è riportata al Paragrafo C1.7. □

Ad esempio, in base alla (1.105), (A, B, C, D) e (A_1, B_1, C_1, D) sono due realizzazioni di $W(t)$, mentre (A'_{22}, B'_2, C'_2, D) è una realizzazione minima di $W(t)$. La scomposizione canonica di Kalman consente, pertanto, di ricavare una realizzazione minima da una qualunque realizzazione (A, B, C, D).

Definizione 1.6.3 - Sistemi equivalenti ingresso-uscita (esternamente equivalenti)
Due sistemi (A, B, C, D) e (A_1, B_1, C_1, D_1) si dicono *equivalenti ingresso-uscita* o *esternamente equivalenti* se è $D_1 = D$ e $C\, e^{At}\, B = C_1\, e^{A_1 t}\, B_1$, cioè se presentano la stessa risposta all'impulso.

Si noti che due sistemi esternamente equivalenti non hanno necessariamente lo stato con la stessa dimensione. Ad esempio, con riferimento alla precedente scomposizione di Kalman, i sistemi (A, B, C, D) e (A_R, B_R, C_R, D_R), con

$$A_R := \begin{bmatrix} A''_{11} & A'_{12} \\ O & A'_{22} \end{bmatrix}, \quad B_R := \begin{bmatrix} B''_1 \\ B'_2 \end{bmatrix}, \quad C_R := [\, O \quad C'_2 \,], \quad D_R := D,$$

sono esternamente equivalenti per ogni coppia di matrici A''_{11}, B''_1.

Teorema 1.6.3 - Minimalità ed equivalenza interna
Due realizzazioni esternamente equivalenti (A, B, C, D) e (A_1, B_1, C_1, D) che siano entrambe minime sono anche internamente equivalenti.

Dim. La dimostrazione è riportata al Paragrafo C1.7. □

La seguente proprietà caratterizza l'equivalenza esterna attraverso le matrici di controllabilità ed osservabilità e verrà utilizzata al Paragrafo 2.1 per la trasformazione di un sistema generico ad una forma canonica esternamente equivalente.

Proprietà 1.6.2 Due realizzazioni esternamente equivalenti (A, B, C, D) e (A_1, B_1, C_1, D) soddisfano le relazioni

$$C\,R = C_1\,R_1\ , \tag{1.106}$$
$$Q\,B = Q_1\,B_1\ , \tag{1.107}$$
$$Q\,R = Q_1\,R_1\ , \tag{1.108}$$

in cui, come in precedenza, R ed R_1 indicano le matrici di controllabilità, Q e Q_1 quelle di osservabilità. Viceversa, se le matrici A e A_1 hanno gli stessi autovalori, una qualunque delle $(1.106, 1.108)$ comporta l'equivalenza esterna delle due realizzazioni date.

Dim. Sviluppando in serie l'esponenziale di matrice, dalla relazione $C\,e^{At}\,B = C_1\,e^{A_1 t}\,B_1$ si deduce $C\,A^i\,B = C_1\,A_1^i\,B_1$ per ogni intero ≥ 0: tali relazioni implicano le $(1.106, 1.108)$, come risulta da verifica diretta. □

Le $(1.106, 1.107)$ implicano $C\,A^i\,B = C_1\,A_1^i\,B_1$ $(i = 0, \ldots, n-1)$, mentre la (1.108) implica $C\,A^i\,B = C_1\,A_1^i\,B_1$ $(i = 0, \ldots, 2n-2)$; se A e A_1 hanno gli stessi autovalori, quindi lo stesso polinomio caratteristico, in virtù del teorema di Cayley-Hamilton tali relazioni si estendono ad ogni $i \geq 0$; dallo sviluppo in serie dell'esponenziale di matrice segue $C\,e^{At}\,B = C_1\,e^{A_1 t}\,B_1$.

Complementi al Capitolo 1

C1.1 Basi, sottospazi

Gli insiemi e, in particolare, gli spazi vettoriali e i sottospazi, vengono indicati con lettere maiuscole di tipo "calligrafico" ($\mathcal{A}$, $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$), la matrice trasposta di A con A^T, la coniugata trasposta di A nel campo complesso con A^*.

Sottospazi. Si consideri uno spazio vettoriale $\mathcal{V}$ definito su un campo $\mathcal{F}$ (con $\mathcal{F}=\mathbb{R}$ o $\mathcal{F}=\mathbb{C}$): un sottoinsieme $\mathcal{X}$ di $\mathcal{V}$ è un *sottospazio* di $\mathcal{V}$ se

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in \mathcal{X} \quad \forall\, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{F}, \quad \forall\, x_1, x_2 \in \mathcal{X} \ . \tag{1.109}$$

La *somma* di due sottospazi $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2 \in \mathcal{V}$ è l'insieme

$$\mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_2 := \{\, x \,:\, x = x_1 + x_2,\ x_1 \in \mathcal{X}_1,\ x_2 \in \mathcal{X}_2 \,\} \ ; \tag{1.110}$$

l'*intersezione* di due sottospazi $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2 \in \mathcal{V}$ è l'insieme

$$\mathcal{X}_1 \cap \mathcal{X}_2 := \{\, x \,:\, x \in \mathcal{X}_1,\ x \in \mathcal{X}_2 \,\} \ ; \tag{1.111}$$

si verifica facilmente che la somma e l'intersezione di sottospazi sono sottospazi.

Sia A una matrice $m \times n$ ad elementi nel campo $\mathcal{F}$. L'insieme

$$\mathrm{im}A := \{\, z \,:\, z = A\,x,\ x \in \mathcal{F}^n \,\} \tag{1.112}$$

si dice *immagine* di A; la dimensione di im$A$ si dice *rango* di A e si indica con $\rho(A)$. L'insieme

$$\ker A := \{\, x \,:\, x \in \mathcal{F}^n,\ A\,x = 0 \,\} \tag{1.113}$$

si dice *nucleo* o *spazio nullo* di A; la dimensione di ker$A$ si dice *nullità* di A e si indica con $\nu(A)$. Si dimostra facilmente che im$A$ e ker$A$ sono sottospazi, rispettivamente di $\mathcal{F}^m$ e $\mathcal{F}^n$ e che vale l'uguaglianza $\rho(A) + \nu(A) = n$.

Un generico sottospazio $\mathcal{H}$ dello spazio vettoriale $\mathcal{F}^n$ (con $\mathcal{F}=\mathbb{R}$ o $\mathcal{F}=\mathbb{C}$) avente dimensione finita $r < n$ viene usualmente assegnato mediante una matrice H, $n \times r$, le cui colonne siano una base di $\mathcal{H}$, cioè tale che sia $\mathcal{H} = \mathrm{im}H$. Essa viene detta *matrice di base* di $\mathcal{H}$. Ad esempio, in Fig. 1.21 è indicato un sottospazio $\mathcal{H}$ di $\mathbb{R}^3$: i vettori h_1 ed h_2 ne costituiscono una base ed $H := [h_1\ h_2]$ una matrice di base. La somma di un sottospazio e di un vettore non appartenente ad esso si dice *varietà lineare*. Ad esempio, nel caso dei sistemi lineari stazionari l'insieme delle velocità ammissibili nello stato generico x è la varietà lineare $\{Ax\} + \mathrm{im}B$.

Cambiamenti di base. Si consideri la Fig. 1.22 che, per fissare le idee, si riferisce ancora ad $\mathbb{R}^3$: in luogo della base principale e_1, e_2, e_3 si assuma una nuova base h_1, h_2, h_3, con $T := [h_1\ h_2\ h_3]$ non singolare. Se si indica con x il vettore delle componenti di un punto P nella base principale, con w quello delle componenti nella nuova base, risulta

$$x = T\,w \ , \quad w = T^{-1}\,x \ , \tag{1.114}$$

e alla matrice A, 3×3, che rappresenta una trasformazione lineare in $\mathbb{R}^3$ rispetto alla base principale, nella nuova base corrisponde la

$$A' = T^{-1} A T \ . \tag{1.115}$$

Quanto precede si può ovviamente generalizzare ad $\mathbb{R}^n$ o a $\mathbb{C}^n$. Due matrici lega-

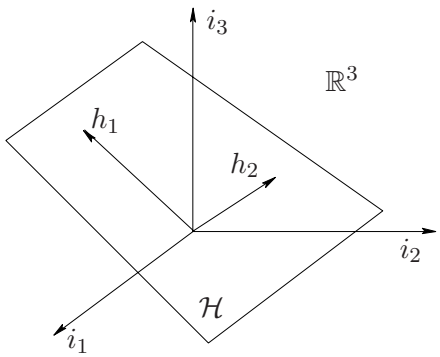


Fig. 1.21. Un sottospazio a due dimensioni definito in $\mathbb{R}^3$.

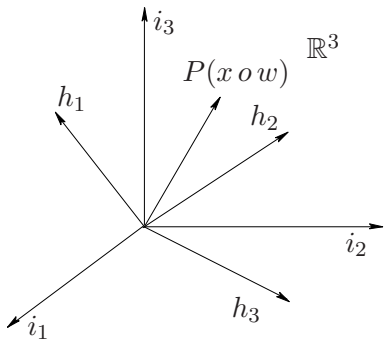


Fig. 1.22. Cambiamento di base in $\mathbb{R}^3$.

te da una trasformazione non singolare T come nella (1.115) si dicono *simili* e la trasformazione si dice *di similitudine*.

Sottospazi invarianti. Data una matrice $n \times n$ reale o complessa A, un sottospazio $\mathcal{H}$ di $\mathcal{F}^n$ (con $\mathcal{F} = \mathbb{R}$ o $\mathcal{F} = \mathbb{C}$) si dice *invariante in* A o A-*invariante* se

$$A\,\mathcal{H} \subseteq \mathcal{H} \ , \tag{1.116}$$

in cui $A\,\mathcal{H}$ rappresenta l'insieme ottenuto trasformando secondo A tutti i punti di $\mathcal{H}$, anch'esso un sottospazio.

Ad esempio im$A$ e ker$A$ sono invarianti in A. Si dimostra facilmente che la somma e l'intersezione di due o più invarianti in A sono invarianti in A, per cui si può definire il più grande invariante in A contenuto in un dato sottospazio $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}^n$ come la somma di tutti gli invarianti in A contenuti in $\mathcal{C}$ e il più piccolo invariante in A contenente un dato sottospazio $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}^n$ come l'intersezione di tutti gli invarianti in A contenenti $\mathcal{B}$. Sugli invarianti in rapporto ai cambiamenti di base vale il seguente teorema.

Teorema C1.1.1 Sia A una matrice $n \times n$ con elementi nel campo $\mathcal{F}$ e $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}^n$ un sottospazio invariante in A tale che $r := \dim\mathcal{H} \leq n$. Esiste una trasformazione di similitudine T tale che

$$A' := T^{-1}AT = \begin{bmatrix} A'_{11} & A'_{12} \\ O & A'_{22} \end{bmatrix} , \tag{1.117}$$

in cui A'_{11} è una matrice $r \times r$.

Dim. Si assuma $T := [H_1 \ H_2]$, non singolare tale che $\mathrm{im}H_1 = \mathcal{H}$, cioè tale che le prime r colonne costituiscano una matrice di base di $\mathcal{H}$. In questa nuova base ogni $x \in \mathcal{H}$ ha le ultime $n-r$ componenti uguali a zero ed è trasformato dalla matrice A' in un vettore appartenente a $\mathcal{H}$, che pertanto ha ancora le ultime $n-r$ componenti uguali a zero; questo accade se e solo se A' ha la struttura mostrata nella (1.117). □

Si noti che se nella (1.117) è $A'_{12} = O$ anche $\mathcal{K} := \mathrm{im}H_2$ è un invariante in A.

C1.2 Autovalori, autovettori, forma di Jordan

Data una matrice A, $n \times n$ reale o complessa, si consideri l'equazione

$$A\,x = \lambda\,x \ ,$$

che si può scrivere anche

$$(\lambda I - A)\,x = O \ . \tag{1.118}$$

La (1.118) ammette soluzioni in x diverse da zero se e solo se $(\lambda I - A)$ è singolare, cioè se e solo se

$$\det(\lambda I - A) = 0 \ . \tag{1.119}$$

Il primo membro della (1.119) è un polinomio $q(\lambda)$ di grado n, detto *polinomio caratteristico* di A: esso ha coefficienti reali se A è reale. La (1.119) è detta *equazione caratteristica* di A ed ammette n radici $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, in generale complesse, dette *autovalori* o *valori caratteristici* di A. Se A è reale, gli autovalori complessi sono coniugati a coppie. L'insieme $\sigma(A)$ di tutti gli autovalori di A è detto *spettro* di A. Un'importante proprietà del polinomio caratteristico è stabilita dal *teorema di Cayley-Hamilton*: "ogni matrice quadrata soddisfa la sua equazione caratteristica", cioè risulta $q(A) = O$.

Ad ogni autovalore di λ_i $(i = 1, \ldots, n)$ corrisponde almeno un vettore x_i reale o complesso diverso da zero che soddisfa la (1.119), detto *autovettore* o *vettore caratteristico* di A. Poiché per ogni autovettore x_i anche $\alpha\,x_i$, $\alpha \in \mathbb{R}$, è un autovettore, è conveniente usare *autovettori normalizzati*, cioè con norma euclidea unitaria. Se A è reale, gli autovettori corrispondenti ad autovalori complessi coniugati sono complessi coniugati.

Sia A una matrice $n \times n$ reale o complessa. Se gli autovalori di A sono distinti, i corrispondenti autovettori sono linearmente indipendenti. Matrici simili hanno gli stessi autovalori. Infatti da $A_1 := T^{-1}AT$ con T non singolare, segue

$$\begin{aligned}\det(\lambda I - T^{-1}AT) &= \det(\lambda T^{-1}IT - T^{-1}AT)\\ &= \det(T^{-1}(\lambda I - A)T)\\ &= \det T^{-1} \det(\lambda I - A) \det T\ ,\end{aligned}$$

che implica $\det(\lambda I - A) = 0$ se e solo se $\det(\lambda I - A_1) = 0$.

Un'importante trasformazione di similitudine è quella che riconduce una generica matrice quadrata A alla *forma di Jordan*. Tale forma, essendo la più semplice possibile, consente un'utile introspezione delle proprietà delle trasformazioni lineari. In particolare, viene qui illustrata *forma di Jordan reale*, alla quale ci si può ricondurre se A è reale.

Siano $\rho_1, \dots, \rho_h$ gli autovalori reali, $\mu_1, \dots, \mu_h$ le loro molteplicità, $\sigma_1 \pm j\omega_1, \dots, \sigma_{\bar{h}} \pm j\omega_{\bar{h}}$ le coppie di autovalori complessi e $\nu_1, \dots, \nu_{\bar{h}}$ le loro molteplicità. La forma di Jordan reale è una forma diagonale a blocchi, del tipo

$$J = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} R_1 & \dots & O & O & \dots & O \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & \dots & R_h & O & \dots & O \\ O & \dots & O & C_1 & \dots & O \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & \dots & O & O & \dots & C_{\bar{h}} \end{bmatrix}\ , \tag{1.120}$$

in cui le matrici R_i $(i = 1, \dots, h)$ e C_i $(i = 1, \dots, \bar{h})$ sono pure diagonali a blocchi:

$$R_i = \begin{bmatrix} R_{i1} & O & \dots & O \\ O & R_{i2} & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \dots & R_{i,h_i} \end{bmatrix}\ , \quad C_i = \begin{bmatrix} C_{i1} & O & \dots & O \\ O & C_{i2} & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \dots & C_{i,\bar{h}_i} \end{bmatrix}\ , \tag{1.121}$$

mentre le matrici $R_{i\ell}$ e $C_{i\ell}$ hanno rispettivamente le strutture

$$R_{i\ell} = \begin{bmatrix} \rho_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \rho_i & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \rho_i & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \rho_i \end{bmatrix} \quad (i = 1, \dots, h\,;\ \ell = 1, \dots, h_i)\ , \tag{1.122}$$

e

$$C_{i\ell} = \begin{bmatrix} B_i & I_2 & O & \dots & O \\ O & B_i & I_2 & \dots & O \\ O & O & B_i & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & O & \dots & B_i \end{bmatrix} \quad (i = 1, \dots, \bar{h}\,;\ \ell = 1, \dots, \bar{h}_i)\ , \tag{1.123}$$

con

$$B_i = \begin{bmatrix} \sigma_i & \omega_i \\ -\omega_i & \sigma_i \end{bmatrix}\ , \qquad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\ . \tag{1.124}$$

Le strutture (1.122) e (1.123) sono dette *blocchi di Jordan*. Per ogni autovalore reale si possono avere tanti blocchi di Jordan quanto è il suo ordine di molteplicità (e in questo caso ogni blocco si riduce a un solo elemento) oppure un unico blocco di dimensione pari alla molteplicità, oppure ancora più blocchi di dimensioni diverse, ma la cui somma sia pari alla molteplicità. Considerazioni analoghe valgono per le coppie di autovalori complessi. In definitiva, la forma di Jordan reale è una forma diagonale a blocchi, con blocchi dei tipi (1.122) e (1.123). Si noti che ogni blocco corrisponde ad un sottospazio invariante in A che a sua volta è strutturato nella forma di più invarianti di dimensioni crescenti ciascuno contenuto nel successivo: le dimensioni partono da uno e crescono di uno ad ogni passo nel caso del blocco (1.122), mentre partono da due e crescono di due ad ogni passo nel caso del blocco (1.123).

L'esponenziale di matrice in termini finiti. Si indichi con m la dimensione di $R_{i\ell}$; si dimostra facilmente, utilizzando lo sviluppo in serie (1.41) o per verifica diretta[9] che la relativa esponenziale di matrice è espressa dalla matrice di Toeplitz[10]

$$e^{R_{i\ell}t} = \begin{bmatrix} e^{\rho_i t} & t\,e^{\rho_i t} & \frac{t^2}{2}e^{\rho_i t} & \dots & \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}e^{\rho_i t} \\ 0 & e^{\rho_i t} & t\,e^{\rho_i t} & \dots & \frac{t^{m-2}}{(m-2)!}e^{\rho_i t} \\ 0 & 0 & e^{\rho_i t} & \dots & \frac{t^{m-3}}{(m-3)!}e^{\rho_i t} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{\rho_i t} \end{bmatrix}, \tag{1.125}$$

e, analogamente, indicando con $2m$ la dimensione di $C_{i\ell}$,

$$e^{C_{i\ell}t} = \begin{bmatrix} e^{B_i t} & t\,e^{B_i t} & \frac{t^2}{2}e^{B_i t} & \dots & \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}e^{B_i t} \\ O & e^{B_i t} & t\,e^{B_i t} & \dots & \frac{t^{m-2}}{(m-2)!}e^{B_i t} \\ O & O & e^{B_i t} & \dots & \frac{t^{m-3}}{(m-3)!}e^{B_i t} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & O & \dots & e^{B_i t} \end{bmatrix}, \tag{1.126}$$

con

$$e^{B_i t} = e^{\sigma_i t} \begin{bmatrix} \cos\omega_i t & \sin\omega_i t \\ -\sin\omega_i t & \cos\omega_i t \end{bmatrix}. \tag{1.127}$$

L'esponenziale e^{Jt} si determina semplicemente sostituendo ad ogni blocco di Jordan la sua esponenziale, data in termini finiti dalla relazione (1.125) o dalla (1.126). Una volta che la matrice A sia stata posta nella forma di Jordan, cioè si siano ricavate le matrici J e T tali che $A = T\,J\,T^{-1}$, risulta chiaramente $e^{At} = T\,e^{Jt}\,T^{-1}$. Attraverso la forma di Jordan si ha pertanto il modo di esprimere l'esponenziale di matrice in termini finiti anziché con uno sviluppo in serie. Le funzioni del tempo presenti nelle matrici (1.125) e (1.126) sono i *modi* della risposta del sistema dinamico a tempo continuo con matrice A.

---

[9] Sia $X(t) = e^{At}$: vale la relazione $\dot{X}(t) = A\,X(t)$.

[10] Una matrice A è *di Toeplitz* se l'elemento generico $(A)_{ij}$ dipende solo dal valore di $i-j$. Una matrice di Toeplitz è pertanto "costante lungo le diagonali". Ad esempio, il blocco di Jordan (1.122) e la sua esponenziale (1.125) sono matrici di Toeplitz.

Esempio C1.2.1 Si consideri la matrice

$$J = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & -3 \end{bmatrix},$$

già in forma di Jordan, con un autovalore reale (-2) di molteplicità 3 e una coppia di autovalori complessi coniugati $(-3 \pm 4j)$ di molteplicità 2. Si deduce

$$e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & t\,e^{-2t} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-3t}\cos 4t & e^{-3t}\sin 4t & t\,e^{-3t}\cos 4t & t\,e^{-3t}\sin 4t \\ 0 & 0 & 0 & -e^{-3t}\sin 4t & e^{-3t}\cos 4t & -t\,e^{-3t}\sin 4t & t\,e^{-3t}\cos 4t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-3t}\cos 4t & e^{-3t}\sin 4t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e^{-3t}\sin 4t & e^{-3t}\cos 4t \end{bmatrix}.$$

La potenza di matrice in termini finiti. Nel caso dei sistemi a tempo discreto la matrice di transizione dello stato è la matrice del sistema elevata al tempo discreto k. Anch'essa può essere espressa in termini finiti attraverso la forma di Jordan. La potenza di un blocco di Jordan reale di dimensione m è

$$R_{i\ell}^k = \begin{bmatrix} \rho_i^k & k\,\rho_i^{k-1} & \binom{k}{2}\rho_i^{k-2} & \dots & \binom{k}{m-1}\rho_i^{k-m+1} \\ 0 & \rho_i^k & k\,\rho_i^{k-1} & \dots & \binom{k}{m-2}\rho_i^{k-m+2} \\ 0 & 0 & \rho_i^k & \dots & \binom{k}{m-3}\rho_i^{k-m+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \rho_i^k \end{bmatrix}, \tag{1.128}$$

mentre quella di un blocco di dimensione $2m$ corrispondente a una coppia coniugata di radici complesse è

$$C_{i\ell}^k = \begin{bmatrix} B_i^k & k\,B_i^{k-1} & \binom{k}{2}B_i^{k-2} & \dots & \binom{k}{m-1}B_i^{k-m+1} \\ O & B_i^k & k\,B_i^{k-1} & \dots & \binom{k}{m-2}B_i^{k-m+2} \\ O & O & B_i^k & \dots & \binom{k}{m-3}B_i^{k-m+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & O & \dots & B_i^k \end{bmatrix}, \tag{1.129}$$

in cui B_i indica ancora il blocco elementare (1.124), la cui potenza è espressa dalla relazione

$$B_i^k = \begin{bmatrix} M_i^k \cos k\vartheta_i & M_i^k \sin k\vartheta_i \\ -M_i^k \sin k\vartheta_i & M_i^k \cos k\vartheta_i \end{bmatrix}, \tag{1.130}$$

dove M_i e $\pm\vartheta_i$ indicano rispettivamente i moduli e gli argomenti degli autovalori complessi coniugati cui si riferiscono i vari blocchi. Le successioni del tempo discreto k presenti nelle matrici (1.128) e (1.129) sono combinazioni lineari di funzioni dei tipi $k^n\,\rho^k$ nel caso reale e $k^n\,M_i^k \sin k\vartheta_i$, $k^n\,M_i^k \cos k\vartheta_i$ in quello complesso dette *modi* della risposta del sistema dinamico a tempo discreto con matrice A.

Esempio C1.2.2 Si consideri la matrice

$$J = \begin{bmatrix} R & O \\ O & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,3 & 0,4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,4 & 0,3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,3 & 0,4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,4 & 0,3 \end{bmatrix},$$

già in forma di Jordan, con un autovalore reale $(0,2)$ di molteplicità 3 e una coppia di autovalori complessi coniugati $(0,3 \pm 0,4j)$ di molteplicità 2. Risulta

$$J^k = \begin{bmatrix} R^k & O \\ O & C^k \end{bmatrix},$$

con

$$R^k = \begin{bmatrix} 0,2^k & k\,0,2^{k-1} & 0 \\ 0 & 0,2^k & 0 \\ 0 & 0 & 0,2^k \end{bmatrix},$$

$$C^k = \begin{bmatrix} M^k \cos k\vartheta & M^k \sin k\vartheta & k\,M^{k-1} \cos\left((k-1)\,\vartheta\right) & k\,M^{k-1} \sin\left((k-1)\,\vartheta\right) \\ -M^k \sin k\vartheta & M^k \cos k\vartheta & -k\,M^{k-1} \sin\left((k-1)\,\vartheta\right) & k\,M^{k-1} \cos\left((k-1)\,\vartheta\right) \\ 0 & 0 & M^k \cos k\vartheta & M^k \sin k\vartheta \\ 0 & 0 & -M^k \sin k\vartheta & M^k \cos k\vartheta \end{bmatrix},$$

in cui $M = 0,5$ e $\vartheta = 0,9273$ indicano il modulo e l'argomento dell'autovalore complesso $0,3 + 0,4j$.

C1.2.1 Dalla forma di Jordan complessa a quella reale

Anche se per le precedenti considerazioni si è fatto riferimento alla forma di Jordan reale perché più significativa in rapporto all'analisi dei sistemi, in alcuni casi (ad esempio per le dimostrazioni dei teoremi riportate nei Complementi di questo capitolo) conviene impiegare la forma di Jordan complessa, in cui si può porre una generica matrice reale A attraverso una trasformazione di similitudine T complessa.

La forma di Jordan complessa è più semplice di quella reale: essa presenta uno o più blocchi di Jordan del tipo (1.122) per ogni autovalore λ, reale o complesso; se A è reale, ai blocchi corrispondenti ad autovalori complessi sono associati blocchi di identica dimensione per i coniugati. La forma di Jordan reale si ricava da quella complessa con semplici passaggi e presenta i vantaggi che la trasformazione T è reale e che gli elementi dell'esponenziale di Jt nel caso dei sistemi a tempo continuo o della k-esima potenza di J in quello dei sistemi a tempo discreto rappresentano direttamente i modi del sistema.

Nella forma di Jordan complessa si conviene di affiancare, operando eventualmente permutazioni di righe e colonne[11], tutte le coppie di blocchi relativi ad autovalori

[11] Una permutazione di righe si ottiene premoltiplicando per la matrice, detta *matrice di permutazione di righe*, ottenuta applicando la stessa permutazione di righe alla matrice identità, mentre una permutazione di colonne si ottiene postmoltiplicando per la matrice, detta

complessi coniugati, che vengono trasformate ciascuna in un blocco reale; la matrice della trasformazione complessiva risulta evidentemente diagonale a blocchi, per cui è sufficiente esaminarne la struttura in relazione a due soli blocchi complessi coniugati.

Sia J_c la forma di Jordan complessa, costituita dai blocchi complessi coniugati J_1 e $\bar{J}_1$, di dimensione k. Una prima trasformazione di similitudine, definita da

$$T := \frac{1}{2}\begin{bmatrix} I_k & -jI_k \\ I_k & jI_k \end{bmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} I_k & I_k \\ jI_k & -jI_k \end{bmatrix}, \tag{1.131}$$

conduce alla forma

$$J_r' := T^{-1} J_c T = T^{-1}\begin{bmatrix} J_1 & O \\ O & \bar{J}_1 \end{bmatrix} T = \begin{bmatrix} \mathrm{Re}(J_1) & \mathrm{Im}(J_1) \\ -\mathrm{Im}(J_1) & \mathrm{Re}(J_1) \end{bmatrix},$$

dalla quale si ottiene la forma di Jordan reale J_r attraverso la permutazione di righe e colonne definita dall'ordine degli indici $i, i+k$ $(i=1,k)$. Ad esempio, se è $k=4$, il nuovo ordine di righe e colonne è $1,5,2,6,3,7,4,8$. Si può scrivere pertanto

$$J_r = P^{-1} J_r' P = P^{-1} T^{-1} J_c T P = (T P)^{-1} J_c T P, \tag{1.132}$$

in cui P è la matrice di permutazione di colonne così definita, P^{-1} la corrispondente matrice di permutazione di righe. Si può provare per verifica diretta che è

$$(T P)^{-1} = [\, I_{nd} + jI_{np} \quad I_{nd} - jI_{np} \,], \tag{1.133}$$

in cui I_{nd} e I_{np} indicano le matrici formate rispettivamente dalle colonne dispari e pari della matrice identità I_n. La (1.133) costituisce un'espressione relativamente semplice e mnemonica della matrice di trasformazione dalla forma di Jordan complessa (con blocchi coniugati affiancati) a quella reale e viceversa.

C1.3 Controllabilità e osservabilità riferite alla forma di Jordan

Ricorrendo alla forma di Jordan si posssono dimostrare in modo diretto e costruttivo i teoremi sulla controllabilità e osservabilità enunciati al Paragrafo 1.5. Si adotta la seguente linea logica:

1. Si ricavano condizioni necessarie e sufficienti affinché la coppia (A, b) sia controllabile o (A, c) osservabile quando A sia in forma di Jordan;

2. Utilizzando tale risultato, si ricavano condizioni necessarie e sufficienti affinché, essendo (A, b) controllabile, la coppia (A_d, b_d) ottenuta da essa per campionamento e tenuta di ordine zero sia anch'essa controllabile o, essendo (A, c) osservabile, la coppia (A_d, c_d) del corrispondente sistema campionato sia anch'essa osservabile.

3. Si dimostrano i Teoremi 1.5.1 e 1.5.2 per i sistemi a tempo discreto.

4. In base ai risultati di cui al punto 2 si estende in modo costruttivo la dimostrazione dei Teoremi 1.5.1 e 1.5.2 al caso dei sistemi a tempo continuo.

Il seguente lemma riveste un ruolo essenziale per le dimostrazioni legate ai concetti di controllabilità e osservabilità.

---

matrice di permutazione di colonne, ottenuta applicando la stessa permutazione di colonne alla matrice identità. L'inversa (o la trasposta che in questo caso è ad essa uguale, essendo le matrici ortogonali) di una permutazione di righe è la corrispondente permutazione di colonne e viceversa.

Lemma C1.3.1 - Criterio del rango [12]
La coppia (A, B) è controllabile se e solo se la matrice $n \times (n+p)$

$$R(s) := [\, sI - A \quad B \,] \tag{1.134}$$

è di rango massimo per ogni $s \in \mathbb{C}$; la coppia (A, C) è osservabile se e solo se la matrice $(n+q) \times n$

$$Q(s) := \begin{bmatrix} sI - A \\ C \end{bmatrix} \tag{1.135}$$

è di rango massimo per ogni $s \in \mathbb{C}$[13].

Dim. Si prende dapprima in esame il criterio per l'osservabilità. Se $Q(s)$ non è di rango massimo per ogni s complesso, (A, C) non è osservabile; infatti, detto λ un valore di s per cui $Q(s)$ non sia di rango massimo, risulta $\rho(Q(\lambda)) \leq n-1$ e $\nu(Q(\lambda)) \geq 1$: esiste pertanto almeno un $x \in \mathbb{C}^n$ tale che $(\lambda I - A)\, x = 0$, $C\, x = 0$. Se λ è reale, x è un invariante in A di dimensione uno contenuto in ker$C$ e il sistema non è osservabile; se λ è complesso, essendo A e C reali, anche i complessi coniugati di λ ed x soddisfano entrambe le precedenti relazioni e, posto $v := \mathrm{Re}(x)$, $w := \mathrm{Im}(x)$, con semplici passaggi si può mostrare che im$[v \;\; w]$ è un invariante in A di dimensione due contenuto in kerC e il sistema non è osservabile. Viceversa, se il sistema non è osservabile, esiste un invariante in A di dimensione generica $r \geq 1$ contenuto in ker$C$, per cui esiste una trasformazione di similitudine che pone la matrice A nella forma (1.84) e la matrice C nella forma $C' := CT = [O \;\; C'_2]$. Siano λ un autovalore di A'_{11} (quindi di A), x'_1 un corrispondente autovettore e x' il vettore ottenuto completando x'_1 con $n-r$ zeri; $x := T\, x'$ è un vettore non nullo che soddisfa la $Q(\lambda)\, x = 0$, per cui $\nu(Q(\lambda))$ ha dimensione almeno uno e $Q(\lambda)$ non è di rango massimo.

Il criterio per la controllabilità si deduce per dualità: (A, B) è controllabile se e solo se (A^T, B^T) è osservabile, il che, per quanto più sopra provato, è vero se e solo se la matrice

$$R^T(s) := \begin{bmatrix} sI - A^T \\ B^T \end{bmatrix}$$

è di rango massimo per ogni $s \in \mathbb{C}$. Questo avviene se e solo se la trasposta, che coincide con la matrice a secondo membro della (1.134), è di rango massimo. □

Teorema C1.3.1 - Controllabilità nella forma di Jordan complessa
La coppia (A, b) con A in forma di Jordan complessa è controllabile se e solo se:

1. A presenta un unico blocco per ogni autovalore;

[12] Nella letteratura questo criterio viene correntemente menzionato come il "criterio di Popov-Belevitch-Hautus" (PBH test).

[13] Si ricorda che, data una matrice A, $m \times n$, risulta $\rho(A) + \nu(A) = n$; per $m \leq n$ $\rho(A)$ è massimo se e solo se risulta $\rho(A) = m$, $\nu(A) = n - m$, mentre per $m \geq n$ $\rho(A)$ è massimo se e solo se risulta $\rho(A) = n$, $\nu(A) = 0$.

2. b ha l'elemento corrispondente all'ultima riga di ogni blocco diverso da zero.

Dim. Si dimostra dapprima la necessità della condizione 1, ragionando per assurdo. Si supponga infatti, ad esempio, che all'autovalore λ di A corrispondano due blocchi di dimensioni 3 e 2, cioè sia

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & O \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & \\ & & O & & & J_c \end{bmatrix},$$

ove J_c indica una matrice in forma di Jordan di dimensione $n-5$. Il criterio del rango non è soddisfatto, in quanto la matrice $n \times (n+1)$

$$R(s) := \begin{bmatrix} s-\lambda & -1 & 0 & 0 & 0 & & \beta_1 \\ 0 & s-\lambda & -1 & 0 & 0 & & \beta_2 \\ 0 & 0 & s-\lambda & 0 & 0 & O & \beta_3 \\ 0 & 0 & 0 & s-\lambda & -1 & & \beta_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s-\lambda & & \beta_5 \\ & & O & & & sI-J_c & b_c \end{bmatrix}$$

non è di rango massimo per $s=\lambda$, in quanto ha la prima e la quarta colonna nulle.

Si dimostra ora la necessità e sufficienza della condizione 2, cioè che la coppia

$$\left(\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \vdots \\ \beta_{r-1} \\ \beta_r \end{bmatrix} \right)$$

è controllabile se e solo se β_r è non nullo. In virtù del criterio del rango, la coppia è controllabile se e solo se la matrice $r \times (r+1)$

$$\begin{bmatrix} s-\lambda & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \beta_1 \\ 0 & s-\lambda & -1 & \dots & 0 & 0 & \beta_2 \\ 0 & 0 & s-\lambda & \dots & 0 & 0 & \beta_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & s-\lambda & -1 & \beta_{r-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & s-\lambda & \beta_r \end{bmatrix}$$

è di rango r per ogni $s \in \mathbb{C}$. Questo è vero se e solo se risulta $\beta_r \neq 0$. Infatti se è $\beta_r = 0$, per $s=\lambda$ si ottiene l'ultima riga nulla, mentre, se è $\beta_r \neq 0$, per $s \neq \lambda$ le prime r colonne sono linearmente indipendenti e per $s=\lambda$ le ultime r colonne sono linearmente indipendenti. $\square$

Corollario C1.3.1 - Osservabilità nella forma di Jordan complessa
La coppia (A, c) con A in forma di Jordan complessa è osservabile se e solo se:

1. A presenta un unico blocco per ogni autovalore;
2. c ha l'elemento corrispondente alla prima colonna di ogni blocco diverso da zero.

Dim. La dimostrazione può ricalcare quella del precedente teorema, utilizzando il criterio del rango per l'osservabilità anziché quello per la controllabilità. □

Il Teorema C1.3.1 e il Corollario C1.3.1 si estendono facilmente al caso MIMO.

Nel caso della controllabilità, assumendo la matrice A della coppia (A, B) in forma di Jordan complessa, condizione necessaria e sufficiente è che le righe di B corrispondenti all'ultima riga di ciascun blocco di Jordan relativi a uno stesso autovalore siano linearmente indipendenti.

Nel caso dell'osservabilità, assumendo la matrice A della coppia (A, C) in forma di Jordan complessa, condizione necessaria e sufficiente è che le colonne di C corrispondenti alla prima colonna di ciascun blocco di Jordan relativo a uno stesso autovalore siano linearmente indipendenti.

Il sequente corollario estende le condizioni alla forma di Jordan reale, limitatamente al caso SISO.

Corollario C1.3.2 - Estensioni alla forma di Jordan reale
La coppia (A, b) con A in forma di Jordan reale è controllabile se e solo se:

1. A presenta un unico blocco per ogni autovalore reale e per ogni coppia di autovalori complessi coniugati;
2. b ha l'elemento corrispondente all'ultima riga di ogni blocco relativo ad un autovalore reale e almeno uno degli elementi corrispondenti alle ultime due righe di ogni blocco relativo ad una coppia di autovalori complessi coniugati differenti da zero.

La coppia (A, c) con A in forma di Jordan reale è osservabile se e solo se:

1. A presenta un unico blocco per ogni autovalore reale e per ogni coppia di autovalori complessi coniugati;
2. c ha l'elemento corrispondente alla prima colonna di ogni blocco relativo ad un autovalore reale e almeno uno degli elementi corrispondenti alle prime due colonne di ogni blocco relativo ad una coppia di autovalori complessi coniugati differenti da zero.

Dim. Ci si riferisce alla trasformazione illustrata al Sottoparagrafo C1.2.1. Detto w il vettore che riporta gli elementi del vettore di distribuzione degli ingressi corrispondenti alle ultime righe di un blocco complesso e del coniugato, x quello che riporta gli elementi del vettore di distribuzione degli ingressi corrispondenti alle ultime due righe del relativo blocco reale, vale la relazione

$$w = T\,x \quad \text{con} \quad T = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -j \\ 1 & j \end{bmatrix} ,$$

da cui si deduce che gli elementi di w sono sempre complessi coniugati essendo per ipotesi quelli di x reali e che sono nulli se e solo se entrambi quelli di x sono nulli. L'asserto relativo all'osservabilità si prova in modo simile: infatti, detti w ed x gli analoghi elementi dei vettori di distribuzione delle uscite nel campo complesso e in quello reale, risulta

$$w = x\,T^{-1} \quad \text{con} \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{bmatrix} . \qquad \square$$

C1.4 Controllabilità e osservabilità dopo il campionamento

Si premettono alcune considerazioni sull'unicità della matrice di trasformazione alla forma di Jordan o ad altre forme canoniche. Sia A_1 una forma canonica di A, ad esempio la forma di Jordan (reale o complessa), per cui esiste una trasformazione T (reale o complessa) tale che $A_1 = T^{-1}A\,T$, o anche

$$T\,A_1 = A\,T\ . \tag{1.136}$$

La (1.136) è un'equazione di Sylvester omogenea che ammette soluzione non nulla in T solo se A_1 ed A hanno degli autovalori comuni (il che in effetti avviene nel caso in esame, in quanto tutti gli autovalori coincidono per ipotesi); la soluzione in genere non è unica; peraltro, se sono date due matrici B e B_1 tali che le coppie (A, B) e (A_1, B_1) siano controllabili oppure due matrici C e C_1 tali che (A, C) e (A_1, C_1) siano osservabili, esiste almeno una matrice T che soddisfa, oltre la (1.136), anche la $T\,B_1 = B$ o la $C_1 = CT$, determinabile utilizzando la prima o la seconda delle (1.102); tale matrice è unica nel caso SISO. Riveste particolare interesse il caso in cui A_1 sia in forma di Jordan complessa: la condizione di controllabilità data dal Teorema (C1.3.1) e quella di osservabilità data dal Corollario (C1.3.1) portano al seguente lemma.

Lemma C1.4.1
Una coppia (A, b) controllabile è equivalente ad una coppia (A_1, b_1) con A_1 in forma di Jordan complessa avente un unico blocco per ogni autovalore e b_1 formato da tutti zeri con degli uni in corrispondenza dell'ultima riga di ogni blocco; dualmente, una coppia (A, c) osservabile è equivalente ad una coppia (A_1, c_1) con A_1 in forma di Jordan complessa avente un unico blocco per ogni autovalore e c_1 formato da tutti zeri con degli uni in corrispondenza della prima colonna di ogni blocco.

Teorema C1.4.1 - Conservazione della controllabilità dopo il campionamento [14]
Data la coppia (A, b) controllabile, la corrispondente coppia campionata con tenuta di ordine zero (A_d, b_d) è controllabile se e solo se A non presenta autovalori complessi con la stessa parte reale e parti immaginarie differenti di multipli di $\Omega = 2\pi/T$, cioè di multipli della pulsazione di campionamento.

Dim. Detti $\sigma_i + j\omega_i$ $(i = 1, \ldots, k)$ gli autovalori complessi di A, la condizione si scrive

$$\sigma_i \neq \sigma_j \quad \text{oppure} \quad \omega_i - \omega_j \neq \frac{2\,\nu\,\pi}{T} \quad \forall\ i, j \in [1, k]\,,\ i \neq j\,,\ \nu \text{ intero}\,. \tag{1.137}$$

Si suppone che A sia in forma di Jordan complessa: l'ipotesi di controllabilità implica che essa presenti un blocco del tipo (1.122), per ogni autovalore distinto, e che b sia formato di tutti zeri con degli uni in corrispondenza dell'ultima riga di ogni blocco di Jordan (Lemma C1.4.1). Risulta $A_d = N$, $b_d = M$, con N ed M definite dalle (1.48,1.49). Ad ogni blocco di A corrisponde un blocco di $A_d = e^{AT}$, consistente in una matrice di Toeplitz del tipo (1.125). Si dimostra che esiste una trasformazione di similitudine che pone ogni blocco di A_d pure in forma di Jordan complessa, senza incidere sull'elemento di b_d corrispondente all'ultima riga. Detta A_T relativa a un blocco di A_d (di Toeplitz triangolare superiore con tutti gli elementi non nulli), A_J il corrispondente blocco di Jordan, si ricava una matrice V non singolare (anch'essa triangolare superiore), tale che $V A_J = A_T V$. Infatti dalla

$$\begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \ldots & m & t_2 & t_3 \\ \ldots & 0 & \ell & t_1 \\ \ldots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \ldots & \mu & 1 & 0 \\ \ldots & 0 & \mu & 1 \\ \ldots & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \ldots & \mu & \alpha & \beta \\ \ldots & 0 & \mu & \alpha \\ \ldots & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \ldots & m & t_2 & t_3 \\ \ldots & 0 & \ell & t_1 \\ \ldots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

si deducono le uguaglianze

$$\begin{aligned} \ell &= \alpha\ ; \\ m &= \alpha^2\ , \\ t_2 &= \alpha\, t_1 + \beta\ ; \\ n &= \alpha^3\ , \\ t_4 &= \alpha\, t_2 + \beta\, \ell\ , \\ t_5 &= \alpha\, t_3 + \beta\, t_1 + \gamma\ ; \\ o &= \alpha^4\ , \\ t_7 &= \alpha\, t_4 + \beta\, m\ , \\ t_8 &= \alpha\, t_5 + \beta\, t_2 + \gamma\, \ell\ , \\ t_9 &= \alpha\, t_6 + \beta\, t_3 + \gamma\, t_1 + \delta\ ; \end{aligned}$$

[14] Il Teorema C1.4.1 vale anche nel caso MIMO, cioè per una coppia (A, B) e la corrispondente A_d, B_d, ma in questo caso la (1.137) è solo sufficiente.

i simboli $n, o, \ldots, \gamma, \delta, \ldots, t_i$ $(i = 4, 5, \ldots)$ estendono in modo ovvio quelli indicati nelle matrici. Da esse risulta che V può essere determinata, per righe in ordine inverso, calcolando ogni elemento in funzione dei precedenti e degli elementi di A_T, essendo α non nullo. Si noti che $t_1, t_3, t_6, \ldots$ sono arbitrari e, di conseguenza, la trasformazione non è unica; si noti inoltre che V e la sua inversa presentano l'ultima riga uguale a quella della matrice identità, per cui conservano l'ultimo elemento di ogni vettore per cui vengano moltiplicate. La trasformazione diagonale a blocchi, ottenuta componendo quelle così ricavate per ogni blocco, fornisce una rappresentazione (A'_d, b'_d) del sistema discreto con A'_d in forma di Jordan; questa, in virtù del Teorema (C1.3.1), risulta controllabile se e solo se i blocchi di A'_d corrispondono ad autovalori distinti, il che, essendo gli autovalori di A_d e di A legati dalla relazione $\mu = e^{\lambda T}$, avviene se e solo se vale la condizione (1.137), e gli elementi di b'_d corrispondenti all'ultima riga di ogni blocco sono diversi da zero. Tali elementi, uguali a quelli di b_d per quanto sopra notato, sono dati da

$$\int_0^T e^{\lambda t}\, dt = \begin{cases} T & \text{per } \lambda = 0 \\ \frac{1}{\lambda}\,(e^{\lambda T} - 1) & \text{per } \lambda \neq 0 \end{cases}$$

dove λ indica l'autovalore di A relativo al blocco in oggetto: essi sono in effetti uguali a zero solo se λ è puramente immaginario e multiplo della pulsazione di campionamento, il che è escluso dalla (1.137). □

Il seguente risultato relativo all'osservabilità si dimostra in modo analogo.

Corollario C1.4.1 - Conservazione dell'osservabilità dopo il campionamento
Data la coppia (A, c) osservabile, la corrispondente coppia campionata (A_d, c) è osservabile se e solo se A non presenta autovalori complessi con la stessa parte reale e parti immaginarie differenti di multipli di Ω.

C1.5 Insieme raggiungibile e insieme inosservabile: sistemi a tempo discreto

Dimostrazione del Teorema 1.5.1 per i sistemi a tempo discreto. Si prova che applicando un'opportuna sequenza di ingresso $u(k)$ $(k = 0, \ldots, k_1;\ k_1 \geq n-1)$ si può imporre al sistema (1.83,1.84), inizialmente supposto nello stato zero, uno stato finale arbitrario $x(kT)$ se e solo se questo appartiene all'*insieme raggiungibile*

$$\mathcal{R}_d := \mathrm{im} R_d\,, \quad \text{con} \quad R_d := [\, B_d \quad A_d B_d \quad \ldots \quad A_d^{n-1} B_d \,]\ . \tag{1.138}$$

Per sostituzione ricorrente si ricava

$$x(k) = A_d^k\, x_0 + \sum_{h=0}^{k-1} A_d^{k-h-1}\, B_d\, u(h)\ , \tag{1.139}$$

che per $k=n$ ed essendosi supposto $x_0=0$ conduce alla

$$x(n)=\sum_{h=0}^{n-1} A_d^{n-h-1}\, B_d\, u(h) = R_d\, U^T\,, \quad \text{con} \quad U := [\, u(0) \quad u(1) \quad \dots \quad u(n-1)\,]\ , \tag{1.140}$$

da cui risulta che l'insieme raggiungibile con n campioni di ingresso è il sottospazio $\mathrm{im}R_d$. L'aggiunta di ulteriori campioni non consente di aumentare l'insieme raggiungibile in quanto, in conseguenza del teorema di Cayley-Hamilton, A_d^{n+i} è esprimibile come combinazione lineare di $A_d^i, A_d^{i+1}, \dots, A_d^{n+i-1}$ per ogni $i \geq 0$. □

Dimostrazione del Teorema 1.5.2 per i sistemi a tempo discreto. Si prova che, date la sequenza di ingresso $u(k)$ e quella di uscita $y(k)$ ($k=0,\dots,k_1$; $k_1 \geq n-1$) si può determinare lo stato iniziale $x(0)$ o corrente $x(k)$ del sistema (1.83,1.84) a meno di un vettore del sottospazio (detto *insieme inosservabile*)

$$\mathcal{Q}_d := \ker Q_d\,, \quad \text{con} \quad Q_d := \begin{bmatrix} C_d \\ C_d\, A_d \\ \vdots \\ C_d\, A_d^{n-1} \end{bmatrix}\ . \tag{1.141}$$

Sostituendo la (1.139) nella (1.84) si ricava

$$y(k) = C_d\, A_d^k\, x(0) + C_d \sum_{h=0}^{k-1} A_d^{k-h-1}\, B_d\, u(h) + D_d\, u(k)\ ; \tag{1.142}$$

essendo data la sequenza di ingresso, si conoscono e si possono sottrarre ad ambo i membri i termini dipendenti da essa. Si viene così a determinare la sequenza di uscita $y_0(k)$ ($k=0,\dots,k_1-1$; $k_1 \geq n$) del sistema omogeneo corrispondente al sistema (1.83,1.84) e con lo stesso stato iniziale, descritto da

$$\begin{aligned} x_0(k+1) &= A_d\, x_0(k)\ , \quad x_0(0) = x_0\ , \\ y_0(k) &= C_d\, x_0(k)\ . \end{aligned}$$

Risulta, infatti,

$$y_0(k) = y(k) - C_d \sum_{h=0}^{k-1} A_d^{k-h-1}\, B_d\, u(h) - D_d\, u(k) = C_d\, A_d^k\, x(0)\ ;$$

per $k=n$, riportando i termini della sequenza come righe di una matrice, la precedente relazione si può scrivere

$$Y_0^T = Q_d\, x(0)\,, \quad \text{con} \quad Y_0 := [\, y_0(0) \quad y_0(1) \quad \dots \quad y_0(n-1)\,]\ , \tag{1.143}$$

da cui risulta che lo stato iniziale si può determinare a meno di un vettore appartenente a $\ker Q_d$ conoscendo n campioni successivi dell'uscita del sistema omogeneo. L'aggiunta di ulteriori campioni non consente di diminuire il sottospazio inosservabile in quanto, in conseguenza del teorema di Cayley-Hamilton, A_d^{n+i} è esprimibile come combinazione lineare di $A_d^i, A_d^{i+1}, \dots, A_d^{n+i-1}$ per ogni $i \geq 0$ e quindi i successivi

campioni dell'uscita $y_0(k)$, $k \geq n-1$, sono funzioni dei precedenti. Una volta determinato lo stato iniziale $x(0)$, la (1.139) consente di dedurre non solo lo stato corrente $x(k)$, ma anche tutti quelli intermedi e quello immediatamente futuro $x(k+1)$. □

Si noti che le precedenti dimostrazioni sono costruttive, nel senso che risolvono rispettivamente il problema della determinazione di una sequenza di ingresso che consente di raggiungere dall'origine un dato stato $x(n)$ di un sistema completamente controllabile e quello della determinazione dello stato iniziale date le sequenze di ingresso e di uscita $u(k)$ e $y(k)$ $(k=0,\ldots,k_1;\ k_1 \geq n-1)$ di un sistema completamente osservabile. Dalle (1.140) e (1.143) si ricava, infatti, rispettivamente $U = R_d^+\, x(nT)$ e $x(0) = Q_d^+\, Y_0$, in cui R_d^+ e Q_d^+ indicano rispettivamente la pseudoinversa destra di R_d e quella sinistra di Q_d[15].

C1.6 Insieme raggiungibile e insieme inosservabile: sistemi a tempo continuo

Dimostrazione del Teorema 1.5.1 per i sistemi a tempo continuo. Attraverso il Teorema C1.4.1 e il Corollario C1.4.1, il controllo e l'osservazione dei sistemi a tempo continuo si riconducono a quelli dei sistemi a tempo discreto. Si consideri, infatti, il sistema a tempo discreto

$$x_d((k+1)T) = A_d\, x_d(kT) + B_d\, u_d(kT)\ , \quad x(0) = x_0\ , \tag{1.144}$$

$$y_d(kT) = C\, x(kT) + D\, u_d(kT)\ , \tag{1.145}$$

ottenuto dal sistema continuo (1.80,1.81) mediante l'operazione di *campionamento*, consistente nell'applicazione di una funzione di ingresso costante a tratti, come quella di Fig. 1.11, e nella considerazione dello stato e dell'uscita solo in corrispondenza degli istanti $0, T, 2T, \ldots$; A_d e B_d sono definite, in funzione di A, B e T, come N ed M nelle (1.48,1.49).

In particolare ci si riferisce, per il momento, ad una coppia SISO (A, b) e si suppone che essa sia controllabile, cioè che $\mathcal{R}$ coincida con l'intero spazio degli stati. Si fissa un intervallo $[t_a, t_1]$, con $0 \leq t_a < t_1$, tale che, posto $T = (t_1 - t_a)/n$, la (1.137) sia soddisfatta; la corrispondente coppia a tempo discreto (A_d, b_d) risulta pertanto anch'essa controllabile. Si indicano con u_d e x_d l'ingresso e lo stato del sistema a tempo discreto: in virtù del Teorema C1.3.1 per i sistemi a tempo discreto, dimostrato al precedente paragrafo, esiste una sequenza $u_d(kT)$ $(k=0,\ldots,n-1)$ che produce la transizione dello stato da $x_d(0)=0$ a $x_d(nT) = x(t_1)$. La funzione di ingresso costante a tratti

$$u(t) := \begin{cases} 0 & \text{per } \ 0 \leq t < t_a\ , \\ u_d(kT) & \text{per } \ t_a + kT \leq t < t_a + (k+1)T \quad (k=0,\ldots,n-1)\ , \end{cases}$$

[15] La seconda relazione si ottiene semplicemente premoltiplicando ambo i membri della (1.143) per Q_d^+, mentre la prima si ottiene considerando la trasposta della (1.140), premoltiplicando per la pseudoinversa sinistra di R_d^T e trasponendo di nuovo. La pseudoinversa destra di una matrice coincide infatti con la trasposta della pseudoinversa sinistra della matrice trasposta e viceversa. Si noti che nel caso dei sistemi MIMO il primo problema conduce ad un sistema di equazioni lineari sottodeterminato e il secondo ad un sistema sovradeterminato.

applicata al sistema continuo, produce evidentemente la transizione da $x(0)=0$ allo stato $x(t_1)$ assegnato.

Se $\mathcal{R}$ non coincide con l'intero spazio degli stati, si opera un cambiamento di base: si sceglie la matrice $V=[V_1\ V_2]$ in modo che sia $\mathrm{im}V_1=\mathcal{R}$. In conseguenza del fatto che $\mathcal{R}$ è un invariante in A contenente $\mathrm{im}b$, la matrice del sistema e quella di distribuzione degli ingressi nella nuova base presentano le strutture

$$A' := V^{-1}A\,V = \begin{bmatrix} A'_{11} & A'_{12} \\ O & A'_{22} \end{bmatrix} \ , \quad b' := V^{-1}b = \begin{bmatrix} b'_1 \\ O \end{bmatrix} \ , \tag{1.146}$$

dalle quali risulta che non è raggiungibile alcuno stato non appartenente a $\mathcal{R}$. Essendo $\mathcal{R}$, considerato nella nuova base, il minimo invariante in A' contenente $\mathrm{im}b'$, la coppia (A'_{11}, b'_1) è controllabile. Indicando con $w=[w_1^T\ w_2^T]^T$ lo stato nella nuova base, per cui risulta

$$\dot{w}_1(t) = A'_{11}\,w_1(t) + b'_1\,u(t) \ ,$$

si determina come sopra il segmento di funzione di ingresso $u|_{[0,t_1]}$ che consente di raggiungere lo stato $w_1(t_1)$ dato dalla

$$[w_1(t_1)^T\ O^T]^T = V^{-1}\,x(t_1).$$

L'estensione al caso multivariabile si opera in modo analogo. Ci si riferisce alla coppia (A,B), non necessariamente controllabile, in cui si suppone, per semplicità, che B sia $n\times 2$ (due soli ingressi). Sia $\mathcal{R}_1$ il sottospazio raggiungibile relativo al primo ingresso, $\mathcal{R}$ quello complessivo. Si opera il cambiamento di base corrispondente a $V:=[V_1\ V_2\ V_3]$, con $\mathrm{im}V_1=\mathcal{R}_1$, $\mathrm{im}[V_1\ V_2]=\mathcal{R}$. Risulta

$$A' := V^{-1}A\,V = \begin{bmatrix} A'_{11} & A'_{12} & A'_{13} \\ O & A'_{22} & A'_{23} \\ O & O & A'_{33} \end{bmatrix} \ , \quad B' := V^{-1}B = \begin{bmatrix} b'_{11} & b'_{12} \\ O & b'_{22} \\ O & O \end{bmatrix} \ . \tag{1.147}$$

Le coppie (A'_{11}, b'_{11}) e (A'_{22}, b'_{22}) sono controllabili per costruzione (infatti il primo ingresso non influisce sul secondo sottosistema, per cui esso deve essere completamente controllabile con il solo secondo ingresso). Posto $u=[u_1\ u_2]$, si determina come sopra il segmento di funzione di ingresso $u_2|_{[0,t_1]}$ che produce la transizione del secondo sottosistema allo stato finale voluto $w_2(t_1)$; esso peraltro, in conseguenza dell'accoppiamento dovuto alla sottomatrice A'_{12}, influisce anche sullo stato finale del primo sottosistema, portandolo ad un valore $w_{12}(t_1)$, facilmente calcolabile. Si determina poi il segmento $u_1|_{[0,t_1]}$ che produce la transizione dello stato del primo sottosistema a $w_1(t_1)-w_{12}(t_1)$, in cui $w_1(t_1)$ è lo stato finale voluto; naturalmente $w_3(t)$ resta identicamente nullo, in quanto il terzo sottosistema non è controllabile. L'estensione al caso di un numero di ingressi superiore è banale. □

Dimostrazione del Teorema 1.5.2 per i sistemi a tempo continuo. Dati i segmenti di funzioni di ingresso e di uscita $u|_{[0,t_1]}$ e $y|_{[0,t_1]}$, si può dedurre, analogamente al caso a tempo discreto, il segmento di funzione di uscita corrispondente al moto libero

$$y_0(t) = y(t) - C\int_0^t e^{A(t-\tau)}\,B\,u(\tau)\,d\tau - D\,u(t) = C\,e^{At}\,x(0) \ , \quad t\in[0,t_1] \ . \tag{1.148}$$

Ci si riferisce dapprima ad una coppia SISO (A, c) e si suppone che essa sia osservabile, cioè che $\mathcal{Q}$ coincida con l'origine. Si determina quindi un periodo di campionamento T tale che sia soddisfatta la (1.137) e che sia $(n-1)T \leq t_1$; la corrispondente coppia a tempo discreto (A_d, c) risulta anch'essa osservabile, per cui, in virtù del Teorema 1.5.2 per i sistemi a tempo discreto dimostrato al precedente paragrafo, la sequenza $y_0(kT)$ $(k=0,\ldots,n-1)$ consente di determinare lo stato iniziale $x(0)$. Mediante la (1.43) si può successivamente dedurre non solo lo stato corrente $x(t_1)$, ma anche tutti quelli intermedi $x|_{[0,t_1]}$.

Se $\mathcal{Q}$ non coincide con l'origine, si opera un cambiamento di base: si sceglie la relativa matrice $V = [V_1\ V_2]$ in modo che sia $\mathrm{im} V_1 = \mathcal{Q}$. In conseguenza del fatto che $\mathcal{Q}$ è un invariante in A contenuto in $\ker c$, la matrice del sistema e quella di distribuzione degli ingressi nella nuova base presentano le strutture

$$A' := V^{-1} A\, V = \begin{bmatrix} A'_{11} & A'_{12} \\ O & A'_{22} \end{bmatrix} \ , \quad c' := c\, V = [\, O \quad c'_2 \,] \ , \tag{1.149}$$

dalle quali risulta che tutti gli stati appartenenti a $\mathcal{Q}$ non sono osservabili. Essendo $\mathcal{Q}$, considerato nella nuova base, il massimo invariante in A' contenuto in $\ker c'$, la coppia (A'_{22}, c'_2) è osservabile. Indicando con $w = [w_1^T\ w_2^T]^T$ lo stato del sistema omogeneo nella nuova base, per cui risulta

$$\dot{w}_2(t) = A'_{22}\, w_2(t) \ , \quad y_0(t) = c'_2\, w_2(t) \ ,$$

si determina come sopra lo stato iniziale $w_2(0)$, da cui si ricava poi $x(0) = V\,[\alpha^T\ w_2(0)^T]^T$, in cui α è un vettore di parametri arbitrari avente la stessa dimensione di w_1, che rappresenta l'indeterminatezza dello stato iniziale dovuta al fatto che (A, c) non è osservabile.

Si considera ora l'estensione al caso multivariabile. Ci si riferisce alla coppia (A, C), non necessariamente osservabile, in cui si suppone, per semplicità, che C sia $2 \times n$ (due sole uscite). Sia $\mathcal{Q}$ il sottospazio inosservabile complessivo, $\mathcal{Q}_2$ quello relativo alla seconda uscita. Si opera il cambiamento di base corrispondente a $V := [V_1\ V_2\ V_3]$, con $\mathrm{im} V_1 = \mathcal{Q}$, $\mathrm{im}[V_1 V_2] = \mathcal{Q}_2$. Risulta

$$A' := V^{-1} A\, V = \begin{bmatrix} A'_{11} & A'_{12} & A'_{13} \\ O & A'_{22} & A'_{23} \\ O & O & A'_{33} \end{bmatrix} \ , \quad C' := C\, V = \begin{bmatrix} O & c'_{12} & c'_{13} \\ O & O & c'_{23} \end{bmatrix} \ . \tag{1.150}$$

Le coppie (A'_{33}, c'_{23}) e (A'_{22}, c'_{12}) sono osservabili per costruzione (infatti il secondo sottosistema non influisce sulla seconda uscita, per cui esso deve essere completamente osservabile con la sola prima uscita). Posto $y_0 = [y_1\ y_2]^T$, si determina come sopra da $y_2|_{[0,t_1]}$ lo stato iniziale del terzo sottosistema $w_3(0)$ e si calcola poi la variazione della prima uscita da esso causata in conseguenza dell'accoppiamento dovuto alla sottomatrice A'_{23}: sia questa $y_{23}|_{[0,t_1]}$; assumendo come prima uscita il segmento $(y_1 - y_{23})|_{[0,t_1]}$, si determina poi nello stesso modo lo stato iniziale del secondo sottosistema $w_2(0)$, mentre $w_1(0)$ non è determinabile, in quanto il primo sottosistema non è osservabile. L'estensione al caso di un numero di uscite superiore è banale. □

C1.7 Controllabilità, osservabilità e minimalità

Dimostrazione del Teorema 1.6.2 Si dimostra che una realizzazione (A, B, C, D) è minima se e solo se (A, B) è controllabile e (A, C) è osservabile. La dimostrazione viene sviluppata sia per il caso a tempo continuo sia per quello a tempo discreto.

Solo se. Una realizzazione in cui (A, B) non sia controllabile e (A, C) non sia osservabile non può essere minima perché, come risulta dalla (1.105), il solo sottosistema 2 della scomposizione canonica di Kalman influisce sul comportamento ingresso-uscita.

Se. Sia data una realizzazione di ordine n con (A, B) controllabile e (A, C) osservabile. Ciò implica che nello spazio delle funzioni di ingresso definite in un dato intervallo di tempo $[0, t_1]$ (o $[0, n-1]$) si possano determinare n elementi linearmente indipendenti che consentono di raggiungere, a partire dall'origine, gli n versori dello spazio degli stati al tempo t_1 (o n) e che, dualmente, nello spazio delle funzioni di uscita definite in un dato intervallo di tempo $[0, t_1]$ (o $[0, n-1]$) si possano determinare n elementi linearmente indipendenti che corrispondono ai moti con ingresso zero e con stati iniziali dati dagli n versori dello spazio degli stati. Se si applicano le n funzioni di ingresso di cui sopra in $[0, t_1]$ (o $[0, n-1]$) e si osservano poi, con ingresso identicamente nullo, le corrispondenti uscite in $[t_1, 2t_1]$ (o $[n, 2n-1]$), si ritrovano le funzioni di uscita di cui sopra traslate nel tempo. Poichè queste sono linearmente indipendenti in un intervallo di tempo in cui l'ingresso è nullo, lo stesso comportamento ingresso-uscita non si può ottenere da una realizzazione di ordine $n_1 < n$. □

Una dimostrazione alternativa per il caso SISO. Se. Sia data una realizzazione (A, b, c, d) di ordine n con (A, b) controllabile e (A, c) osservabile. Senza ledere la generalità, si può supporre A in forma di Jordan complessa con un unico blocco per ogni autovalore distinto λ_i $(i = 1, \ldots, h)$, b formato di tutti zeri con degli uni in corrispondenza dell'ultima riga di ogni blocco (Lemma C1.4.1) e c con l'elemento corrispondente alla prima colonna di ogni blocco diverso da zero (Corollario C1.3.1). Le esponenziali o le potenze dei blocchi di Jordan sono date dalle (1.17) o (1.20) con λ_i in luogo di ρ_i. Le condizioni poste implicano che nelle funzioni di risposta all'impulso $c\, e^{At}\, b$ o $c\, A^k\, b$ siano presenti tutti i termini

$$\frac{t^{m_i-1}}{(m_i-1)!} e^{\lambda_i t} \quad (i = 1, \ldots, h) \ ,$$

nel caso a tempo continuo, oppure

$$\binom{k}{m_i-1} \lambda_i^{k-m_i+1} \quad (i = 1, \ldots, h) \ ,$$

nel caso a tempo discreto. Con m_i $(i = 1, \ldots, h)$ si indicano le molteplicità degli autovalori λ_i. Poiché il termine generico non si può ottenere da un blocco di dimensione inferiore ad m_i e risulta $\sum_{i=1}^{h} m_i = n$, la stessa risposta all'impulso non può corrispondere ad una realizzazione di ordine $n_1 < n$. □

Dimostrazione del Teorema 1.6.3 Si dimostra che, date due diverse realizzazioni minime (A, B, C, D) e (A_1, B_1, C_1, D) di una stessa risposta all'impulso $W(t)$

(o $W(k)$ nel caso a tempo discreto), esiste una trasformazione non singolare T che soddisfa le (1.98).

Si prende in esame dapprima il caso a tempo discreto: dalla (1.66) risulta che le due realizzazioni forniscono la stessa risposta all'impulso se e solo se $C_1 A_1^k B_1 = C A^k B$ per ogni $k \geq 0$. Siano R ed R_1 le matrici di controllabilità, Q e Q_1 quelle di osservabilità delle due realizzazioni, non singolari in virtù del Teorema 1.6.2. Si assume $T_c := R R_1^{-1}$ e si indicano con x e z gli stati raggiunti applicando la sequenza di ingresso di lunghezza n rappresentata dalla matrice U di dimensione $np \times 1$: risulta $x = R U$, $z = R_1 U$ e, quindi, $x = T_c z$. Analogamente, posto $T_o := Q^{-1} Q_1$, se si indica con Y la matrice $nq \times 1$ che rapppresenta la sequenza di uscita di lunghezza n corrispondente a tali stati iniziali con ingresso zero, risulta $Y = Q x$, $Y = Q_1 z$, quindi $x = T_o z$. Per congruenza deve essere $T_o = T_c$. Posto $T := T_c = T_o$, si ottiene

$$T B_1 = B\,, \quad T A_1 B_1 = A B\,, \quad \ldots\,, \quad T A_1^{n-1} B_1 = A^{n-1} B\,, \tag{1.151}$$

$$C_1 = C T\,, \quad C_1 A_1 = C A T\,, \quad \ldots\,, \quad C_1, A_1^{n-1} = C A^{n-1} T\,, \tag{1.152}$$

relazioni che implicano sia l'eguaglianza delle risposte all'impulso (in virtù del teorema di Cayley-Hamilton, che consente di estendere le relazioni alle potenze di A e A_1 superiori ad $n-1$), sia le (1.98).

Il caso a tempo continuo si riporta a quello a tempo discreto applicando i risultati del precedente paragrafo sulla controllabilità e osservabilità dopo il campionamento e notando che l'equivalenza dei sistemi, con la stessa matrice di trasformazione T, viene mantenuta passando dal tempo continuo a quello discreto. In questo caso dalla (1.46) risulta che le due realizzazioni forniscono la stessa risposta all'impulso se e solo se $C_1 e^{A_1 t} B_1 = C e^{At} B$. Tale relazione consegue alle (1.151, 1.152) attraverso lo sviluppo in serie dell'esponenziale di matrice e il teorema di Cayley-Hamilton. □

2

ALLOCAZIONE DEI POLI E SINTESI DEI REGOLATORI

Si prosegue l'analisi delle proprietà dei sistemi lineari stazionari indagando, in particolare, sul legame fra la rappresentazione nello spazio degli stati e la funzione di trasferimento. Dopo aver introdotto alcune realizzazioni canoniche, si presentano gli strumenti fondamentali per la sintesi dei regolatori nello spazio degli stati, cioè l'allocazione dei poli con retroazione stato-ingresso e la stima dello stato mediante osservatori asintotici. Si illustra quindi la proprietà di separazione dei poli allocati con retroazione e di quelli dell'osservatore e si presenta una procedura per la sintesi diretta per sistemi SISO, attraverso le sintesi separate dell'unità di stabilizzazione e di quella di regolazione asintotica.

2.1 Alcune realizzazioni canoniche

Si passeranno ora in rassegna le principali realizzazioni canoniche della funzione di trasferimento SISO

$$G(s) = \frac{\beta_n s^n + \beta_{n-1} s^{n-1} + \ldots + \beta_0}{s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \ldots + \alpha_0} \quad : \tag{2.1}$$

la realizzazione del regolatore, quella dell'osservatore, la realizzazione parallela riferita all'ingresso e la realizzazione parallela riferita all'uscita. Sono tutte di notevole utilità per la soluzione di problemi di sintesi di sistemi di controllo in retroazione.

1. Realizzazione canonica del regolatore

La *realizzazione canonica del regolatore* è una delle più importanti: è quella che si usa generalmente per passare da $G(s)$ ad (A, b, c, d) e viceversa e per l'allocazione degli autovalori mediante retroazione stato-ingresso.

Per semplificare la notazione, ci si riferisce al caso particolare di $n = 4$. La realizzazione canonica del regolatore è espressa da

$$\begin{aligned} \dot{w}(t) &= A_1\, w(t) + b_1\, u(t) \ , \\ y(t) &= c_1\, w(t) + d\, u(t) \ , \end{aligned}$$

con

$$A_1 = \begin{bmatrix} -\alpha_3 & -\alpha_2 & -\alpha_1 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} , \qquad b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ,$$

$$c_1 = [\ \bar{\beta}_3 \quad \bar{\beta}_2 \quad \bar{\beta}_1 \quad \bar{\beta}_0\ ] , \qquad d = \beta_4 . \tag{2.2}$$

Si noti che gli elementi significativi della matrice A_1 sono i coefficienti del polinomio caratteristico $(1, \alpha_3, \alpha_2, \alpha_1, \alpha_0)$. Una matrice di questo tipo si dice *in forma compagna*.

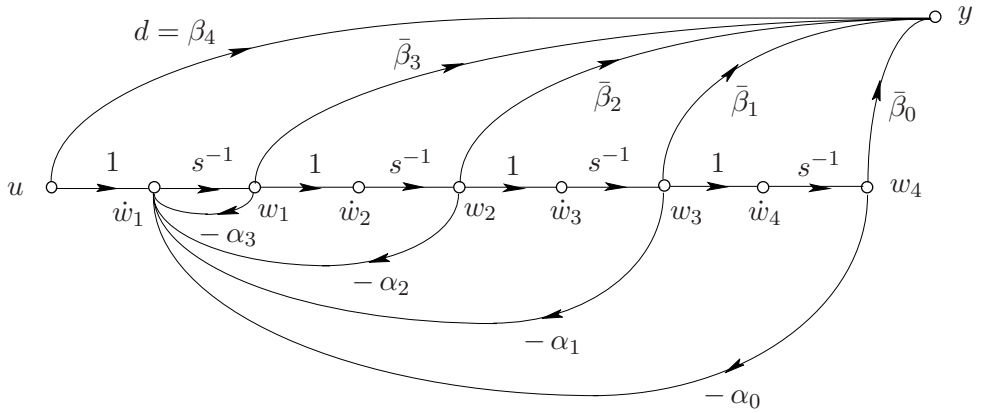


Fig. 2.1. La realizzazione canonica del regolatore.

Per ottenere la realizzazione del regolatore (A_1, b_1, c_1, d) da una generica realizzazione minima (A, b, c, d), in base alla prima delle (1.102) si assume la matrice di trasformazione

$$T = R\, R_1^{-1} = R\, M_q , \tag{2.3}$$

in cui R è la matrice di controllabilità di (A, b) e R_1 quella di (A_1, b_1), non singolare per costruzione: essa risulta infatti triangolare superiore con elementi unitari sulla diagonale e la sua inversa è la matrice di Toeplitz

$$R_1^{-1} = M_q := \begin{bmatrix} 1 & \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 \\ 0 & 1 & \alpha_3 & \alpha_2 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \tag{2.4}$$

si impiegano poi le relazioni

$$A_1 = T^{-1} A T , \quad b_1 = T^{-1} b , \quad c_1 = c T . \tag{2.5}$$

Per ottenere la realizzazione canonica del regolatore a partire dalla funzione di trasferimento (2.1) ci si riferisce al corrispondente grafo di flusso di segnale, rappresentato in Fig. 2.1. Applicando la formula di Mason si verifica facilmente che i valori di α_i $(i = 0, \ldots, 3)$ coincidono con i coefficienti del denominatore della funzione di trasferimento, che le componenti di c_1 sono legate ai coefficienti del numeratore dalle

relazioni $\bar{\beta}_i = \beta_i - \beta_4 \alpha_i$ $(i = 0, \ldots, 3)$ (coincidono direttamente con i coefficienti se il sistema è puramente dinamico), mentre il coefficiente d del legame diretto ingresso-uscita coincide con β_4, il coefficiente dell'eventuale monomio in s^4 del numeratore (che è presente solo se il sistema non è puramente dinamico).

Estensione al caso di realizzazioni non minime. Si noti che se la realizzazione data (A, b, c, d) è non minima, in particolare non completamente raggiungibile, la trasformazione T risulta singolare e le prime due delle 2.5 non si possono applicare; infatti in tal caso non si può ottenere una realizzazione del regolatore internamente equivalente ad essa (Definizione (1.6.1), in quanto tale realizzazione è completamente raggiungibile per costruzione e l'equivalenza interna mantiene la raggiungibilità. Si può peraltro ottenere una realizzazione esternamente equivalente (Definizione (1.6.2), ovviamente non minima, se, anziché utilizzare tutte le (2.5), si utilizza solo la terza di esse, il che è possibile anche se R, quindi T, è singolare, e si determinano direttamente i coefficienti $\alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_0$ del polinomio caratteristico[1] di A da inserire nella matrice A_1 della forma 2.2, mentre la matrice b_1 viene assunta uguale alla prima colonna della matrice identità. Si ottiene così una realizzazione canonica del regolatore (A_1, b_1, c_1, d) esternamente equivalente ad (A, b, c, d) in virtù della Proprietà 1.6.2: infatti la A_1 e A hanno gli stessi autovalori per costruzione e la 2.3 insieme all'ultima delle 2.5 implica $c\,R = c_1\,R_1$. Questo avviene in quanto gli eventuali modi incontrollabili sono trasformati in modi inosservabili.

Tale proprietà si presenta anche quando la realizzazione viene dedotta da una funzione di trasferimento $G(s)$ non minima, cioè con i polinomi a numeratore e a denominatore aventi radici comuni. Se non si opera una semplificazione preliminare, si ottiene una realizzazione non minima in quanto non completamente osservabile, ma perfettamente congruente, nel senso che $c_1\, e^{A_1 t}\, b_1 + d\,\delta(t)$ è uguale all'antitrasformata di Laplace di $G(s)$.

La realizzazione canonica del regolatore serve anche come tramite per passare da un sistema generico (A, b, c, d) (anche non minimo) alla corrispondente funzione di trasferimento $G(s)$ (anche non minima): si assume come denominatore $q(s)$, il polinomio caratteristico di A, e come numeratore il polinomio

$$p(s) := p_1(s) + d\,q(s)\ , \tag{2.6}$$

in cui $p_1(s)$ è il polinomio avente come coefficienti gli elementi della matrice c_1, dalla potenza $(n-1)$-esima al termine noto, che si determina utilizzando la

[1] I coefficienti del polinomio caratteristico $q(s)$ di una matrice quadrata A si possono determinare dagli autovalori $\lambda_1, \ldots \lambda_n$ (il cui calcolo non presenta difficoltà con il software normalmente disponibile) sviluppando la forma fattorizzata

$$q(s) = (s - \lambda_1)\,(s - \lambda_2)\,\ldots\,(s - \lambda_n)\ .$$

terza delle (2.5). La verifica della validità della (2.6) è immediata applicando la formula di Mason al grafo di flusso di segnale di Fig. 2.1: infatti la parte del grafo non toccata dal percorso d ha $q(s)$ come determinante.

2. Realizzazione canonica dell' osservatore

La *realizzazione canonica dell' osservatore* è espressa da

$$\begin{aligned} \dot{w}(t) &= A_2\, w(t) + b_2\, u(t) \ , \\ y(t) &= c_2\, w(t) + d\, u(t) \ , \end{aligned}$$

con

$$A_2 = \begin{bmatrix} -\alpha_3 & 1 & 0 & 0 \\ -\alpha_2 & 0 & 1 & 0 \\ -\alpha_1 & 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ , \qquad b_2 = \begin{bmatrix} \bar{\beta}_3 \\ \bar{\beta}_2 \\ \bar{\beta}_1 \\ \bar{\beta}_0 \end{bmatrix} \ ,$$

$$c_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ , \qquad d = \beta_4 \ . \tag{2.7}$$

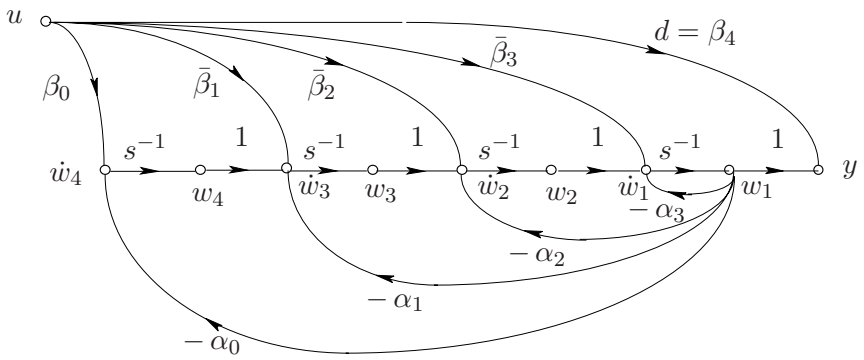


Fig. 2.2. La realizzazione canonica dell' osservatore.

In Fig. 2.2 è rappresentato il corrispondente grafo di flusso di segnale. La realizzazione si ottiene per dualità da quella del regolatore; dato infatti un qualunque sistema SISO (A, b, c, d), il sistema duale (A^T, c^T, b^T, d) corrisponde ad una realizzazione esternamente equivalente, essendo $c\, e^{At}\, b = b^T e^{A^T t}\, c^T$.

3. Realizzazione parallela riferita all' ingresso

La *realizzazione parallela riferita all' ingresso* o *realizzazione di Jordan riferita all' ingresso*, si differenzia dalle precedenti perché i termini significativi della matrice del sistema sono gli autovalori anziché i coefficienti del polinomio caratteristico.

È dato il sistema (A, b, c, d), che si suppone in forma minima. Per dedurre la corrispondente forma di Jordan riferita all' ingresso (A_3, b_3, c_3, d), si calcolano anzitutto gli autovalori di A: siano $\rho_1, \ldots, \rho_h$ gli autovalori reali, $\mu_1, \ldots, \mu_h$ le loro molteplicità, $\sigma_1 \pm j\omega_1, \ldots, \sigma_k \pm j\omega_k$ le coppie di autovalori complessi e $\nu_1, \ldots, \nu_k$ le loro molteplicità. In un sistema SISO completamente controllabile

la forma di Jordan della matrice A ha necessariamente un unico blocco di Jordan per ogni autovalore distinto. L'ipotesi di minimalità consente, pertanto, di porre A in forma di Jordan conoscendone solo gli autovalori. Si assume

$$A3 = \begin{bmatrix} R_1 & \dots & O & O & \dots & O \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & \dots & R_h & O & \dots & O \\ O & \dots & O & C_1 & \dots & O \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & \dots & O & O & \dots & C_k \end{bmatrix} , \quad b_3 = \begin{bmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_h \\ n_1 \\ \vdots \\ n_k \end{bmatrix} , \tag{2.8}$$

in cui R_i $(i=1,\dots,h)$ sono blocchi di Jordan reali del tipo (1.122) e C_i $(i=1,\dots,k)$ blocchi complessi del tipo (1.123), mentre m_i $(i=1,\dots,h)$ ed n_i $(i=1,\dots,k)$ sono vettori colonna con tutti gli elementi nulli, tranne l'ultimo, uguale ad uno. Sia R la matrice di controllabilità di A, b ed R_3 la matrice di controllabilità di A_3, b_3, non singolare per costruzione. Dall'applicazione della prima delle (1.102) risulta $T = R\,R_3^{-1}$ e, quindi,

$$c_3 = c\,T = c\,R\,R_3^{-1} , \tag{2.9}$$

relazione che completa la deduzione della realizzazione parallela riferita all'ingresso.

Estensione al caso di realizzazioni non minime. Come per la realizzazione del regolatore, il procedimento descritto può essere applicato anche se la realizzazione (A, b, c, d) è non minima: in tal caso, infatti, il vettore c_3 presenta componenti nulle in corrispondenza dei modi non controllabili e/o non osservabili.

La ragione per cui la realizzazione canonica di Jordan è detta anche "parallela" risulta evidente se si analizza il relativo grafo di flusso di segnale, costituito da più percorsi in parallelo, uno per ogni autovalore reale o per ciascuna coppia di autovalori complessi coniugati, consistenti in catene di blocchi elementari del primo o del secondo ordine: le lunghezze delle catene corrispondono all'ordine di molteplicità degli autovalori. In Fig. 2.3,a è rappresentata la catena relativa ad un autovalore reale triplo, corrispondente al sistema elementare

$$\begin{bmatrix} \dot{w}_1(t) \\ \dot{w}_2(t) \\ \dot{w}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \\ w_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) ,$$

mentre in Fig. 2.3,b è rappresentata la catena corrispondente ad una coppia di autovalori complessi doppi, descritta dal sistema elementare

$$\begin{bmatrix} \dot{w}_1(t) \\ \dot{w}_2(t) \\ \dot{w}_3(t) \\ \dot{w}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_i & \omega_i & 1 & 0 \\ -\omega_i & \sigma_i & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \sigma_i & \omega_i \\ 0 & 0 & -\omega_i & \sigma_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \\ w_3(t) \\ w_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) ;$$

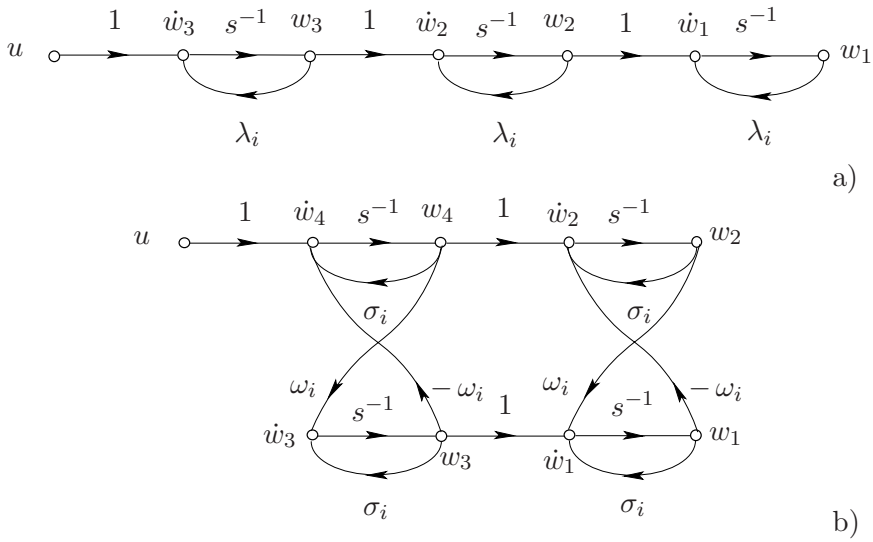


Fig. 2.3. Le catene di blocchi elementari corrispondenti ad un autovalore reale di molteplicità tre ad una coppia complessa di molteplicità due.

gli zeri dipendono dai collegamenti fra le diverse variabili di stato di ciascuna catena e l'uscita. L'intero grafo presenta una struttura del tipo di quella di Fig. 2.4, che si riferisce al caso particolare di due autovalori reali λ_1 e λ_2 rispettivamente di molteplicità 4 e 2.

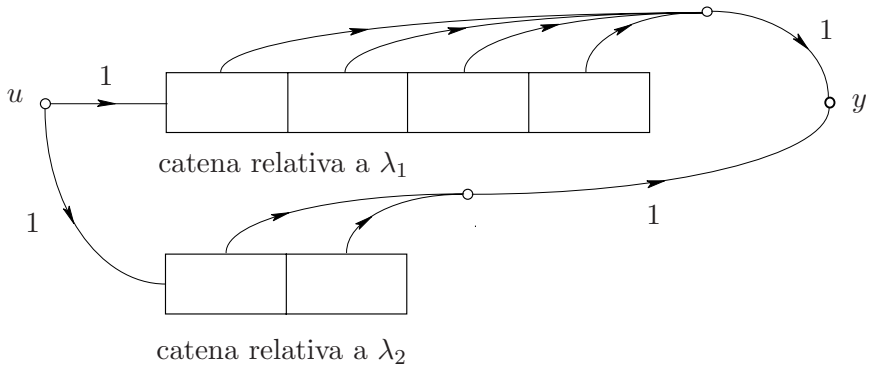


Fig. 2.4. Il grafo di flusso di segnale della realizzazione parallela riferita all'ingresso di un sistema con due autovalori reali rispettivamente di molteplicità quattro e due.

La realizzazione parallela, rispetto alle precedenti, in cui la matrice del sistema è in forma compagna, risulta numericamente più robusta in rapporto alla stabilità; i valori degli elementi significativi della forma di Jordan coincidono infatti con gli autovalori o con la loro parte reale o immaginaria, per cui una loro eventuale variazione difficilmente è tale da pregiudicare la stabilità. Invece

una piccola variazione dei coefficienti del polinomio caratteristico, in particolare di quelli corrispondenti alle potenze più elevate, può condurre a notevoli variazioni degli autovalori. Se si deve realizzare un sistema riproducendo il relativo grafo di flusso di segnale con operatori analogici (integratori e sommatori), ad esempio per costruire un regolatore avente una determinata funzione di trasferimento, conviene riferirsi alla realizzazione parallela. Se il sistema presenta un solo ingresso, ma due o più uscite, si possono multiplare i rami di uscita, conservando la stessa parte dinamica: nel caso opposto, in cui il sistema presenti una sola uscita, ma due o più ingressi, conviene multiplare i rami di ingresso nella realizzazione parallela duale, quella riferita all' uscita, qui di seguito presentata.

4. Realizzazione parallela riferita all' uscita

La *realizzazione parallela riferita all' uscita* o *realizzazione di Jordan riferita all' uscita* si può dedurre con un procedimento simile. Sia essa (A_4, b_4, c_4, d): si assume

$$A_4 = A_3 \ , \quad c_4 = [\, \bar{m}_1 \quad \dots \quad \bar{m}_h \quad \bar{n}_1 \quad \dots \quad \bar{n}_k \,] \ , \tag{2.10}$$

cioè la matrice del sistema ancora in forma di Jordan reale, mentre in c_4 $\bar{m}_i$ $(i = 1, \dots, h)$ ed $\bar{n}_i$ $(i = 1, \dots, k)$ indicano vettori riga con tutti gli elementi nulli, tranne il primo, uguale ad uno. Sia Q la matrice di osservabilità di (A, c) e Q_4 quella di (A_4, c_4), non singolare per costruzione. Dalla seconda delle (1.102) si deduce

$$b_4 = Q_4^{-1} \, Q \, b \ . \tag{2.11}$$

Le (2.10, 2.11) definiscono la forma parallela riferita all' uscita. La struttura, riportata in Fig. 2.5 con riferimento ad un caso particolare, è analoga a quella riferita all' ingresso, ma con le catene che terminano e si sommano all' uscita anziché iniziare dall' ingresso, mentre rami provenienti dall' ingresso si distribuiscono sui nodi a monte degli integratori corrispondenti alle variabili di stato.

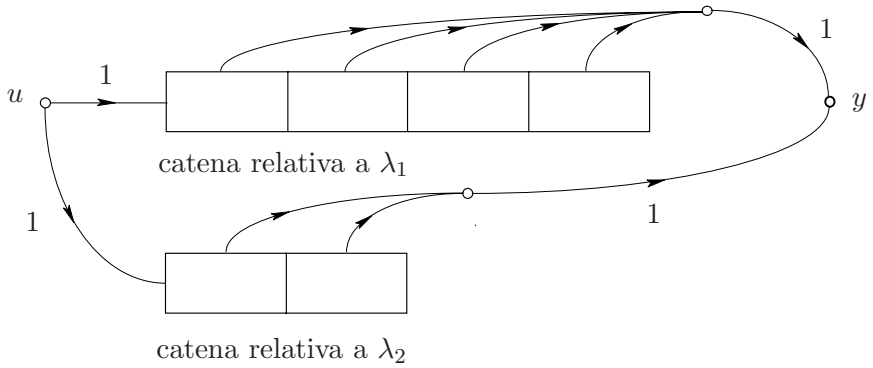


Fig. 2.5. Il grafo di flusso di segnale della realizzazione parallela riferita all'ingresso di un sistema con due autovalori reali rispettivamente di molteplicità quattro a due.

La realizzazione parallela riferita all' uscita si può ottenere anche come duale di quella riferita all' ingresso, cioè come (A_3^T, c_3^T, b_3^T, d): si può facilmente verifi-

care che l' unica differenza fra questa e la (A_4, b_4, c_4, d) precedentemente definita è un diverso ordine delle componenti dello stato, per cui si può passare dall' una all' altra con semplici permutazioni di righe e colonne.

2.2 Dallo spazio degli stati alla funzione di trasferimento

Viene presentato un metodo, alternativo all' impiego della realizzazione canonica del regolatore, per passare da una realizzazione generica alla corrispondente funzione di trasferimento (nel caso SISO) o matrice di trasferimento (nel caso MIMO).

2.2.1 Sistemi SISO

È dato il sistema SISO rappresentato in Fig. 2.6, descritto dalle equazioni

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + b\,u(t)\ , \quad x(0) = x_0\ , \tag{2.12}$$

$$y(t) = c\,x(t) + d\,u(t)\ . \tag{2.13}$$

Trasformando secondo Laplace, si ottiene

$$s\,x(s) = A\,x(s) + b\,u(s) + x_0\ , \tag{2.14}$$

$$y(s) = c\,x(s) + d\,u(s)\ . \tag{2.15}$$

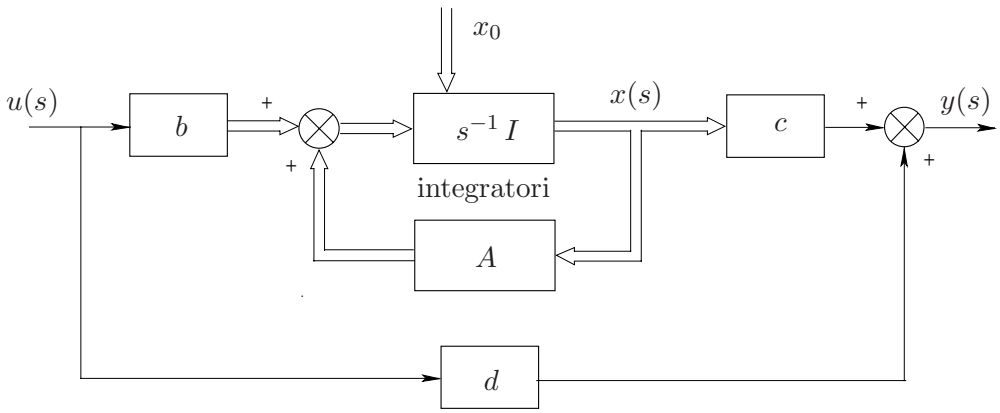


Fig. 2.6. Schema a blocchi di un sistema SISO.

La 2.14 si può scrivere anche nella forma

$$(sI - A)\,x(s) = b\,u(s) + x_0\ ,$$

da cui si ricava la trasformata dello stato in funzione di quella dell' ingresso e della condizione iniziale

$$x(s) = (sI - A)^{-1}\,b\,u(s) + (sI - A)^{-1}\,x_0\ , \tag{2.16}$$

e da questa, sostituendo nella 2.15,

$$y(s) = c\,(sI - A)^{-1}\,b\,u(s) + c\,(sI - A)^{-1}\,x_0 + d\,u(s)\ . \tag{2.17}$$

In tale relazione si riconoscono la funzione di trasferimento ingresso-uscita

$$G(s) = c\,(sI - A)^{-1}\,b + d\ , \tag{2.18}$$

e la trasformata della risposta libera

$$c\,(sI - A)^{-1}\,x_0\ . \tag{2.19}$$

In base alla nota espressione della matrice inversa

$$(sI - A)^{-1} = \frac{\mathrm{agg}(sI - A)}{\det(sI - A)}\ , \tag{2.20}$$

si conclude che gli elementi di $(sI - A)^{-1}$ sono rapporti di polinomi in s[2]. La 2.20 mostra che gli autovalori di A coincidono con i poli della funzione di trasferimento.

Gli zeri sono valori complessi z_i tali che per l'eccitazione

$$u(t) = e^{z_i t}\,u_0$$

è possibile, per un opportuno stato iniziale, la risposta identicamente nulla $y(t) = 0$, $t \geq 0$, cioè tali che esiste uno stato iniziale x_0 cui è associata un'evoluzione dello stato

$$x(t) = e^{z_i t}\,x_0$$

corrispondente ad uscita identicamente nulla. Questa definizione è congruente con quanto risulta dalla trasformazione di Laplace: un sistema $G(s)$, eccitato con il segnale d'ingresso $1/(s - z_i)$, ha una risposta che, dipendendo solo dai poli del sistema, può essere cancellata scegliendo opportunamente la condizione iniziale. Per sostituzione nelle equazioni del sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A\,x(t) + b\,u(t)\ , \\ y(t) &= c\,x(t) + d\,u(t)\ , \end{aligned}$$

si ricava

$$\begin{aligned} z_i\,e^{z_i t}\,x_0 &= A\,e^{z_i t}\,x_0 + b\,e^{z_i t}\,u_0\ , \\ 0 &= c\,e^{z_i t}\,x_0 + d\,e^{z_i t}\,u_0\ , \end{aligned}$$

cioè

$$\begin{bmatrix} z_i I - A & -b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ u_0 \end{bmatrix} = O\ ;$$

[2] Con agg$A$ si indica la *matrice aggiunta* di A che è la trasposta (o la coniugata trasposta nel campo complesso) della matrice dei complementi algebrici degli elementi di A. Il complemento algebrico di a_{ij} è $(-1)^{i+j}$ volte il determinante della matrice $(n-1) \times (n-1)$ ottenuta cancellando l'i-esima riga e la j-esima colonna di A.

poiché la costante u_0 è non nulla, tale identità è possibile se e solo se z_i soddisfa la relazione

$$\det\left(\begin{bmatrix} z_i I - A & -b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = 0 \ . \tag{2.21}$$

Si è pertanto dedotta la seguente espressione della funzione di trasferimento corrispondente ad (A, b, c, d):

$$G(s) = \frac{p(s)}{q(s)} = \frac{\det\left(\begin{bmatrix} sI - A & -b \\ c & d \end{bmatrix}\right)}{\det(sI - A)} = \frac{\det(sI - A + bc)}{\det(sI - A)} + d - 1 \ , \tag{2.22}$$

in cui l'ultimo passaggio si ricava dalla regola del determinante della matrice partizionata[3]. Si ha, infatti,

$$\det\left(\begin{bmatrix} sI - A & -b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = d \det(sI - A + b\, d^{-1} c) \ ;$$

per evitare la presenza del termine d^{-1}, in base allo sviluppo del determinante secondo i termini di una riga si può scrivere anche

$$\begin{aligned} \det\left(\begin{bmatrix} sI - A & -b \\ c & d \end{bmatrix}\right) &= \det\left(\begin{bmatrix} sI - A & -b \\ c & 1 \end{bmatrix}\right) + d \det(sI - A) - \det(sI - A) \\ &= \det(sI - A + bc) + (d - 1) \det(sI - A) \ , \end{aligned} \tag{2.23}$$

che rappresenta appunto $p(s)$, il polinomio a numeratore di $G(s)$. In base alle (2.22, 2.23), il calcolo della funzione di trasferimento del sistema (A, b, c, d) si riporta a quello dei coefficienti dei polinomi caratteristici delle matrici $A - bc$ ed A, che, come si è precedentemente notato, può essere effettuato attraverso la determinazione degli autovalori, da cui si ricavano con semplici passaggi i coefficienti dei corrispondenti polinomi, a partire dalle loro espressioni in forma fattorizzata.

Estensione al caso di realizzazioni non minime. Il procedimento si può utilizzare anche se (A, b, c, d) è una realizzazione non minima; in tal caso ovviamente la $G(s)$ ottenuta è anch'essa non minima, cioè presenta dei fattori comuni a numeratore e a denominatore.

[3] Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} B & C \\ D & E \end{bmatrix} \ ,$$

risulta

$$\begin{aligned} \det A &= \det B \det(E - D\, B^{-1} C) \ , \\ \det A &= \det E \det(B - C\, E^{-1} D) \ . \end{aligned}$$

Le precedenti considerazioni valgono anche per i sistemi a tempo discreto: occorre naturalmente applicare la trasformazione Z in luogo della trasformazione di Laplace. Il risultato è che nelle epressioni della funzione di trasferimento (2.18) e (2.22) è sufficiente sostituire il simbolo s con il simbolo z.

2.2.2 Sistemi MIMO

Nel caso MIMO, il cui schema a blocchi è riportato in Fig. 2.7, in luogo della funzione di trasferimento (2.18) si ha la seguente *matrice di trasferimento* ingresso-uscita, definita in modo analogo, cioè mediante la trasformazione di Laplace del sistema nello spazio degli stati,

$$G(s) = C\,(sI - A)^{-1}\,B + D\ . \tag{2.24}$$

In questo caso gli autovalori di A giocano ancora un ruolo analogo a quello dei poli della funzione di trasferimento nel caso SISO, in particolare in rapporto alla stabilità del sistema, mentre gli zeri dei vari elementi della matrice $G(s)$ (che sono ciscuno un rapporto di polinomi in s), non hanno un particolare significato.

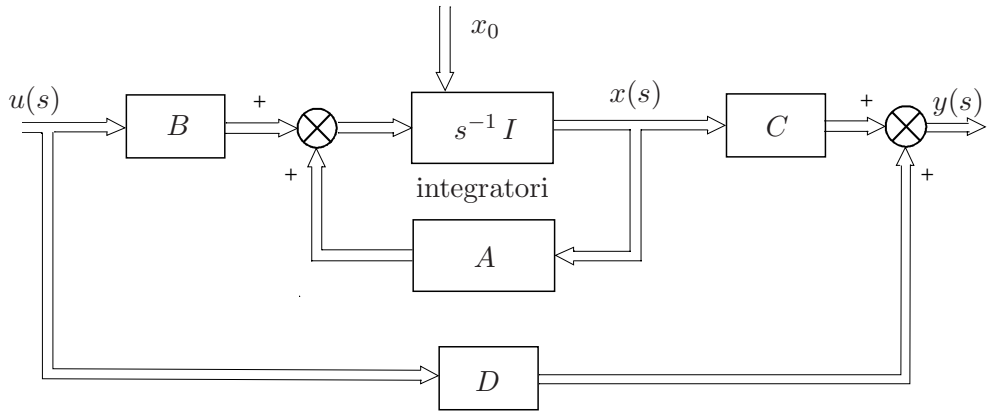


Fig. 2.7. Schema a blocchi di un sistema MIMO.

Per i sistemi MIMO si definiscono gli *zeri invarianti*, corrispondenti a modi che, iniettati opportunamente all'ingresso del sistema, corrispondono ad uscita identicamente nulla per una scelta opportuna dello stato iniziale. È facile verificare che questa proprietà vale anche per i sistemi SISO. Infatti il secondo termine a primo membro della relazione

$$\frac{1}{s - z_i}\,\frac{K\,(s - z_1)\,\ldots\,(s - z_m)}{(s - p_1)\,\ldots\,(s - p_n)} - \frac{K\,(s - z_1)\,\ldots\,(s - z_{i-1})\,(s - z_{i+1})\,\ldots\,(s - z_m)}{(s - p_1)\,\ldots\,(s - p_n)} = 0\,, \tag{2.25}$$

essendo una funzione razionale con tutti i poli uguali a quelli del sistema, può essere interpretato come la trasformata di Laplace di un moto libero. Gli zeri invarianti di un sistema MIMO sono i valori di s, in generale complessi, in corrispondenza dei quali la matrice

$$\begin{bmatrix} sI - A & -B \\ C & D \end{bmatrix} \tag{2.26}$$

perde di rango. Come nel caso SISO, gli zeri invarianti possono essere anche multipli di molteplicità generica m, rappresentabili con una matrice W, $m \times m$, simile ad un blocco di Jordan. Con riferimento allo schema a blocchi di Fig. 2.8, si può dimostrare che qualora tutti gli autovalori dell'esosistema Σ_e siano zeri invarianti, esistono una matrice L, $p \times m$ e una matrice reale X, $n \times m$, con (W, X) observable tali che, applicando al sistema Σ definito da (A, B, C, D) la funzione di ingresso

$$u(t) = L\, e^{Wt}\, v_0 \tag{2.27}$$

generata da Σ_e, in cui $v_0 \in \mathbb{R}^m$ indica un vettore colonna atbitrario, a partire dallo stato iniziale $x_0 = X\, v_0$, l'uscita $y(\cdot)$ è identicamente zero, mentre l'evoluzione dello stato è descritta da

$$x(t) = X\, e^{Wt}\, v_0 \tag{2.28}$$

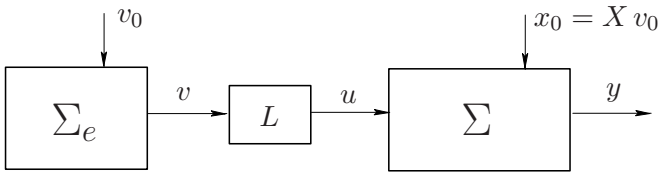


Fig. 2.8. Significato degli zeri in un sistema MIMO.

Le precedenti considerazioni valgono anche per sistemi a tempo discreto. Considerando, ad esmpio, il caso MIMO, è sufficiente sostituire z ad s nelle relazioni (2.24–2.26) e sostituire le (2.27, 2.28) con $u(k) = LW^k\, v_0$ e $x(k) = XW^k\, v_0$.

Un sistema Σ si dice *a fase minima* se tutti i suoi zeri invarianti sono stabili, cioè a parte reale negativa se se esso è a tempo continuo e con modulo minore di uno se esso è a tempo discreto.

2.2.3 La risposta armonica

Si consideri ancora lo schema di Fig. 2.8 e si supponga che il sistema Σ sia stabile. In questo caso la matrice L si suppone data. Si vuole determinare la matrice X corrispondente alla condizione di regime in cui i termini della risposta dovuti ai modi di Σ si siano estinti, per cui la risposta al segnale di ingresso (2.27) viene ad essere rappresentata dalla (2.28), o, in altri termini, la condizione iniziale a partire dalla quale tali modi non vengono eccitati, par cui la risposta da stato

iniziale zero viene in effetti a coincidere con la (2.28). La matrice X si può ottenere risolvendo una semplice *equazione di Sylvester*[4].

Per fissare le idee, supponiamo che sia

$$W = \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix} , \quad e^{Wt} = \begin{bmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t \\ -\sin\omega t & \cos\omega t \end{bmatrix} . \tag{2.29}$$

Sostituendo nell'equazione differenziale

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t)$$

alla ricerca di una soluzione del tipo $x(t) = X\,e^{Wt}v_0$, si ottiene

$$X\,W\,e^{Wt}v_0 = A\,X\,e^{Wt}v_0 + B\,L\,e^{Wt}v_0 \ ,$$

cioè, eliminando $e^{Wt}\,v_0$ (si ricorda che e^{Wt} è non singolare e v_0 generica), si ottiene l'equazione di Sylvester

$$A\,X - X\,W = -B\,L \ . \tag{2.30}$$

La risposta in uscita è data da

$$y(t) = C\,X\,e^{Wt}\,v_0 + D\,L\,e^{Wt}\,v_0 \ ,$$

e rappresenta l'uscita privata dei modi di Σ. L'equazione (2.30) ha un'unica soluzione se i modi di Σ_e sono diversi da quelli di Σ, cioè se gli autovalori di W sono diversi da quelli di A (in caso contrario si produce una *risonanza*). Si noti che la matrice W è arbitraria, non necessariamente del tipo (2.29).

La (2.30) vale anche per sistemi a tempo discreto. In questo caso infatti si ha $u(k) = L\,W_d^k\,v_0$ e, sostituendo nell'equazione alle differenze

$$x(k+1) = A_d\,x(k) + B_d\,u(k)$$

la soluzione a regime $x(k) = X\,W_d^k\,v_0$, si ottiene

$$X\,W_d^{k+1}\,v_0 = A_d\,X\,W_d^k\,v_0 + B_d\,L\,W_d^k\,v_0 \ ,$$

cioè

$$A_d\,X - X\,W_d = -B_d\,L \ , \tag{2.31}$$

posto che W_d sia non singolare. Si noti che, qualora il sistema a tempo discreto risulti dal campionamento con periodo T di un sistema atempo continuo e che ad esso venga applicato il segnale dell'esosistema (2.29) pure campionato, cioè che sia $W_d = e^{WT}$, tale condizione è soddisfatta se vale il teorema del campionamento, cioè se $\omega < \pi/T$.

---

[4] La forma generale dell'equazione di Sylvester è

$$A\,X - X\,B = C \ ,$$

in cui A è $m \times m$, B $n \times n$, X e C entrambe $m \times n$. Essa equivale ad un sistema di nm equazioni lineari in nm incognite, che ammette un'unica soluzione se e solo se A e B non hanno autovalori uguali. La corrispondente equazione omogenea, con il secondo membro uguale ad una matrice nulla, ammette soluzione non nulla solo se questa condizione non è soddisfatta.

2.3 Allocazione dei poli mediante retroazione

In un sistema SISO (A, b, c, d) si consideri la retroazione stato-ingresso mostrata in Fig. 2.9: con h si indica un vettore riga $(1 \times n)$, per il momento non definito.

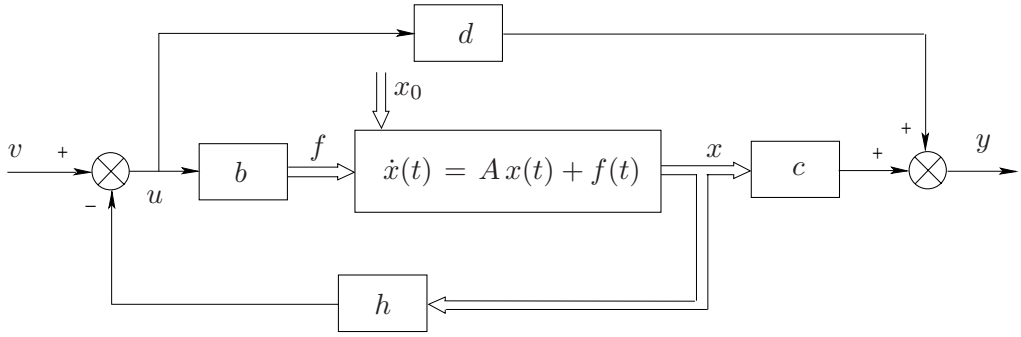


Fig. 2.9. Retroazione stato-ingresso.

Le equazioni del sistema così retroazionato sono

$$\dot{x}(t) = (A - bh)\, x(t) + b\, v(t) \ , \quad x(0) = x_0 \ , \tag{2.32}$$

$$y(t) = (c - dh)\, x(t) + d\, v(t) \ . \tag{2.33}$$

La retroazione ha, pertanto, modificato la matrice del sistema da A ad $A - bh$: sulla possibilità di variarne ad arbitrio gli autovalori, influendo così sulla stabilità, vale il seguente teorema.

Teorema 2.3.1 - Allocazione dei poli con retroazione dello stato - 1
Si consideri il sistema SISO (A, b, c, d). La retroazione stato-ingresso mostrata in Fig. 3.1 consente l'allocazione arbitraria degli autovalori della matrice del sistema $(A - bh)$ se e solo se (A, b) è controllabile.

Dim. Se. Sia T la trasformazione che pone il sistema nella forma canonica del regolatore (A_1, b_1, c_1, d), in cui le matrici hanno le strutture (2.2), e

$$s^4 + \eta_3\, s^3 + \eta_2\, s^2 + \eta_1\, s + \eta_0$$

il polinomio avente come radici gli autovalori voluti. Operando sul sistema in forma canonica la retroazione

$$h_1 := [\, \rho_3 \quad \rho_2 \quad \rho_1 \quad \rho_0 \,] \ , \quad \text{con} \quad \rho_i = \eta_i - \alpha_i \quad (i = 0, \ldots, 3) \ ,$$

risulta

$$A_1 - b_1 h_1 = \begin{bmatrix} -\eta_3 & -\eta_2 & -\eta_1 & -\eta_0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \ ,$$

matrice che ha gli autovalori voluti. La retroazione stato ingresso riferita alla coppia (A, b) (cioè ad x anziché a w) si determina poi con la relazione

$$h = h_1 T^{-1} \ . \tag{2.34}$$

Solo se. Sia $\mathcal{R}$ il sottospazio raggiungibile, di dimensione $r < n$: si opera la trasformazione $T = [T_1 \ T_2]$, con $\mathrm{im} T_1 = \mathcal{R}$. Dato che $\mathcal{R}$ è un invariante in A contenente $\mathrm{im} b$, in virtù del Teorema C1.1.1 nella nuova base le matrici presentano le strutture

$$A' := T^{-1} A T = \begin{bmatrix} A'_{11} & A'_{12} \\ O & A'_{22} \end{bmatrix} \ , \quad b' := T^{-1} b = \begin{bmatrix} b'_1 \\ O \end{bmatrix} \ ,$$

e, indicando con $h' = [h'_1 \ h'_2]$ la matrice di retroazione stato-ingresso nella nuova base, si ha

$$T^{-1}(A - bh)\, T = A' - b'h' = \begin{bmatrix} A'_{11} - b'_1 h'_1 & A'_{12} - b'_1 h'_2 \\ O & A'_{22} \end{bmatrix} \ ;$$

è evidente che, essendo (A'_{11}, b'_1) controllabile, la retroazione consente di assegnare ad arbitrio gli r autovalori interni ad $\mathcal{R}$, mentre non può in alcun modo influire sugli $n - r$ restanti autovalori. □

Utilizzando il concetto di sottospazio invariante, il Teorema 2.3.1 viene esteso al caso dei sistemi a più ingressi.

Teorema 2.3.2 - Allocazione dei poli con retroazione dello stato - 2
Si consideri il sistema MIMO (A, B, C, D). La retroazione stato-ingresso consente l'allocazione arbitraria degli autovalori della matrice del sistema $(A - BH)$ se e solo se (A, B) è controllabile.

Dim. La dimostrazione è riportata al Paragrafo C2.2. □

Riveste un notevole interesse per le applicazioni anche il duale del Teorema 2.3.1, relativo alla retroazione uscita-azione forzante mostrata in Fig. 2.10. Anch'esso verrà presentato dapprima con riferimento ai sistemi SISO. Il sistema retroazionato di Fig. 2.10 è descritto dalle equazioni

$$\dot{x}(t) = (A - kc)\, x(t) + b\, u(t) \ , \quad x(0) = x_0 \ , \tag{2.35}$$

$$y(t) = c\, x(t) + d\, u(t) \ , \tag{2.36}$$

in cui con k si indica un vettore colonna $(n \times 1)$; si noti il collegamento atto ad operare la neutralizzazione, sulla retroazione, dell'eventuale legame algebrico diretto fra ingresso e uscita.

Corollario 2.3.1 - Allocazione dei poli con retroazione uscita-azione forzante
Si consideri il sistema SISO (A, b, c, d). La retroazione uscita-azione forzante mostrata in Fig. 2.10 consente l'allocazione arbitraria degli autovalori della matrice del sistema $(A - kc)$ se e solo se (A, c) è osservabile.

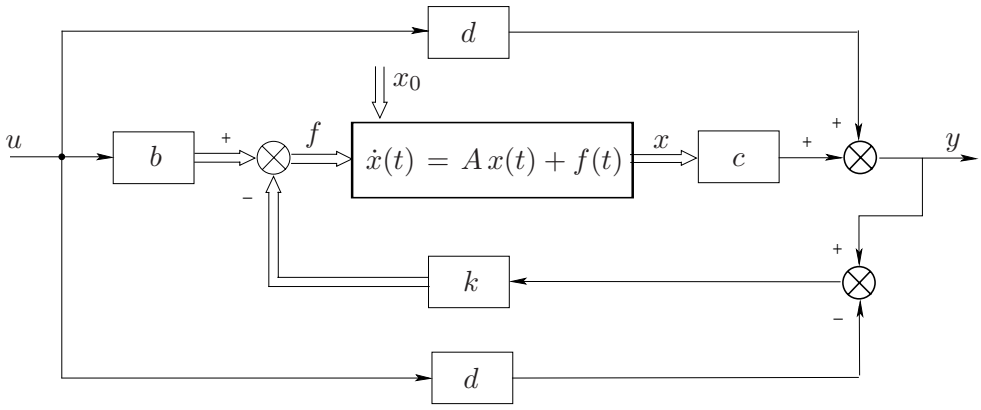


Fig. 2.10. Retroazione uscita-azione forzante.

Dim. Ci si riferisce al sistema duale (A^T, c^T, b^T, d), completamente controllabile se e solo se il sistema dato è completamente osservabile. In virtù del Teorema 2.3.1 scegliendo opportunamente gli elementi della matrice k^T si possono allocare ad arbitrio gli autovalori di $A^T - c^T k^T$, che coincidono con quelli della trasposta $A - kc$. □

Un' importante applicazione del Corollario 2.3.1 è la sintesi degli osservatori asintotici. Un *osservatore asintotico* è un dispositivo che, collegato all' ingresso e all' uscita di un sistema, ne fornisce una stima dello stato, che viene indicata con $\tilde{x}$, convergente asintoticamente allo stato vero. Si mostrerà che, se il sistema è completamente osservabile, si può assegnare ad arbitrio la dinamica di convergenza a zero dell' errore di stima.

Un osservatore di ordine n, uguale a quello del sistema osservato, si dice *di ordine pieno*. Lo schema di un osservatore di ordine pieno per un sistema SISO è riportato in Fig. 2.11: le equazioni del sistema complessivo sono

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + b\,u(t)\ , \quad x(0) = x_0\ , \tag{2.37}$$

$$\dot{w}(t) = (A - kc)\,w(t) + k\,c\,x(t) + b\,u(t)\ , \quad w(0) = w_0\ . \tag{2.38}$$

Lo stato w dell' osservatore costituisce direttamente la stima $\tilde{x}$ dello stato del sistema. Posto $e := w - x$ (*errore di stima*), si deduce

$$\dot{e}(t) = (A - kc)\,e(t)\ , \quad e(0) = w_0 - x_0\ , \tag{2.39}$$

da cui risulta che $e(t)$ tende asintoticamente a zero se e solo se gli autovalori di $A - kc$ sono a parte reale negativa. Essi sono assegnabili ad arbitrio in virtù del Corollario 2.3.1 se (A, c) è osservabile. In Fig. 2.12 è riportato il grafo di flusso di segnale di un osservatore di ordine pieno, collegato ad un sistema SISO rappresentato nella forma canonica dell' osservatore; nel grafo si è posto $\rho_i := \eta_i - \alpha_i$ $(i = 0, \ldots, 3)$.

Estensione ai sistemi MIMO. L' estensione ai sistemi MIMO sia del Corollario 2.3.1 sia dello schema dell' osservatore asintotico non presenta difficoltà,

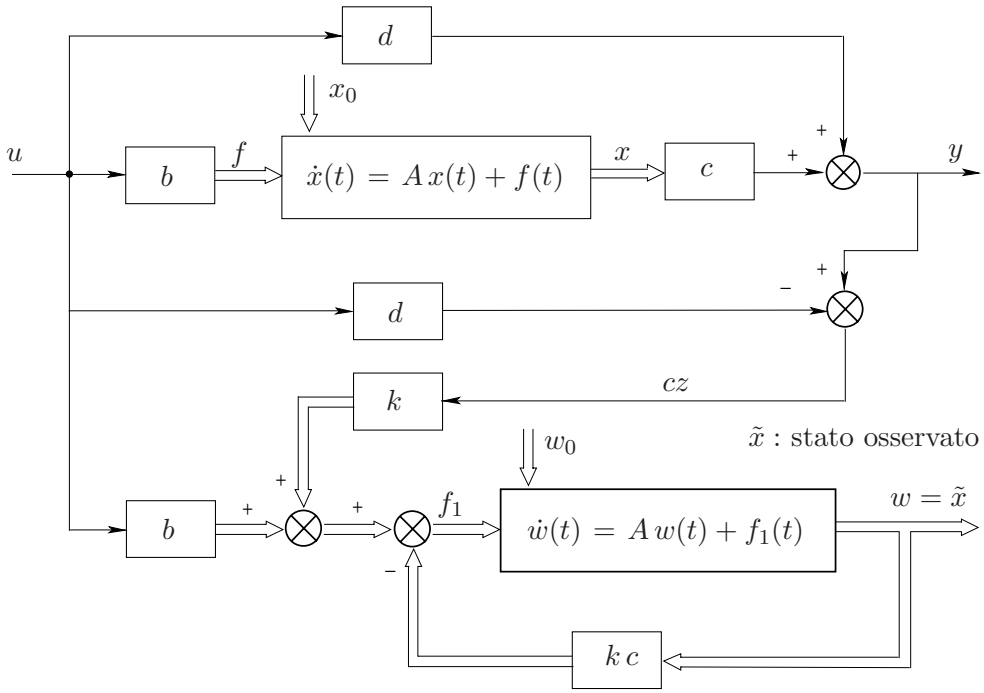


Fig. 2.11. Osservatore di ordine pieno per un sistema SISO.

essendosi già dimostrato che gli autovalori di $A - BH$ sono arbitrariamente assegnabili scegliendo opportunamente H se e solo se (A, B) è controllabile, e quindi, per dualità, quelli di $A - KC$ sono arbitrariamente assegnabili scegliendo opportunamente K se e solo se (A, C) è osservabile.

Si presenta ora un teorema fondamentale per il progetto delle unità stabilizzanti dei sistemi in retroazione.

Teorema 2.3.3 - Proprietà di separazione
Gli autovalori del sistema che si ottiene utilizzando la stima dello stato fornita da un osservatore asintotico per realizzare una retroazione stato-ingresso sono l'unione con ripetizione di quelli che si avrebbero eseguendo direttamente la retroazione stato-ingresso e di quelli dell'osservatore.

Dim. Ci si riferisce, per maggior generalità, ad un sistema MIMO. Con riferimento allo schema di Fig. 2.13, si ha

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) - BH\,w(t) + B\,v(t)\ , \quad x(0) = x_0\ , \tag{2.40}$$

$$\dot{w}(t) = (A - BH - KC)\,w(t) + K\,(y(t) - D\,u(t)) + B\,v(t)\ , \quad w(0) = w_0\ , \tag{2.41}$$

$$y(t) = C\,x(t) - DH\,w(t) + D\,v(t)\ . \tag{2.42}$$

Posto $e := w - x$, utilizzando la trasformazione

$$\begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}\ , \quad \text{con} \quad T := \begin{bmatrix} I_n & O \\ I_n & I_n \end{bmatrix}\ , \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} I_n & O \\ -I_n & I_n \end{bmatrix}\ , \tag{2.43}$$

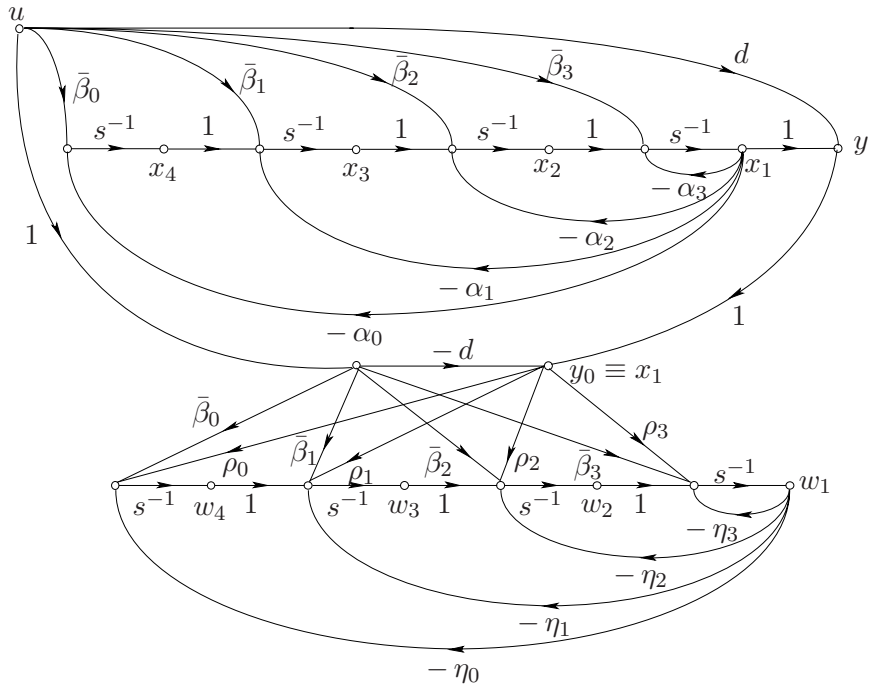


Fig. 2.12. Grafo di flusso di segnale dell'osservatore di ordine pieno per un sistema SISO.

si deduce l'equazione matriciale

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{e}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A-BH & -BH \\ O & A-KC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ O \end{bmatrix} v(t) \ , \tag{2.44}$$

da cui risulta chiaramente che gli autovalori del sistema complessivo sono l'unione con ripetizione di quelli di $A-BH$ e di quelli di $A-KC$. $\square$

Nella procedura di sintesi dei regolatori in retroazione che verrà presentata al prossimo paragrafo viene richiesta anche l'allocazione degli zeri. Questa si può facilmente riportare all'allocazione dei poli.

Problema 2.3.1 - Allocazione degli zeri nei sistemi SISO - 1
Data la coppia (A, b) controllabile, con A $n \times n$, determinare c e d in modo che (A, b, c, d) abbia $m \leq n$ zeri arbitrariamente assegnati.

Sol. Si ricorda che gli zeri di (A, b, c, d) sono le radici dell'equazione polinomiale

$$\det(sI - A + bc) + (d-1)\det(sI - A) = 0 \ . \tag{2.45}$$

Se è $m = n$, si pone $d := 1$ e si determina c in modo che $A - bc$ abbia come autovalori gli zeri voluti.

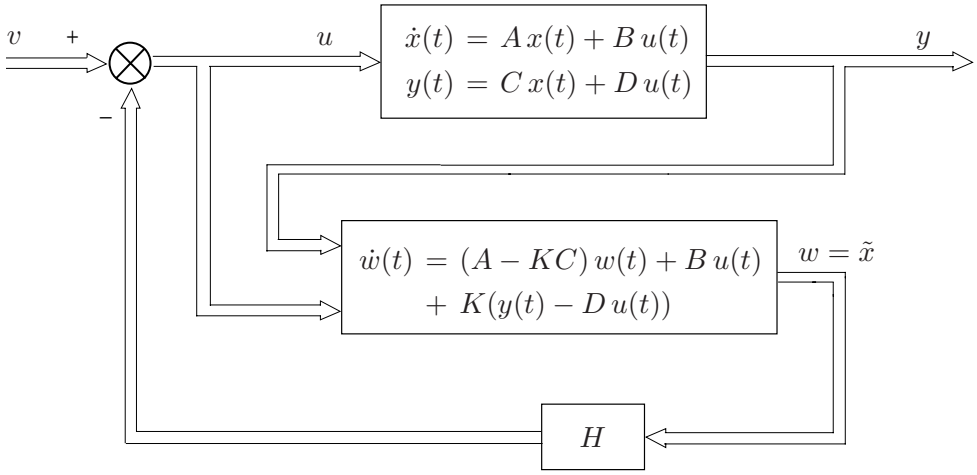


Fig. 2.13. Retroazione stato-ingresso ottenuta attraverso un osservatore asintotico.

Se è $m < n$, si pone anzitutto $d = 0$, essendo il sistema puramente dinamico. Sia

$$s^m + \eta_{m-1}\, s^{m-1} + \ldots + \eta_0$$

il polinomio avente come radici gli zeri voluti e

$$s^n + \alpha_{n-1}\, s^{n-1} + \ldots + \alpha_0$$

il polinomio caratteristico di A, vale a dire $\det(sI - A)$. Per la (2.45) deve essere

$$\det(sI - A + bc) = s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \ldots + (\alpha_m + 1) s^m + (\alpha_{m-1} + \eta_{m-1}) s^{m-1} + \ldots + (\alpha_0 + \eta_0)\ :$$

si calcolano le radici del polinomio a secondo membro e si determina c in modo che $A - bc$ le abbia come autovalori. □

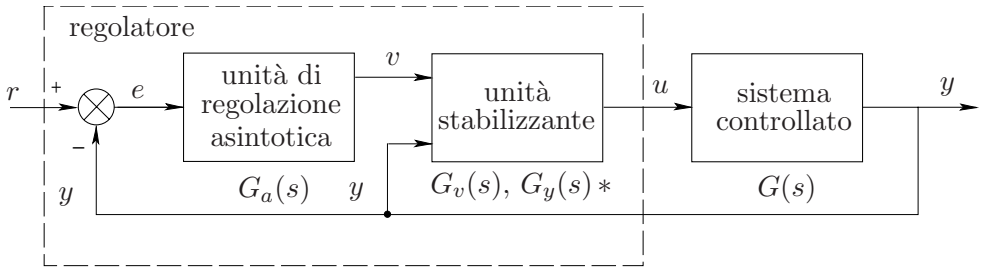
Problema 2.3.2 - Allocazione degli zeri nei sistemi SISO - 2
Data la coppia (A, c) osservabile, determinare b e d in modo che (A, b, c, d) abbia $m \leq n$ zeri arbitrariamente assegnati.

Sol. Il problema si riconduce al precedente, dato che il sistema duale (A^T, c^T, b^T, d) presenta gli stessi zeri del sistema dato, come risulta dal fatto che le corrispondenti realizzazioni sono equivalenti e come si può verificare per altra via sostituendo nella (2.45) e notando che il polinomio caratteristico di una matrice coincide con quello della trasposta. □

Imposizione del guadagno statico. Si noti che, moltiplicando per una stessa costante il vettore c e lo scalare d (oppure b e d nel caso duale), si può variare a piacimento il guadagno statico (o la costante di guadagno se si hanno dei poli nell'origine) della funzione di trasferimento corrispondente ad (A, b, c, d).

2.4 La sintesi diretta nello spazio degli stati

Si illustra il progetto di un regolatore secondo lo schema di Fig. 2.14. Il regolatore è composto di due unità: l' *unità di regolazione asintotica*, che ha la funzione di imporre il comportamento a regime, inserendo eventualmente nell' anello un polo nell' origine, semplice o multiplo, e l' *unità stabilizzante*, che ha la funzione di allocare tutti gli altri poli, in modo da ottenere, per il sistema complessivo, un buon comportamento dinamico.



$*\, G_v(s)$ e $G_y(s)$ hanno lo stesso denominatore

Fig. 2.14. Struttura del regolatore composto di due unità separate.

Si indica con $G(s) = P(s)/Q(s)$ la funzione di trasferimento del sistema controllato, con $G_0(s) = P_0(s)/Q_0(s)$ la funzione di trasferimento che si vuole ottenere per il sistema complessivo, con m, n e m_0, n_0 i gradi dei relativi polinomi a numeratore e a denominatore; si suppone, per il momento, che gli zeri di $G(s)$ siano tutti a parte reale negativa. Sia γ l' ordine del polo nell' origine che si richiede per la regolazione asintotica, in base al principio del modello interno. Si ricorda che ciò implica che $G_0(s)$ presenti almeno $\gamma - 1$ zeri, in quanto gli ultimi γ termini di $P_0(s)$ – quelli corrispondenti alle potenze minori e il termine noto – devono essere uguali ai corrispondenti termini di Q_0(s).

L' unità stabilizzante viene realizzata con un osservatore di ordine pieno, che fornisce la stima dello stato per ottenere l' allocazione dei poli: si indicano con $G_v(s)$ e $G_y(s)$ le funzioni di trasferimento fra i due ingressi e l' uscita dell' unità stabilizzante, che si suppongono aventi lo stesso denominatore, in quanto corrispondenti ad un unico sistema dinamico con due diverse matrici di distribuzione degli ingressi. La funzione di trasferimento del complesso costituito dall' unità stabilizzante e dal sistema controllato è data da

$$G_1(s) = \frac{P_1(s)}{Q_1(s)} = \frac{G_v(s)\, G(s)}{1 + G_y(s)\, G(s)} \ .$$

Essa ha $2n$ poli arbitrari, m zeri coincidenti con quelli del sistema controllato ed m_1 zeri assegnabili, con m_1 arbitrario entro l' intervallo $0 \le m_1 \le n$. Dalla relazione

$$G_0(s) = \frac{G_a(s)\, G_1(s)}{1 + G_a(s)\, G_1(s)} \tag{2.46}$$

si deduce

$$G_a(s) = \frac{P_0(s)}{Q_0(s) - P_0(s)} \, \frac{Q_1(s)}{P_1(s)} \ . \tag{2.47}$$

Per il modello di riferimento valgono le relazioni di vincolo

$$m_0 \geq \gamma - 1 \ , \tag{2.48}$$

$$n_0 \geq m_0 + n - m \ , \tag{2.49}$$

la prima delle quali deriva dalla condizione di regolazione asintotica sopra menzionata e la seconda dalla condizione di realizzabilità fisica del regolatore. Da esse si ricava

$$n_0 \geq n - m + \gamma - 1 \ . \tag{2.50}$$

Nella (2.47) si cerca di ottenere il massimo numero possibile di cancellazioni polo-zero. Si noti che, a tal fine, si possono scegliere ad arbitrio le $2n$ radici di $Q_1(s)$ ed m_1 delle $m+m_1$ radici di $P_1(s)$, cioè gli zeri relativi all'ingresso v dell'unità stabilizzante, con la possibilità di porre, al massimo, $m_1 = n$. In genere, eseguendo opportunamente le cancellazioni, si possono eliminare le $n_0 - \gamma$ radici di $(Q_0(s) - P_0(s))/s^\gamma$ e le m radici non assegnabili di $P_1(s)$; inoltre, il guadagno statico di $P_1(s)/Q_1(s)$ può essere assegnato uguale all'inverso del termine noto di $(Q_0(s) - P_0(s))/s^\gamma$. Si ottiene così una funzione di trasferimento del tipo

$$G_a(s) = \frac{P_a(s)}{s^\gamma} \ ,$$

manifestamente di ordine minimo. Si è scelto di mantenere $P_a(s)$ di ordine γ, cioè di realizzare nell'unità di regolazione asintotica il massimo numero possibile di zeri. L'ordine complessivo del regolatore è pertanto $n+\gamma$. Esso può essere diminuito di un'unità (o più, qualora dal sistema controllato si possano prelevare altri segnali per la stabilizzazione, in aggiunta alla variabile controllata) ricorrendo ad un osservatore di ordine ridotto (vedi Paragrafo C2.3). Va da sè che, qualora le circostanze lo suggeriscano, si può assumere un modello di riferimento di ordine superiore a quello specificato dalla (2.46), il cui polinomio a numeratore può essere di grado altrettanto superiore a $\gamma - 1$: ciò porta ad un'unità di regolazione asintotica di ordine maggiore di γ, ma pur sempre con un polo di ordine γ nell'origine.

Si delinea brevemente la procedura di sintesi per l'unità stabilizzante di ordine pieno, basata su un osservatore di ordine pari a quello del sistema controllato, che fornisce la stima dello stato per la retroazione stabilizzante. Il significato dei simboli è indicato in Fig. 2.15. Si suppone che il sistema controllato sia puramentedinamico ($d=0$); nel caso esso non lo fosse, basterebbe sottrarre $d\,u(t)$ a monte dell'unità stabilizzante, cioè sostituire $y(t) - d\,u(t)$ ad $y(t)$ nelle equazioni dell'unità stabilizzante.

Per i parametri dell'unità stabilizzante si assume:

$$\begin{aligned} g_1 &:= 0 && \text{(scalare)} \\ p &:= -h && \text{(matrice } 1 \times n\text{)} \\ q &:= k && \text{(matrice } n \times 1\text{)} \\ W &:= A - bh - kc && \text{(matrice } n \times n\text{)} \end{aligned}$$

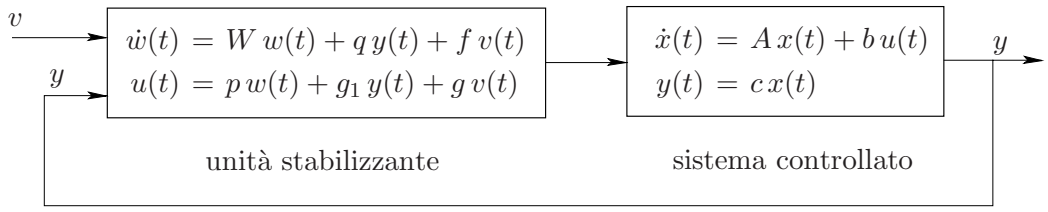


Fig. 2.15. L'unità stabilizzante di ordine pieno.

La scelta dei parametri arbitrari si opera con i seguenti criteri:

1. h in modo che $A - bh$ abbia dati autovalori (n parametri);
2. k in modo che $A - kc$ abbia dati autovalori (n parametri);
3. f e g in modo che l'unità stabilizzante abbia dati zeri (rispetto all'ingresso v) e il complesso un dato guadagno statico ($n+1$ parametri).

I poli del sistema complessivo di Fig. 2.15 sono l'unione con ripetizione di quelli assegnati ai punti 1 e 2, mentre gli zeri sono l'unione con ripetizione di quelli del sistema controllato e di quelli assegnati al punto 3.

Caso in cui G(s) presenta zeri a parte reale positiva. Nella procedura di sintesi diretta precedentemente illustrata si è supposto che il sistema controllato abbia tutti gli zeri a parte reale negativa. Questa ipotesi è necessaria perché il progetto analitico basato sulla (2.47) porterebbe in ogni caso a cancellare gli eventuali zeri a parte reale positiva con poli del regolatore, il che, come è noto, non è attuabile perché il sistema in retroazione presenterebbe un polo prossimo alla coppia polo-zero e risulterebbe pertanto instabile. Per eseguire correttamente il progetto analitico occorre ripetere gli zeri a parte reale positiva nel modello di riferimento, cioè imporre che essi siano radici di $P_0(s)$; si rende così possibile la cancellazione entro la (2.47) stessa, senza che vengano introdotti poli instabili in alcuna delle due unità del regolatore. La (2.50) resta ancora valida, purché si convenga di indicare con m il numero degli zeri di $G(s)$ a parte reale negativa.

2.5 Allocazione di n zeri dell'unità stabilizzante e di n poli ad anello chiuso

Nella trattazione del progetto dei regolatori nello spazio degli stati non si è finora tenuto conto di un requisito fondamentale: la *robustezza* rispetto alle variazioni di parametri dell'impianto. L'allocazione arbitraria dei poli del sistema ad anello chiuso, che caratterizza il procedimento di sintesi dell'unità stabilizzante descritto al precedente paragrafo, può condurre a soluzioni inaccettabili per la loro scarsa robustezza: in presenza di variazioni parametriche nell'impianto, tali poli possono subire infatti variazioni di rilievo, tanto da pregiudicare il comportamento in regime transitorio e la stessa stabilità.

Si mostrerà ora che l' unità stabilizzante di Fig. 2.15 può allocare, anziché tutti i $2n$ poli ad anello chiuso, solo n poli ad anello chiuso e n zeri della stessa unità rispetto all' ingresso y. La scelta di allocare n zeri ed n poli è conveniente nelle seguenti circostanze:

1. Quando il sistema controllato presenti un polo nell' origine, che si vuole mantenere nell' anello di regolazione principale: tipico è il caso del motore di un servomeccanismo di posizione, che presenta un polo nell' origine per l' integrazione da velocità a posizione. Il polo nell' origine si mantiene se viene allocato come polo dell' anello stabilizzante, ma tale allocazione in genere è non robusta, cioè soggetta a venir meno per variazioni parametriche anche di modesta entità; si può invece imporre uno zero nell' origine nella funzione di trasferimento $G_y(s)$ dell' unità stabilizzante, il che se si esclude che $G_v(s)$ presenti anch' essa uno zero nell' origine).

2. Quando si affrontano problemi di controllo robusto: si suppone, infatti, che il regolatore, al contrario del sistema controllato, non subisca variazioni parametriche, ipotesi del tutto plausibile, specie se esso viene realizzato per via digitale: è quindi logico prospettare una soluzione in cui esso presenti un certo numero di zeri "robusti", ad esempio tanti quanti sono i poli del sistema controllato, aventi la funzione di attrarli stabilizzandone la posizione al variare dei parametri. Al fine di garantire la realizzabilità fisica del regolatore, questo deve avere altrettanti poli, che normalmente vengono collocati sull' asse reale a sufficiente distanza degli zeri; tali poli (del regolatore ad anello aperto) si possono dedurre come conseguenza dell' imposizione di n poli ad anello chiuso.

I parametri dell' unità stabilizzante vengono scelti in base alle seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} g_1 &:= 1 && \text{(scalare)} \\ p &:= -h && \text{(matrice } 1 \times n\text{)} \\ q &:= k + b && \text{(matrice } n \times 1\text{)} \\ W &:= A - bh - kc && \text{(matrice } n \times n\text{)} \end{aligned}$$

Con tale scelta le equazioni del sistema complessivo si possono scrivere nella forma compatta

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{w}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + bc & -bh \\ (k+b)c & A - bh - kc \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} bg \\ f \end{bmatrix} v(t) \ , \tag{2.51}$$

da cui, posto $e := w - x$, quindi $w = x + e$, si deduce la relazione

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{e}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + bc - bh & -bh \\ O & A - kc \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} bg \\ f - bg \end{bmatrix} v(t) \ , \tag{2.52}$$

dalla quale risulta che gli autovalori del sistema complessivo in retroazione sono l' unione con ripetizione di quelli di $A + bc - bh$ e di $A - kc$.

Scegliendo opportunamente k si allocano ad arbitrio gli autovalori della seconda matrice, mentre scegliendo h si allocano gli zeri dell'unità stabilizzante: la scelta $g_1 = 1$ implica che essi siano gli autovalori della matrice

$$(A - bh - kc) - (b + k)(-h) = A - kc - k(-h) \ , \tag{2.53}$$

che si possono assegnare ad arbitrio al variare di h, purché la coppia $(A - kc, k)$ sia controllabile: in pratica questa condizione non è vincolante per la genericità della scelta di k precedentemente operata. Per riassumere, la scelta dei parametri arbitrari si opera con i seguenti criteri:

1. k in modo che $A - kc$ abbia dati autovalori, che sono poli del sistema in retroazione (n parametri); i valori da imporre devono essere scelti in modo che $(A - kc, k)$ risulti controllabile;
2. h in modo che $A - kc - k(-h)$ abbia dati autovalori, che sono zeri dell'unità stabilizzante rispetto all'ingresso y (n parametri);
3. f e g in modo che l'unità stabilizzante abbia dati zeri (rispetto all'ingresso v) e il complesso un dato guadagno statico ($n + 1$ parametri).

Per realizzare un'unità stabilizzante con buone caratteristiche di robustezza ripetto a variazioni parametriche del sistema controllato si può impiegare la seguente procedura: si scelgono gli zeri in posizioni tali da attrarre i poli del sistema controllato nonostante le loro possibili variazioni e si allocano gli n poli disponibili del sistema in retroazione sull'asse reale, a sinistra della zona interessata dai suddetti poli e zeri e sufficientemente lontani per non essere attratti essi stessi dagli zeri. Si aumenta poi il guadagno statico di anello, che si può pensare come una costante moltiplicativa fra l'unità stabilizzante e il sistema controllato, in modo da ottenere il miglior compromesso fra la robustezza (vicinanza delle radici che si originano dai poli del sistema controllato agli zeri imposti) e la stabilità (coefficienti di smorzamento sufficientemente elevati per le radici che si originano dai poli imposti). L'esame del luogo delle radici risulta di notevole utilità per indirizzare le scelte arbitrarie.

2.6 Esercizi

In questo paragrafo si illustrano, attraverso la presentazione di alcuni esercizi svolti, i procedimenti di sintesi dei regolatori nello spazio degli stati descritti ai Paragrafi 2.4 e 2.5.

Esercizio 2.6.1 *Sistema controllato di tipo 0 con regolatore di tipo 1*

Dato il sistema con funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{10}{(s+1)\,(s+2)\,(s+5)} \ , \tag{2.54}$$

si vuole progettare un regolatore in retroazione unitaria che soddisfi le seguenti specifiche:

1. massima sovraelongazione della risposta al gradino unitario: $S \leq 10\%$;
2. errore a regime nella risposta alla rampa unitaria: $e_v \leq 0,2$.

Sol. Si sceglie dapprima il modello di riferimento: la condizione di realizzabilità fisica implica $n_0 - m_0 \geq 3$, mentre la specifica 2 richiede semplicemente che i termini noti dei polinomi a numeratore e a denominatore siano uguali, per cui si può assumere $m_0 = 0$, $n_0 = 3$. Ci si orienta verso un filtro di Butterworth del terzo ordine, che soddisfa la specifica 1 (dall'esame della risposta al gradino di tale tipo di filtro si deduce $S = 8,15\%$), con $\omega_n = 10$ sec^{-1}, valore imposto dalla specifica 2. Si ha

$$G_0(s) = \frac{1000}{s^3 + 20\,s^2 + 200\,s + 1000} = \frac{1000}{(s+10)\;((s+5)^2 + 8,660^2)} \;. \tag{2.55}$$

In Fig. 2.16 è riportata la risposta al gradino unitario corrispondente a tale

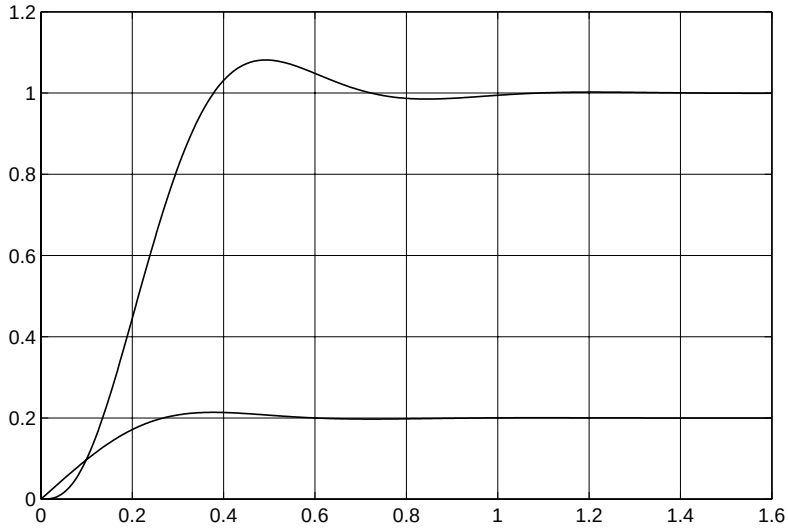


Fig. 2.16. Risposta al gradino unitario ed errore nella risposta alla rampa unitaria relativi alla (2.55).

funzione, insieme all'errore nella risposta alla rampa unitaria, ottenuto come antitrasformata di Laplace (risposta all'impulso) di $(1 - G_0(s))/s^2$. Con riferimento allo schema di Fig. 2.17, si progetta quindi l'anello stabilizzante, avente la funzione di trasferimento

$$G_1(s) = \frac{G_v(s)\,G(s)}{1 + G_y(s)\,G(s)} \;, \tag{2.56}$$

allocandone $2n - 1 = 5$ poli mediante retroazione stato-ingresso realizzata attraverso un osservatore di ordine ridotto: due poli vengono scelti uguali a quelli non nulli di

$$\frac{G_0(s)}{1 - G_0(s)} = \frac{P_0(s)}{Q_0(s) - P_0(s)} = \frac{1000}{s\;((s+10)^2 + 10^2)} \;, \tag{2.57}$$

in modo da poterli cancellare nella relazione (2.47), gli altri tre, arbitrari, vengono scelti uguali a quelli del filtro di Bessel del terzo ordine con $\omega_n = 5$ rad/sec, il cui denominatore è

$$(s + 4,708)\;\left((s + 3,728)^2 + 3,537^2\right) \;; \tag{2.58}$$

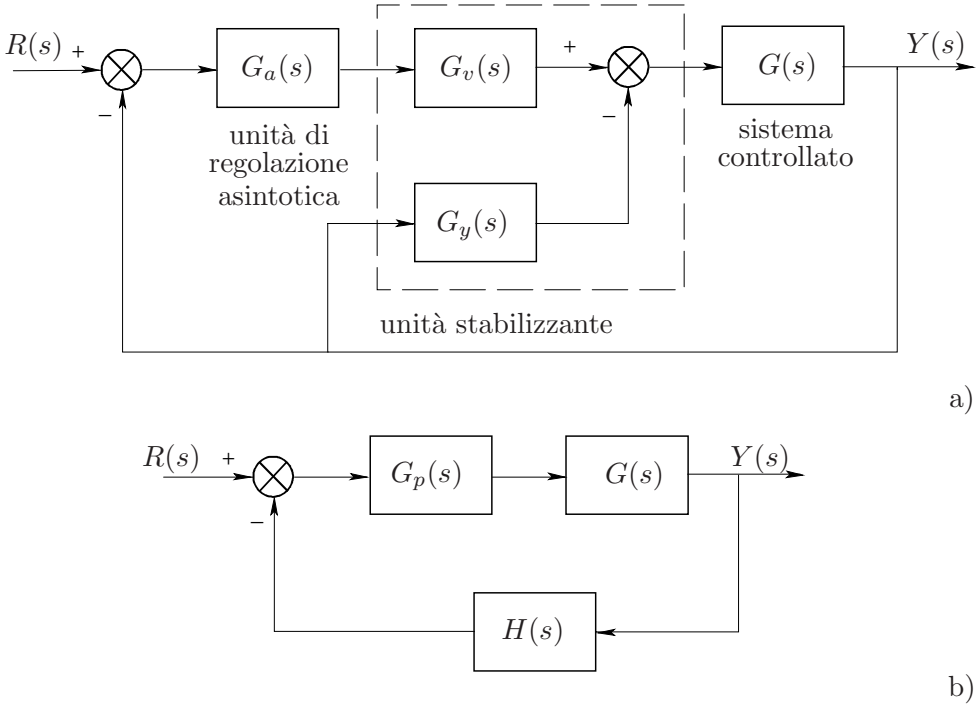


Fig. 2.17. Schema a blocchi del regolatore progettato nello spazio degli stati e schema equivalente.

il procedimento di sintesi descritto al Paragrafo 2.4, con osservatore di ordine ridotto, fornisce per il compensatore stabilizzante la funzione di trasferimento

$$G_y(s) = \frac{101,3\,(s+3,961)\,(s+5,495)}{(s+12,08)^2+8,66^2}\ . \tag{2.59}$$

Per $G_v(s)$ si sceglie la funzione avente gli stessi poli della precedente (in modo da realizzare l' unità stabilizzante con una sola dinamica e due diverse matrici di distribuzione degli ingressi) e gli zeri uguali alle radici complesse del polinomio (2.58), cioè

$$G_v(s) = \frac{(s+3,728)^2+3,537^2}{(s+12,08)^2+8,66^2}\ ; \tag{2.60}$$

sostituendo nella (2.56) si ottiene

$$G_1(s) = \frac{P_1(s)}{Q_1(s)} = \frac{G_v(s)\,G(s)}{1+G_y(s)\,G(s)} = \frac{10}{(s+4,708)\ ((s+10)^2+10^2)}\ . \tag{2.61}$$

Mediante la (2.47), tenendo conto delle (2.57) e (2.61), si determina infine la funzione di trasferimento dell' unità di regolazione asintotica:

$$G_a(s) = \frac{100\,(s+4,708)}{s}\ . \tag{2.62}$$

Lo schema a blocchi di Fig. 2.17,a non è quello standard, cui ci si riferisce usualmente per lo studio dei sistemi in retroazione; infatti il segnale di retroazione entra

in due diversi punti del regolatore, a monte e a valle dell' unità di regolazione asintotica. Ci si può peraltro ricondurre allo schema di Fig. 2.17,b, spostando la seconda giunzione sommante a monte dei blocchi $G_a(s)$ e $G_v(s)$; risulta

$$G_p(s) = G_a(s)\, G_v(s) \ , \qquad H(s) = 1 + \frac{G_y(s)}{G_a(s)\, G_v(s)} \ . \tag{2.63}$$

Una soluzione alternativa: allocazione di n zeri ed n poli. Anziché allocare tutti i poli dell' anello stabilizzante, si possono allocare n poli ed n zeri; se come zeri si scelgono le radici del polinomio (2.58), e come poli le radici di

$$(s+20)\ \left((s+10)^2 + 10^2\right) \ , \tag{2.64}$$

in cui il secondo fattore è stato scelto per poter operare una semplificazione con il denominatore della (2.57), il procedimento illustrato al Paragrafo 2.5 fornisce per il compensatore stabilizzante la funzione di trasferimento

$$G_y(s) = \frac{(s+4,708)\ \left((s+3,728)^2 + 3,537^2\right)}{(s+19,96)\ \left((s+10,02)^2 + 9,984^2\right)} \ . \tag{2.65}$$

Si determinano quindi tutti i poli dell' anello stabilizzante in base alla

$$\frac{G_y(s)\, G(s)}{1 + G_y(s)\, G(s)} = \frac{10\,(s+4,708)\ \left((s+3,728)^2 + 3,537^2\right)}{(s+1,057)\,(s+1,949)\,(s+4,998)\,(s+20)\ \left((s+10^2) + 10^2\right)} \ , \tag{2.66}$$

e, come nella soluzione precedente, si sceglie il numeratore di $G_v(s)$ in modo da operare opportune cancellazioni:

$$G_v(s) = \frac{(s+1,949)\,(s+4,998)\,(s+20)}{(s+19,96)\ \left((s+10,02)^2 + 9,984^2\right)} \ ; \tag{2.67}$$

in questo caso in luogo della (2.61) si ha

$$G_1(s) = \frac{P_1(s)}{Q_1(s)} = \frac{G_v(s)\, G(s)}{1 + G_y(s)\, G(s)} = \frac{10}{(s+1,057)\ \left((s+10)^2 + 10^2\right)} \ , \tag{2.68}$$

mentre la (2.47) fornisce

$$G_a(s) = \frac{100\,(s+1,057)}{s} \ . \tag{2.69}$$

Esercizio 2.6.2 *Sistema controllato di tipo 0 con regolatore di tipo 2*

Dato il sistema con funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{10}{(s+1)\,(s+2)\,(s+5)} \ , \tag{2.70}$$

si vuole progettare un regolatore in retroazione unitaria che soddisfi le seguenti specifiche:

1. massima sovraelongazione della risposta al gradino unitario: $S \leq 20\%$;
2. tempo di ritardo (al 50% del valore di regime): $T_r \leq 0,25$ sec;
3. errore a regime nella risposta alla rampa $e_v = 0$.

Sol. Si sceglie dapprima il modello di riferimento: la condizione di realizzabilità fisica implica $n_0 - m_0 \geq 3$, mentre la specifica 3 richiede che gli ultimi due termini dei polinomi a numeratore e a denominatore siano uguali, per cui si può assumere $m_0 = 1$, $n_0 = 4$. La funzione di trasferimento viene costruita a partire da quella del filtro di Bessel del terzo ordine con $\omega_n = 10$ sec^{-1} (che soddisfa, con un certo margine, la specifica 2), aggiungendovi una coppia polo-zero con massima sovraelongazione funzione di un parametro α. Risulta

$$G_0(s) = \frac{\left(a_1 + \frac{\alpha}{\omega_n}\right) s + 1}{\left(a_3 \frac{s^3}{\omega_n^3} + a_2 \frac{s^2}{\omega_n^2} + a_1 \frac{s}{\omega_n} + 1\right) \left(1 + \frac{\alpha}{\omega_n} s\right)} , \tag{2.71}$$

con $a_3 = 1$, $a_2 = 2,4329$, $a_1 = 2,4662$ (costanti del filtro di Bessel del terzo ordine con $\omega_n = 1$). La scelta $\alpha = 10$ rende soddisfatta la specifica 1. Si ottiene così

$$G_0(s) = \frac{1247\,(s + 0,8022)}{(s+1)\,(s+9,416)\,((s+7,456)^2 + 7,114^2)} . \tag{2.72}$$

In Fig. 2.18 sono riportate la risposta al gradino unitario del filtro di Bessel non

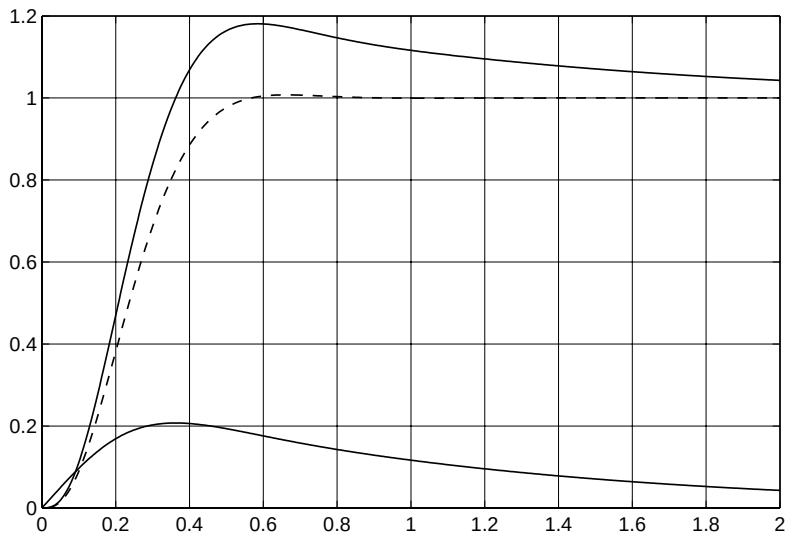


Fig. 2.18. Risposta al gradino unitario ed errore nella risposta alla rampa unitaria relativi alla (2.72).

modificato (a tratto), la risposta al gradino unitario della (2.72) e l'errore nella risposta alla rampa unitaria relativo alla (2.72), tendente a zero come richiesto dalla specifica 3.

Si progetta, quindi, l'anello stabilizzante con la procedura sviluppata per l'Esercizio 2.6.1, cioè per allocazione di $2n - 1 = 5$ poli mediante retroazione stato-ingresso

realizzata attraverso un osservatore di ordine ridotto: due poli vengono scelti uguali a quelli non nulli di

$$\frac{G_0(s)}{1-G_0(s)} = \frac{P_0(s)}{Q_0(s)-P_0(s)} = \frac{1247\,(s+0,8022)}{s^2\,((s+12,66)^2+10,51^2)}\ , \tag{2.73}$$

in modo da poterli cancellare nella relazione (2.47), mentre gli altri tre, arbitrari, vengono ancora scelti uguali a quelli del filtro di Bessel del terzo ordine con $\omega_n - 5$ rad/sec, il cui denominatore è dato dalla (2.58). La funzione di trasferimento del compensatore stabilizzante così ottenuto è

$$G_y(s) = \frac{136,9\,(s+3,979)\,(s+5,505)}{(s+14,75)^2+13,05^2}\ . \tag{2.74}$$

Per $G_v(s)$ si sceglie la funzione avente gli stessi poli della precedente e gli zeri uguali alle radici complesse del polinomio (2.58), cioè

$$G_v(s) = \frac{(s+3,728)^2+3,537^2}{(s+14,75)^2+13,05^2}\ ; \tag{2.75}$$

sostituendo nella (2.56) si ottiene

$$G_1(s) = \frac{P_1(s)}{Q_1(s)} = \frac{G_v(s)\,G(s)}{1+G_y(s)\,G(s)} = \frac{10}{(s+4,708)\ ((s+12,66)^2+10,51^2)}\ . \tag{2.76}$$

Mediante la (2.47), tenendo conto delle (2.73) e (2.76), si determina infine la funzione di trasferimento dell'unità di regolazione asintotica:

$$G_a(s) = \frac{124,7\,(s+0,8022)\,(s+4,708)}{s^2}\ . \tag{2.77}$$

Una soluzione alternativa: allocazione di n zeri ed n poli. Anche in questo caso viene presentata la soluzione alternativa, consistente nell'allocazione di n zeri del compensatore stabilizzante ed n poli dell'anello stabilizzante. Come zeri si scelgono le radici del polinomio (2.58), e come poli le radici di

$$(s+20)\ \left((s+12,66)^2+10,51^2\right)\ , \tag{2.78}$$

in cui il secondo fattore è stato scelto per poter operare una semplificazione con il denominatore della (2.73). La funzione di trasferimento del compensatore ottenuto con la procedura illustrata al Paragrafo 2.5 è

$$G_y(s) = \frac{(s+4,708)\ \left((s+3,728)^2+3,537^2\right)}{(s+19,95)\ ((s+12,69)^2+10,50^2)}\ . \tag{2.79}$$

Si determinano poi tutti i poli dell'anello stabilizzante in base alla

$$\frac{G_y(s)\,G(s)}{1+G_y(s)\,G(s)} = \frac{10\,(s{+}4,708)\ \left((s{+}3,728)^2{+}3,537^2\right)}{(s{+}1,041)\,(s{+}1,964)\,(s{+}4,999)\,(s{+}20)\ ((s{+}12,66)^2{+}10,51^2)}\ , \tag{2.80}$$

e si sceglie il numeratore di $G_v(s)$ in modo da operare cancellazioni:

$$G_v(s) = \frac{(s+1,964)\,(s+4,999)\,(s+20)}{(s+19,95)\ ((s+12,69)^2+10,50^2)}\ , \tag{2.81}$$

ricavando, di conseguenza,

$$G_1(s) = \frac{P_1(s)}{Q_1(s)} = \frac{G_v(s)\,G(s)}{1 + G_y(s)\,G(s)} = \frac{10}{(s+1,041)\;((s+12,66)^2 + 10,51^2)} \;. \tag{2.82}$$

La (2.47) fornisce infine la funzione di trasferimento dell' unità di regolazione asintotica:

$$G_a(s) = \frac{124,7\,(s+0,822)\,(s+1,041)}{s^2} \;. \tag{2.83}$$

Esercizio 2.6.3 *Sistema controllato di tipo 1 con regolatore di tipo 0*
Dato il sistema con funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{20}{s\,(s+1)\,(s+10)} \;, \tag{2.84}$$

si vuole progettare un regolatore in retroazione unitaria che soddisfi le seguenti specifiche:

1. massima sovraelongazione della risposta al gradino unitario: $S \leq 10\%$;
2. errore a regime nella risposta alla rampa unitaria: $e_v \leq 0,2$.

Sol. Poiché le specifiche e la condizione di realizzabilità fisica, legata alla differenza fra i gradi dei polinomi a denominatore e a numeratore della (2.84), sono identiche a quelle dell' Esercizio 2.6.1, come modello di riferimento sceglie ancora la funzione di trasferimento (2.55). Essendo il sistema controllato di tipo 1, conviene progettare il compensatore stabilizzante con il procedimento descritto al Paragrafo 2.5, che consente di allocare uno zero nell' origine nella relativa funzione di trasferimento $G_y(s)$, in modo da conservare il polo nell' origine nell' anello principale. Si sceglie di allocare come zeri le radici di

$$s\;\left((s+4,33)^2 + 2,50^2\right) \;, \tag{2.85}$$

in cui le radici complesse sono state scelte uguali ai poli del filtro di Bessel di ordine 2 con $\omega_n = 5$, e come poli le radici del polinomio (2.64). Per il compensatore si ricava la funzione di trasferimento

$$G_y(s) = \frac{s\;\left((s+4,33)^2 + 2,50^2\right)}{(s+19,87)\;((s+10,03)^2 + 9,938^2)} \;, \tag{2.86}$$

mentre i poli dell' anello stabilizzante sono quelli di

$$\frac{G_y(s)\,G(s)}{1 + G_y(s)\,G(s)} = \frac{20\;\left((s+4,33)^2 + 2,50^2\right)}{(s+1,011)\,(s+9,915)\,(s+20)\;((s+10)^2 + 10^2)} \;; \tag{2.87}$$

si sceglie poi

$$G_v(s) = \frac{(s+1,011)\,(s+9,915)\,(s+20)}{(s+19,87)\;((s+10,03)^2 + 9,938^2)} \;, \tag{2.88}$$

ricavando

$$G_1(s) = \frac{P_1(s)}{Q_1(s)} = \frac{G_v(s)}{1 + G_y(s)\,G(s)} = \frac{20}{s\;((s+10)^2 + 10^2)} \;. \tag{2.89}$$

La (2.47) fornisce infine

$$G_a(s) = \frac{1000}{s\;((s+10)^2 + 10^2)}\,\frac{Q_1(s)}{P_1(s)} = 50 \;. \tag{2.90}$$

Esercizio 2.6.4 *Sistema controllato di tipo 1 con regolatore di tipo 1*
Dato il sistema con funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{20}{s\,(s+1)\,(s+10)}\ , \tag{2.91}$$

si vuole progettare un regolatore in retroazione unitaria che soddisfi le seguenti specifiche:
1. massima sovraelongazione della risposta al gradino unitario: $S \leq 20\%$; 2. tempo di ritardo (al 50% del valore di regime): $T_r \leq 0,25$ sec;
3. errore a regime nella risposta alla rampa $e_v = 0$.

Sol. Poiché le specifiche e la condizione di realizzabilità fisica, legata alla differenza fra i gradi dei polinomi a denominatore e a numeratore della (2.91), sono identiche a quelle dell'Esercizio 2.6.2, come modello di riferimento si sceglie ancora la (2.72). Essendo il sistema controllato di tipo 1, si progetta il compensatore stabilizzante con uno zero nell'origine. In particolare, si impongono ancora come zeri le radici della (2.85) e come poli le radici del polinomio (2.78). Per il compensatore si ricava la funzione di trasferimento

$$G_y(s) = \frac{s\,\left((s+4,33)^2 + 2,50^2\right)}{(s+19,84)\,\left((s+12,71)^2 + 10,45^2\right)}\ , \tag{2.92}$$

mentre i poli dell'anello stabilizzante sono quelli di

$$\frac{G_y(s)\,G(s)}{1+G_y(s)\,G(s)} = \frac{20\,\left((s+4,33)^2 + 2,50^2\right)}{(s+1,008)\,(s+9,927)\,(s+20)\,\left((s+12,66)^2 + 10,51^2\right)}\ ; \tag{2.93}$$

si sceglie poi

$$G_v(s) = \frac{(s+1,008)\,(s+9,927)\,(s+20)}{(s+19,84)\,\left((s+12,71)^2 + 10,45^2\right)}\ , \tag{2.94}$$

ricavando

$$G_1(s) = \frac{P_1(s)}{Q_1(s)} = \frac{G_v(s)}{1+G_y(s)\,G(s)} = \frac{20}{s\,\left((s+12,66)^2 + 10,51^2\right)}\ . \tag{2.95}$$

La (2.47) fornisce infine

$$G_a(s) = \frac{1247\,(s+0,8022)}{s^2\,\left((s+12,66)^2 + 10,51^2\right)}\,\frac{Q_1(s)}{P_1(s)} = \frac{62,33\,(s+0,8022)}{s}\ . \tag{2.96}$$

Complementi al Capitolo 2

C2.1 La risposta all' impulso in termini finiti

La realizzazione di Jordan consente di esprimere la risposta all' impulso $c\,e^{At}\,b + d\,\delta(t)$ in termini finiti direttamente in funzione dei modi del sistema. Poiché da una funzione di trasferimento razionale $G(s)$ si può passare facilmente ad una generica realizzazione (A, b, c, d) e da questa ad (A_3, b_3, c_3, d), essa può essere impiegata per eseguire l' *antitrasformazione di Laplace* delle funzioni razionali proprie operando nello spazio degli stati.

L' esponenziale $e^{A_3 t}$ ha la stessa struttura diagonale a blocchi della A_3, ma con i blocchi costituiti dalle esponenziali $e^{R_i t}$ ed $e^{C_i t}$, che sono dei tipi riportati ai secondi membri delle (1.125) e (1.126), rispettivamente con $m = \mu_i$ e $m = \nu_i$. Il vettore $v(t) := e^{A_3 t} b_3$ contiene i modi del sistema ordinati in accordo alla struttura di A_3. Si verifica immediatamente che esso è dato da

$$v(t) = [\, v_1^T(t) \quad \dots \quad v_h^T(t) \quad w_1^T(t) \quad \dots \quad w_k^T(t)\,]^T \ , \tag{2.97}$$

con

$$v_i(t) := e^{R_i t}\, m_i = \begin{bmatrix} \frac{t^{\mu_i - 1}}{(\mu_i - 1)!} e^{\rho_i t} \\ \frac{t^{\mu_i - 2}}{(\mu_i - 2)!} e^{\rho_i t} \\ \vdots \\ t\, e^{\rho_i t} \\ e^{\rho_i t} \end{bmatrix} \qquad (i = 1, \dots, h) \ , \tag{2.98}$$

$$w_i(t) := e^{C_i t}\, n_i = \begin{bmatrix} \frac{t^{\nu_i - 1}}{(\nu_i - 1)!} e^{\sigma_i t} \sin \omega_i t \\ \frac{t^{\nu_i - 1}}{(\nu_i - 1)!} e^{\sigma_i t} \cos \omega_i t \\ \vdots \\ e^{\sigma_i t} \sin \omega_i t \\ e^{\sigma_i t} \cos \omega_i t \end{bmatrix} \qquad (i = 1, \dots, \bar{h}) \ . \tag{2.99}$$

La risposta all' impulso in termini finiti è data da $W(t) = c_3\, v(t) + d\,\delta(t)$: il vettore di distribuzione dell' uscita c_3 fornito dalla (2.9) ha pertanto come componenti i coefficienti dei modi nella risposta all' impulso. Se lo si desidera, per i modi complessi si può passare dalla forma cartesiana a quella polare in base alla nota relazione

$$\frac{t^k}{k!}\, e^{\sigma_i t}\, (A \sin \omega_i t + B \cos \omega_i t) = \frac{t^k}{k!}\, e^{\sigma_i t}\, \sqrt{A^2 + B^2}\, \sin\, (\omega_i t + \arg\,(A + jB)\,) \ . \tag{2.100}$$

Usando un sistema esteso che includa un esosistema, si può determinare la risposta ad un qualunque segnale di saggio (gradino, rampa, sinusoide), sempre in termini finiti. Inoltre si può ricavare l' elemento generico dell' esponenziale di matrice $(e^{At})_{ij}$,

anch' esso in termini finiti, assumendo come c il vettore riga con tutti gli elementi nulli, tranne l' i-esimo, uguale ad uno, e come b il vettore colonna con tutti gli elementi nulli, tranne il j-esimo, uguale ad uno.

Estensione ai sistemi a tempo discreto. Quanto precede si estende facilmente ai sistemi a tempo discreto: si noti che, applicando la trasformazione $\mathcal{Z}$ alla realizzazione generica a tempo discreto

$$x(k+1) = A_d\, x(k) + b_d\, u(k)\ , \quad x(0) = x_0\ , \tag{2.101}$$

$$y(k) = c_d\, x(k) + d_d\, u(k)\ , \tag{2.102}$$

si ottiene

$$z\, x(z) = A_d\, x(z) + b_d\, u(z) + x_0\ , \tag{2.103}$$

$$y(z) = c_d\, x(z) + d_d\, u(z)\ , \tag{2.104}$$

relazioni del tutto identiche alle (2.14, 2.15), a parte la sostituzione di s con z. Il passaggio da una generica funzione di trasferimento discreta $G(z)$ ad una realizzazione (A_d, b_d, c_d, d_d) si opera pertanto in modo identico al caso a tempo continuo.

Anche nel caso dei sistemi a tempo discreto la realizzazione di Jordan consente di esprimere la risposta all' impulso $c_d\, A_d^{k-1}\, b_d + d_d\, \delta(k)$ in termini finiti direttamente in funzione dei modi del sistema e di eseguire pertanto l' *antitrasformazione* $\mathcal{Z}$ delle funzioni razionali proprie operando nello spazio degli stati: è sufficiente, infatti, sostituire le (2.97, 2.99) con le relazioni

$$v(k) = [\, v_1^T(k) \quad \dots \quad v_h^T(k) \quad w_1^T(k) \quad \dots \quad w_k^T(k)\,]^T\ , \tag{2.105}$$

$$v_i(k) := R_i^{k-1}\, m_i = \begin{bmatrix} \binom{k-1}{\mu_i-1}\, \rho_i^{k-\mu_i} \\ \binom{k-1}{\mu_i-2}\, \rho_i^{k-\mu_i+1} \\ \vdots \\ \binom{k-1}{1}\, \rho_i^{k-2} \\ \rho_i^{k-1} \end{bmatrix} \quad (i = 1, \dots, h)\ , \tag{2.106}$$

$$w_i(k) := C_i^{k-1}\, n_i = \begin{bmatrix} \binom{k-1}{\mu_i-1}\, M_i^{k-\mu_i} \sin{(k-\mu_i)\,\vartheta_i} \\ \binom{k-1}{\mu_i-1}\, M_i^{k-\mu_i} \cos{(k-\mu_i)\,\vartheta_i} \\ \vdots \\ M_i^{k-1} \sin{(k-1)\,\vartheta_i} \\ M_i^{k-1} \cos{(k-1)\,\vartheta_i} \end{bmatrix} \quad (i = 1, \dots, \bar{h})\ , \tag{2.107}$$

in cui ρ_i indicano gli autovalori reali e M_i, $\pm\vartheta_i$ i moduli e gli argomenti degli autovalori complessi coniugati. Le (2.106, 2.107) sono state dedotte dalle (1.128–1.130). La risposta all' impulso è data da $W(k) = c_3\, v(k) + d\, \delta(k)$; si noti che i modi del sistema, cioè funzioni dei tipi $k^n\, \rho^k$ nel caso reale e $k^n\, M_i^k \sin k\vartheta_i$, $k^n\, M_i^k \cos k\vartheta_i$ in quello complesso, non appaiono direttamente negli elementi di $v(k)$, per cui si ritiene opportuno

sviluppare i passaggi che consentono di esprimere i vettori (2.106, 2.107) in funzione di essi. Si consideri l'identità

$$\binom{k-1}{q} = \frac{(k-1)\,(k-2)\,\ldots\,(k-q)}{q!} - (-1)^q\,\delta(k)\ , \tag{2.108}$$

valida per $k \geq 0$, $q \geq 1$: l'ultimo termine a secondo membro serve per rispettare la congruenza con la definizione del coefficiente binomiale per $k=0$. Si indica con P_q il vettore $1 \times \mu_i$ dei coefficienti del polinomio in k avente come radici gli interi $1, \ldots, q$, $q \leq \mu_1 - 1$, eventualmente completato a sinistra con degli zeri fino alla dimensione indicata e si assume $P_0 := [0, \ldots, 0, 1]$: posto

$$K_1 := \begin{bmatrix} \frac{1}{(\mu_i-1)!}\,P_{\mu_i-1} \\ \frac{1}{(\mu_i-2)!}\,P_{\mu_i-2} \\ \vdots \\ P_1 \\ P_0 \end{bmatrix}\ ,\quad K_0 := \begin{bmatrix} -(-1)^{\mu_i-1}\,\delta(k) \\ -(-1)^{\mu_i-2}\,\delta(k) \\ \vdots \\ \delta(k) \\ 0 \end{bmatrix}\ , \tag{2.109}$$

la (2.106) per $\rho_i \neq 0$ si può scrivere

$$v_i(k) = K_1 \begin{bmatrix} \rho_i^{-\mu_i} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \rho_i^{-(\mu_i-1)} & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \rho_i^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \rho_i^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k^{\mu_i-1}\,\rho_i^k \\ k^{\mu_i-2}\,\rho_i^k \\ \vdots \\ k\,\rho_i^k \\ \rho_i^k \end{bmatrix} + K_0\,\rho_i^k\ . \tag{2.110}$$

Nel caso $\rho_i = 0$ si interpreta direttamente la (2.106): 0^{k-q} è uguale a zero per ogni $k \neq q$ ed uguale ad uno per $k = q$, mentre il corrispondente coefficiente binomiale $\binom{k-1}{q-1}$ è uguale ad uno per $k = q$; si ha pertanto

$$v_i(k) = \begin{bmatrix} \delta(k-\mu_i) \\ \delta(k-\mu_i-1) \\ \vdots \\ \delta(k-2) \\ \delta(k-1) \end{bmatrix}. \tag{2.111}$$

Il caso della (2.107) si tratta in modo analogo al caso reale, sostituendo a ρ_i le matrici 2×2 B_i definite dalla 1.124; si ottiene

$$w_i(k) = K_1' \begin{bmatrix} B_i^{-\mu_i} & \ldots & O \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ O & \ldots & B_i^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k^{\mu_i-1}\,M_i^k \sin k\vartheta_i \\ k^{\mu_i-1}\,M_i^k \cos k\vartheta_i \\ \vdots \\ M_i^k \sin k\vartheta_i \\ M_i^k \cos k\vartheta_i \end{bmatrix} + K_0' \begin{bmatrix} M_i^k \sin k\vartheta_i \\ M_i^k \cos k\vartheta_i \end{bmatrix}\ , \tag{2.112}$$

dove K_1' è la matrice quadrata ottenuta da K_1 sostituendovi ogni elemento con una matrice 2×2 in cui esso viene riprodotto quattro volte e K_0' è la matrice a due colonne ottenuta da K_0 replicandone nello stesso modo ogni elemento.

C2.2 Allocazione dei poli nel caso MIMO

Dimostrazione del Teorema 2.3.2 Se. Si dimostra anzitutto un risultato noto come *lemma di Heymann*: dato un coppia MIMO (A, B) controllabile, esistono due matrici F, $p \times n$, e G, $p \times 1$, tali che la coppia SISO $(A + BF, BG)$ sia ancora controllabile, cioè che la controllabilità si mantenga operando la retroazione dallo stato e la distribuzione degli ingressi mostrate in Fig. 2.19.

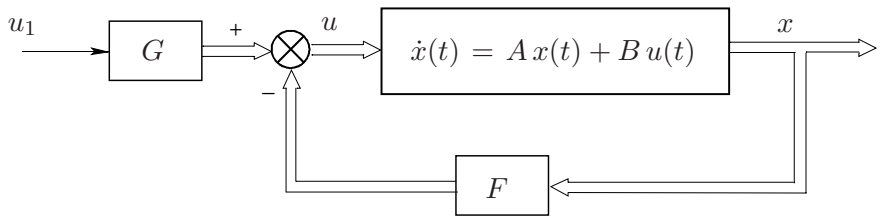


Fig. 2.19. Sistema controllabile con autovalori reali arbitrari.

Si dimostra anzitutto che la retroazione dallo stato attraverso la matrice F consente di assegnare autovalori reali. Per semplicità si considera un sistema a due ingressi, con (A, B) controllabile (il procedimento di dimostrazione è facilmente generalizzabile ad un numero di ingressi superiore). Sia $B = [b_1 \; b_2]$ la matrice di distribuzione degli ingressi, $n \times 2$, e

$$\mathcal{R}_1 = \mathrm{im}([\, b_1 \quad A\, b_1 \quad \dots \quad A^{n-1} b_1 \,])$$

il sottospazio raggiungibile con il solo primo ingresso, che si suppone non coincidere con l'intero spazio, in quanto in tal caso il sistema sarebbe completamente controllabile con il solo primo ingresso e il problema dell'allocazione dei poli sarebbe risolto. Si opera il cambiamento di base espresso da $T := [T_1 \; T_2]$, con $\mathrm{im} T_1 = \mathcal{R}_1$, per cui è

$$A' := T^{-1} A\, T = \begin{bmatrix} A'_{11} & A'_{12} \\ O & A'_{22} \end{bmatrix} , \quad B' := T^{-1} B = \begin{bmatrix} b'_{11} & b'_{12} \\ O & b'_{22} \end{bmatrix} ,$$

con (A'_{11}, b'_{11}) controllabile per costruzione, (A'_{22}, b'_{22}) controllabile perché il primo ingresso non incide sul secondo sottosistema e il sistema complessivo è completamente controllabile per ipotesi.

Posto

$$F' = \begin{bmatrix} f'_{11} & O \\ O & f'_{22} \end{bmatrix} ,$$

si ha

$$T^{-1}(A - BF)\, T = A' - B' F' = \begin{bmatrix} A'_{11} - b'_{11} f'_{11} & A'_{12} - b'_{12} f'_{22} \\ O & A'_{22} - b'_{22} f'_{22} \end{bmatrix} ,$$

da cui risulta che gli autovalori sono tutti assegnabili ad arbitro purché reali (in quanto il loro numero per ogni sottomatrice è legato alla dimensione del relativo sottospazio raggiungibile). La matrice di retroazione riferita alla base principale è $F = F'\, T^{-1}$.

Si sceglie una F che assegni autovalori reali distinti e si considera ora una seconda trasformazione di similitudine T_1 tale che la matrice $A'_1 = T_1^{-1}(A - BF)\, T_1$ sia in forma di Jordan, cioè diagonale. La corrispondente $B'_1 = T_1^{-1} B$ deve avere almeno un

elemento diverso da zero in ogni riga, altrimenti la coppia $(A-BF, B)$ non sarebbe controllabile, il che è assurdo in quanto la retroazione dallo stato non incide sulla controllabilità. È pertanto possibile scegliere la matrice G in modo che il vettore colonna $B_1' G$ abbia tutti gli elementi diversi da zero. Ciò, in virtù del Teorema C1.3.1 garantisce la controllabilità di $(A-BF, BG)$.

Una volta dimostrato il lemma di Heymann, il problema dell'allocazione degli autovalori si riconduce al caso SISO. In virtù del Teorema 2.3.1 esiste infatti una matrice di retroazione dallo stato H_1, $1 \times n$, che assegna ad arbitrio gli autovalori del sistema SISO di Fig. 2.19: pertanto la matrice di retroazione dello stato $H = GH_1 + F$ assegna ad arbitrio gli autovalori della coppia (A, B).

Solo se. Si dimostra come per il Teorema 2.3.1. □

C2.3 Stabilizzazione con osservatori di ordine ridotto

Gli *osservatori di ordine ridotto* forniscono la stima asintotica dello stato attraverso una dinamica di ordine $n-q$, in cui q è il numero delle componenti dell'uscita. Poiché in molti sistemi di controllo in retroazione, anche ad una sola variabile controllata, sono disponibili più segnali di uscita per la retroazione stabilizzante (dette *variabili intermedie*, per distinguerle dalle variabili manipolabili e controllate), il loro impiego risulta conveniente specialmente per la maggior robustezza in rapporto alle variazioni parametriche, in quanto sfruttano il massimo dell'informazione sullo stato ottenibile da misurazioni dirette.

Si consideri un sistema MIMO (A, B, C, D) con (A, C) osservabile e C di rango massimo. Applicando la trasformazione di similitudine $T := [T_1 \; T_2]$, con $T_1 = C^+$ (la pseudoinversa destra di C) e T_2 tale che $\mathrm{im} T_2 = \ker C$, si ottiene il sistema equivalente (A', B', C', D), in cui è

$$C' = [\, I_q \quad O \,] \; . \tag{2.113}$$

Indicando con z lo stato del sistema così ottenuto, si possono scrivere le equazioni

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1(t) \\ \dot{z}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A'_{11} & A'_{12} \\ A'_{21} & A'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B'_1 \\ B'_2 \end{bmatrix} u(t) \; , \tag{2.114}$$

in cui z, A' e B' sono stati partizionati come C' nella (2.113). Risulta $y = z_1$, in virtù della particolare struttura di C'. Posto $y_0(t) := y(t) - D\,u(t)$, si ottiene

$$\begin{aligned} \dot{z}_1(t) = \dot{y}_0(t) &= A'_{11}\, z_1(t) + A'_{12}\, z_2(t) + B'_1\, u(t) \\ &= A'_{11}\, y(t) + A'_{12}\, z_2(t) + B'_1\, u(t) \; , \end{aligned}$$

e, indicando con K_2 una matrice arbitraria $(n-q) \times q$,

$$\dot{z}_2(t) = A'_{21}\, y_0(t) + K_2 \left(\dot{y}_0(t) - A'_{11}\, y_0(t) - A'_{12}\, z_2(t) - B'_1\, u(t) \right) + A'_{22}\, z_2(t) + B'_2\, u(t) \; ,$$

cioè

$$\dot{z}_2(t) = (A'_{22} - K_2\, A'_{12})\, z_2(t) + A'_{21}\, y_0(t) + K_2 \left(\dot{y}_0(t) - A'_{11}\, y_0(t) - B'_1\, u(t) \right) + B'_2\, u(t) \; .$$

Gli autovalori di $A'_{22} - K_2 A'_{12}$ sono arbitrariamente assegnabili con un'opportuna scelta di K_2 in quanto (A'_{22}, A'_{12}) è osservabile se (A', C') lo è, data la struttura di

C'. Posto $w := z_2 - K_2\, y_0$, da cui $z_2 = w + K_2\, y_0$, si ottiene

$$\begin{aligned}\dot{w}(t) &= (A'_{22}-K_2A'_{12})\,(w(t)+K_2\,y_0(t))+A'_{21}\,y_0(t)-K_2\,\big(A'_{11}\,y_0(t)+B'_1\,u(t)\big)+B'_2\,u(t)\\ &= (A'_{22}-K_2A'_{12})\,w(t)+\big((A'_{22}-K_2A'_{12})\,K_2+A'_{21}-K_2A'_{11}\big)\;y_0(t)+(B'_2-K_2B'_1)\,u(t)\,,\end{aligned}$$

cioè

$$\dot{w}(t) = N\,w(t) + M\,y_0(t) + L\,u(t)\ , \tag{2.115}$$

avendo posto

$$L = B'_2 - K_2\,B'_1\ , \tag{2.116}$$

$$M = (A'_{22} - K_2\,A'_{12})\,K_2 + A'_{21} - K_2\,A'_{11}\ , \tag{2.117}$$

$$N = A'_{22} - K_2\,A'_{12}\ . \tag{2.118}$$

Uno schema a blocchi dell'osservatore è riportato in Fig. 2.20. La stima dello stato $\tilde{x}$ si ottiene sommando i vettori $T_1\,y_0$ e $T_2\,z_2 = T_2(w + K_2\,y_0)$, in cui T_1 e T_2 sono le sottomatrici di T precedentemente definite.

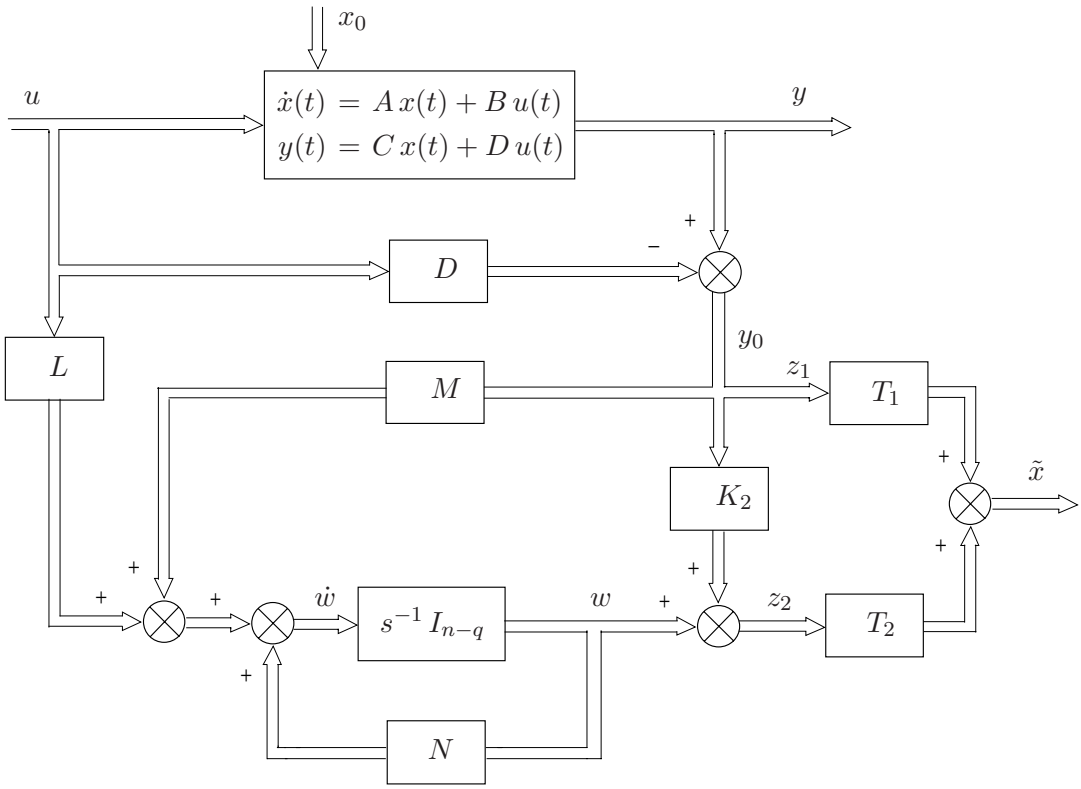


Fig. 2.20. Osservatore asintotico di ordine ridotto.

La proprietà di separazione per gli osservatori di ordine ridotto. Si considera il sistema di Fig. 2.21, in cui la stima dello stato fornita da un osservatore di ordine ridotto viene utilizzata in luogo dello stato vero per una retroazione stato-ingresso. Anche se i calcoli delle varie matrici dell'osservatore sono stati fatti in relazione al sistema (A', B', C', D) con C' nella forma (2.113), l'unità stabilizzante realizzata è valida anche per il sistema originario (A, B, C, D), essendo coinvolta

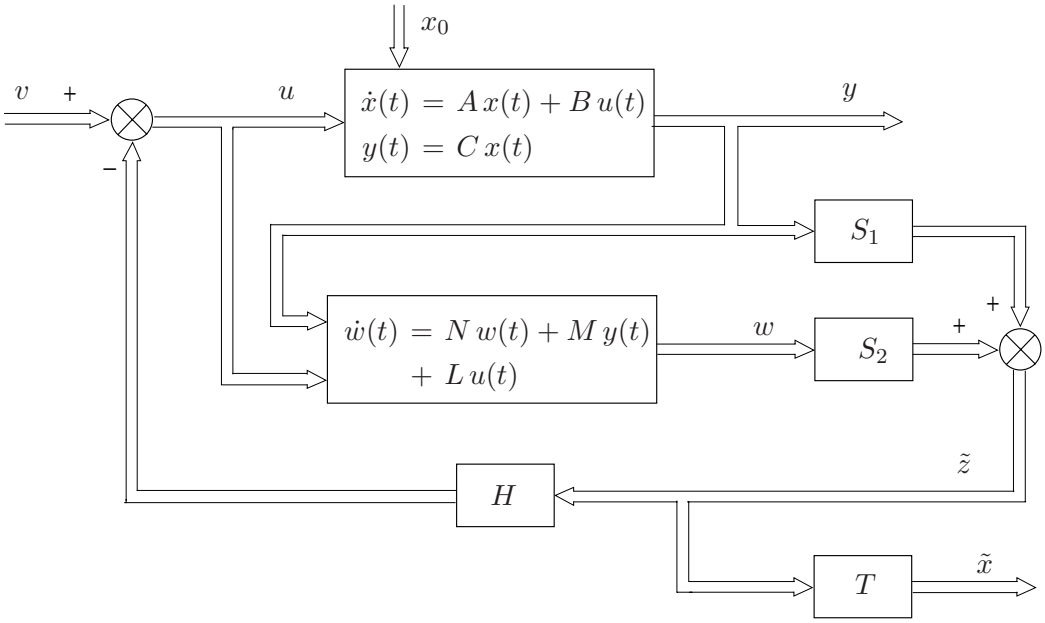


Fig. 2.21. Retroazione dello stato ottenuta con un osservatore di ordine ridotto.

solo la dinamica ingresso-uscita, che è la medesima per ogni coppia di realizzazioni equivalenti.

Valgono le relazioni

$$\begin{aligned}
\dot{z}(t) &= A'\,z(t) + B'\,u(t)\ , \\
\dot{w}(t) &= N\,w(t) + MC'\,z(t) + L\,u(t)\ , \\
u(t) &= -B'H\,\tilde{z}(t) + B'\,v(t) \\
&= -B'HS_1\,z(t) - B'HS_2\,w(t) + B'\,v(t)\ ,
\end{aligned}$$

in cui H alloca gli autovalori di $A' - B'H$, L, M ed N sono le matrici definite dalle (2.116 –2.118) e

$$C' = [\,I_q \quad O\,]\ , \quad S_1 := \begin{bmatrix} I_q \\ K_2 \end{bmatrix}\ , \quad S_2 := \begin{bmatrix} O \\ I_{n-q} \end{bmatrix}\ .$$

Si pone

$$e := w - R\,z\,, \quad \text{con} \quad R := [-K_2 \quad I_{n-q}]\ ,$$

e si nota che valgono le uguaglianze

1. $S_1\,C' + S_2\,R = I_n\,,$
2. $N\,R + M\,C' - R\,A' = O\,,$
3. $L - R\,B' = O\,.$

che si provano per verifica diretta con i seguenti passaggi:

$$\begin{bmatrix} I_q & O \\ K_2 & O \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} O & O \\ -K_2 & I_{n-q} \end{bmatrix} = I_n \ ,$$

$$[\,-A'_{22}K_2 + K_2A'_{12}K_2 \quad A'_{22} - K_2A'_{12}\,] +$$

$$[\,(A'_{22} - K_2A'_{12})K_2 + A'_{21} - K_2A'_{11} \quad O\,] +$$

$$[\,K_2A'_{11} - A'_{21} \quad K_2A'_{12} - A'_{22}\,] = O \ ,$$

$$[B'_2 - K_2B'_1] - [-K_2B'_1 + B'_2] = O \ .$$

Il sistema dato, le cui equazioni sono

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= A'\,z(t) - B'H\,\big(S_1C'\,z(t) + S_2\,w(t)\big) + B'\,v(t) \ , \\ \dot{w}(t) &= N\,w(t) + MC'\,z(t) - LH\,\big(S_1C'\,z(t) + S_2\,w(t)\big) + L\,v(t) \ , \end{aligned}$$

con il cambiamento di variabile indicato si trasforma in

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= A'\,z(t) - B'H\,\big(S_1C'\,z(t) + S_2\,(e(t) + R\,z(t))\big) + B'\,v(t) \ , \\ \dot{e}(t) &= \dot{w}(t) - R\,\dot{z}(t) \\ &= N\,(e(t) + R\,z(t)) + MC'\,z(t) - LH\,\big(S_1C'\,z(t) + S_2\,w(t)\big) + L\,v(t) \\ &\qquad - RA'\,z(t) + RB'H\,\big(S_1C'\,z(t) + S_2\,w(t)\big) - RB'\,v(t) \ , \end{aligned}$$

che, dopo opportune semplificazioni basate sulle uguaglianze precedentemente provate, si può scrivere nella forma compatta

$$\begin{bmatrix} \dot{z}(t) \\ \dot{e}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A' - B'H & -B'HS_2 \\ O & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(t) \\ e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B' \\ O \end{bmatrix} v(t) \ ,$$

da cui risulta che gli autovalori del sistema complessivo sono l'unione con ripetizione di quelli di $A' - B'H$ e di quelli di $N = A'_{22} - K_2A'_{12}$.

Sintesi dell'unità stabilizzante di ordine ridotto. Si prende ora in esame l'utilizzazione dell'osservatore di ordine ridotto per costruire l'unità stabilizzante per un sistema di controllo in retroazione; ci si riferisce ad un sistema controllato a molte uscite, il che è spesso utile anche in relazione ai sistemi ad una sola variabile controllata, per tener conto della possibilità di accedere, da parte dell'unità stabilizzante, anche ad eventuali variabili intermedie.

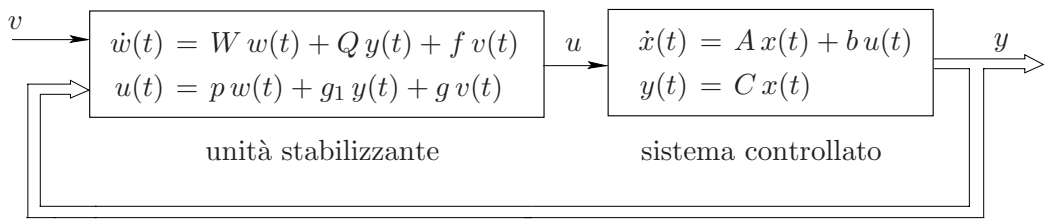


Fig. 2.22. Stabilizzazione con un'unità di ordine ridotto.

Ci si riferisce al complesso mostrato in Fig. 2.22, con un sistema controllato puramente dinamico (A, b, C), a un solo ingresso e molte uscite, che si assume completamente controllabile ed osservabile, equivalente al sistema descritto dalle equazioni

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= A'\, z(t) + b'\, u(t) \ , \\ y(t) &= C'\, z(t) \ , \end{aligned}$$

con

$$A' = \begin{bmatrix} A'_{11} & A'_{12} \\ A'_{21} & A'_{22} \end{bmatrix} \ , \quad b' = \begin{bmatrix} b'_1 \\ b'_2 \end{bmatrix} \ , \quad C' = [\, I_q \quad O \,] \ .$$

L' unità stabilizzante è descritta da

$$\begin{aligned} \dot{w}(t) &= W\, w(t) + Q\, y(t) + f\, v(t) \ , \\ u(t) &= p\, w(t) + g_1\, y(t) + g\, v(t) \ , \end{aligned}$$

dove le matrici k, ℓ, M ed N sono definite, in accordo con quanto precedentemente esposto in relazione agli osservatori di ordine ridotto, come

$$\begin{aligned} g_1 &:= -(h_2 K_2 + h_1) \ , \\ p &:= -h_2 \ , \\ Q &:= (A'_{22} - K_2 A'_{12})\, K_2 + A'_{21} - K_2 A'_{11} - (b'_2 - K_2 b'_1)\, (h_2 K_2 + h_1) \ , \\ W &:= A'_{22} - K_2 A'_{12} - (b'_2 - K_2 b'_1)\, h_2 \ . \end{aligned}$$

La matrice arbitraria $h = [h_1 \ \ h_2]$, $1 \times n$, assegna gli autovalori di $A' - b'h$, K_2, $(n-q) \times q$, quelli di $A'_{22} - K_2 A'_{12}$, mentre f, $(n-q) \times 1$, e g, scalare, assegnano $n-q$ zeri rispetto all' ingresso v e il guadagno statico complessivo. La procedura di sintesi diretta presentata al Paragrafo 2.4 può essere adottata senza variazioni di rilievo; anche la (2.50), che fornisce l' ordine minimo del modello di riferimento, resta ancora valida, in quanto sia il numero dei poli sia quello degli zeri arbitrariamente assegnabili nel caso in esame diminuiscono di q rispetto al caso dell' osservatore di ordine pieno (si ricorda che gli zeri assegnabili si cancellano tutti con poli assegnabili).

A

AUSILI COMPUTAZIONALI IN MATLAB

Vengono passati in rassegna i comandi più frequenti per la compilazione di *m-files* in Matlab e vengono presentati alcuni programmi in Matlab utili per lo studio dei sistemi dinamici. Essi si riferiscono alla versione 5.3 o successiva. Si consiglia di utilizzare il comando *help program* per per ottenere maggiori informazioni sulla particolare funzione *program*.

A.1 Breve prontuario di comandi Matlab

Vettori

`>> u=[1 4 2 7];` definisce u come vettore riga;

`>> v=[1;4;2;7];` definisce v come vettore colonna;

`>> t=0:.1:10;` definisce t come vettore di elementi egualmente spaziati (tipicamente asse tempi); se il valore intermedio (passo) viene omesso, esso viene assunto uguale ad uno;

`>> n=length(u);` fornisce in n la lunghezza (numero di elementi) del vettore u;

`>> x=u(2);` pone in x il secondo elemento di u;

`>> x=u(2:4);` definisce x come il vettore composto dagli elementi di u dal secondo al quarto;

`>> x=u([1 3]);` definisce x come il vettore composto dal primo e terzo elemento di u;

`>> x=u(length(u):-1:1);` definisce x come il vettore ottenuto da u invertendone l'ordine degli elementi.

Matrici

`>> A=[1 2.5 -4; 5 7.8 9; 10 .1 3; 5 -4 0];` definisce per righe la matrice generica A;

`>> A=zeros(2,3); B=zeros(2);` definisce A come la matrice 2×3 con tutti gli elementi nulli, B come la matrice 2×2 con tutti gli elementi nulli;

`>> A=ones(2,3); B=ones(2);` definisce A come la matrice 2×3 con tutti gli elementi uguali ad uno, B come la matrice 2×2 con tutti gli elementi uguali ad uno;

`>> A=eye(3);` definisce A come la matrice identità 3×3;

`>> A=rand(3,4);` definisce A come una matrice 3×4 con elementi aleatori a distribuzione uniforme in $[0, 1]$;

`>> A=randn(3,4);` definisce A come una matrice 3×4 con elementi aleatori a distribuzione gaussiana con varianza unitaria;

`>> A=[];` definisce A come la matrice vuota;

`>> [m,n]=size(A);` fornisce in m il numero delle righe e in n il numero delle colonne della matrice A;

`>> A1=A(1:3,2:3);` definisce $A1$ come la sottomatrice di A corrispondente ai campi specificati di righe e colonne;

`>> A=[A1 A2; A3];` definisce A per composizione delle sottomatrici $A1, A2, A3$ di dimensioni opportune;

`>> u=A(2,:);` fornisce come vettore u la seconda riga della matrice A;

`>> v=A(:,1);` fornisce come vettore v la prima colonna della matrice A;

`>> B=A';` definisce B come la trasposta della matrice A (la coniugata trasposta se A è complessa);

`>> B=inv(A)` definisce B come l'inversa della matrice A;

`>> B=pinv(A)` definisce B come la pseudoinversa della matrice A;

`>> p=eig(A)` definisce p come il vettore colonna degli autovalori della matrice A;

`>> [T,D]=eig(A)` fornisce in T la matrice degli autovettori e in D la corrispondente matrice diagonale degli autovalori della matrice A (in caso di autovalori multipli, gli autovettori possono non essere linearmente indipendenti, mentre se A è simmetrica o hermitiana gli autovalori sono reali e gli autovettori linearmente indipendenti).

Interazione con Command Window

`>> disp('messaggio')` visualizza "messaggio";

`>> fprintf('messaggio')` visualizza "messaggio" senza ritorno a capo;

`>> fprintf('messaggio\n')` visualizza "messaggio" con ritorno a capo;

`>> fprintf('\nmessaggio\n\n')` come sopra, con un ritorno a capo prima e due dopo la visualizzazione;

`>> a=input('a : ');` esegue l'introduzione da tastiera del valore di a (costante o vettore) con messaggio " a : ";

`>> fprintf(' a = %.4g',a)` visualizza il valore di a in opportuno formato con messaggio " a = ";

`>> fprintf('\na = %.4g',a)` visualizza il valore di a come sopra, ma con ritorno a capo prima della visualizzazione.

Logica binaria[1]

`>> p=a<b;` pone p uguale ad uno se a è minore di b, uguale a zero in caso contrario;

`>> p=a>b; p=a<=b; p=a>=b; p=a==b; p=a~=b;` istruzioni analoghe alla precedente ma per maggiore, minore o uguale, maggiore o uguale, uguale, non uguale. Esse valgono anche per confrontare elemento per elemento matrici o vettori di uguali dimensioni e forniscono matrici di variabili binarie (zeri e uni);

`>> p=a|b;` fornisce in p il risultato dell'operazione OR delle variabili binarie a e b;

`>> p=a&b;` fornisce in p il risultato dell'operazione AND delle variabili binarie a e b;

`>> p=~a;` fornisce in p il valore di NOT a (complemento di a);

`>> p=any(v);` pone p uguale ad uno se almeno uno degli elementi del vettore v è vero (diverso da zero);

`>> p=all(v);` pone p uguale ad uno se tutti gli elementi del vettore v sono veri (diversi da zero);

`>> i=find(v);` fornisce nel vettore i gli indici degli elementi del vettore di variabili binarie v il cui valore è diverso da zero;

`>> [m,i]=max(v); [m,i]=min(v);` fornisce in m il valore dell'elemento massimo (minimo) del vettore v e in i quello del relativo indice.

Esecuzione condizionata di un blocco di istruzioni

`>> for k=1:n, ... , end` ripete il blocco di istruzioni fino ad "end" per k da 1 ad n; si può uscire dal loop con il comando "break", generalmente condizionato da un "if";

`>> if m, ... , end` esegue il blocco di istruzioni fino ad "end" se la variabile binaria m non è nulla;

`>> while m, ... , end` esegue il blocco di istruzioni fino ad "end" se la variabile binaria m non è nulla; si può uscire dal loop con il comando "break", generalmente condizionato da un "if".

[1] Secondo la convenzione adottata in Matlab, nelle operazioni logiche qualunque numero diverso da zero viene interpretato come "vero" e zero come "falso". Il valore corrispondente a "vero" come risultato di un'operazione logica è l'unità.

Altri comandi

>> `pause` sospende l'esecuzione del programma finché non si preme invio;

>> `shg, pause` mostra la figura corrente e sospende l'esecuzione del programma finché non si preme invio; tale sequenza di comandi viene in genere utilizzata quando si traccia un diagramma di risposta per visualizzarlo;

>> `pause(3)` sospende l'esecuzione del programma per tre secondi;

>> `return` abbandona il programma (m-file o function) e ritorna a Command Window o al programma dal quale la function e' stata chiamata;

>> `figure` definisce una nuova figura;

>> `subplot(m,n,1), ...., subplot(m,n,2), ....` suddivide una figura in $m \times n$ (matrice) sottofigure (assi) che vengono richiamate per righe come indicato;

>> `title('messaggio')` dà il titolo "messaggio" alla figura corrente;

>> `v=axis;` definisce il vettore riga v a 4 elementi con gli estremi degli assi della figura corrente;

>> `axis(v)` impone alla figura corrente gli assi con gli estremi definiti nel vettore riga v;

>> `grid` definisce un reticolo per la figura corrente;

>> `hold on` traccia i prossimi grafici riferendoli agli stessi assi dell'ultimo grafico tracciato;

>> `hold off` annulla "hold on";

>> `clear` cancella tutte le variabili dal workspace di Command Window o di una function;

>> `clear a b M` cancella dal workspace di Command Window o di una function le variabili a, b ed M;

>> `save file a b M` memorizza nel file *file.mat* le variabili a, b ed M;

>> `load file` richiama il file *file.mat* definendo o ridefinendo così tutte le variabili in esso memorizzate;

>> `close all` chiude tutte le finestre grafiche (figure).

A.2 Comandi Matlab relativi ai sistemi lineari stazionari

>> `sys1=ss(A,B,C,D);` definisce il sistema lineare stazionario *sys1* a tempo continuo;

>> `sys1=ss(A,B,C,D,T);` definisce il sistema lineare stazionario *sys1* a tempo discreto con periodo di campionamento T. Se non serve che questo sia specificato, si pone $T = -1$;

>> `sys1=ss([],[],[],D);` definisce il sistema lineare *sys1* puramente algebrico (le matrici A, B e C sono vuote e non vi è differenza fra tempo continuo e tempo discreto);

`>> [A,B,C,D]=ssdata(sys1);` estrae le matrici del systema *sys1*;

`>> sys2=tf(sys1);` passa dalla descrizione nello spazio degli stati alla descrizione con funzioni di trasferimento;

`>> sys3=ss(sys2);` passa dalla descrizione con funzioni di trasferimento alla descrizione nello spazio degli stati;

`>> sys4=minreal(sys3);` determina una realizzazione minima di *sys3*;

`>> sys2=c2d(sys1,T);` trasforma un sistema a tempo continuo in un sistema a tempo discreto in base alla tenuta di ordine zero e con periodo di campionamento T;

`>> M=dcgain(sys1);` determina la matrice di guadagno statico di *sys1*.

`>> impulse(sys1,tf),shg,pause` visualizza la risposta all'impulso del sistema *sys1* nell'intervallo $[0, tf]$ con scelta automatica dei campioni; tale scelta può essere imposta dando, in luogo dell'estremo tf, l'intera scala tempi $0 : dt : tf$;

`>> step(sys1,tf),shg,pause` visualizza la risposta al gradino del sistema *sys1* con la stessa sintassi di *impulse* per ciò che riguarda l'asse tempi;

`>> initial(sys1,x0,tf),shg,pause` visualizza la risposta libera del sistema *sys1* a partire da stato iniziale $x0$ con la stessa sintassi di *impulse* per ciò che riguarda l'asse tempi;

`>> [y,ty]=impulse(sys1,tf);` fornisce la risposta all'impulso di *sys1* senza visualizzazione; y è una matrice tridimenzionale del tipo *y(v,h,k)*, in cui v è il vettore colonna dei valori di y_h (h-esima componente dell'uscita) corrispondente all'impulso su u_k (k-esima componente dell'ingresso), mentre ty è il vettore colonna dei tempi corrispondenti a tali valori;

`>> [y,t]=step(sys1,tf); [y,t]=initial(sys1,x0,tf);` fornisce la risposta al gradino o allo stato iniziale $x0$ di *sys1* senza visualizzazione;

`>> lsim(sys1,u,t,[x0]),shg,pause` visualizza la risposta di *sys1* al segnale di ingresso $u(t)$ dato per campioni (per righe) con il corrispondente vettore colonna dei tempi t a partire dallo stato iniziale zero o, se assegnato, $x0$; se *sys1* è tempo discreto t può essere omesso o definito come matrice vuota;

`>> [y,ty]=lsim(sys1,u,t,[x0]);` fornisce, la risposta di *sys1* al segnale di ingresso $u(t)$ senza visualizzazione; l'uscita si interpreta come per *impulse*.

`>> plot(ty,y),shg,pause` visualizza la funzione a tempo continuo y con scala tempi ty;

`>> stairs(ty,y),shg,pause` visualizza la funzione a tempo discreto y con scala tempi ty;

`>> F=place(A,B,p);` data la coppia controllabile (A, B), determina una matrice F tale che $A - BF$ abbia gli autovalori assegnati nel vettore colonna p (se complessi, coniugati a coppie);

`>> n=norm(sys1);` definisce in n la norma H_2 del sistema *sys1*.

Comandi Matlab del toolbox ga

`>> Q=ima(A,p);` ortonormalizzazione (con $p=1$ vengono eseguite permutazioni delle colonne di A prima dell'ortonormalizzazione, con $p=0$ tali permutazioni non vengono eseguite);

`>> Q=ortco(A);` complemento ortogonale di un sottospazio;

`>> Q=sums(A,B);` somma di sottospazi;

`>> Q=ints(A,B);` intersezione di sottospazi;

`>> Q=invt(A,X);` immagine inversa in A del sottospazio im$X$;

`>> Q=ker(A);` spazio nullo della matrice A;

`>> Q=mininv(A,X);` minimo invariante in A contenente im$X$;

`>> Q=maxinv(A,X);` massimo invariante in A contenuto in im$X$;

`>> [P,Q]=stabi(A,X);` matrici per la stabilità interna ed esterna di im$X$, invariante in A;

Collegamenti di sistemi

Ci si riferisce ai sistemi Σ_1 e Σ_2 definiti da

$$\dot{x}_1(t) = A_1\, x_1(t) + B_1\, u_1(t)\ , \tag{A.1}$$
$$y_1(t) = C_1\, x_1(t) + D_1\, u_1(t)\ , \tag{A.2}$$

$$\dot{x}_2(t) = A_2\, x_2(t) + B_2\, u_2(t)\ , \tag{A.3}$$
$$y_2(t) = C_2\, x_2(t) + D_2\, u_2(t)\ . \tag{A.4}$$

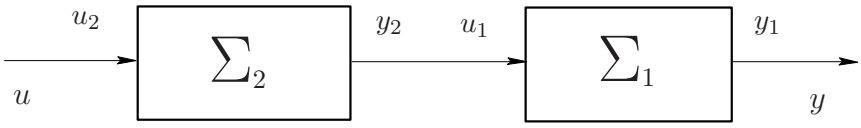


Fig. A.1. Sistemi in cascata.

Si considera dapprima il collegamento in cascata mostrato in Fig. A.1. Sostituendo l'equazione del collegamento $u_1 = y_2$ nella (A.1) e tenendo conto della (A.4) si ottiene

$$\dot{x}_1(t) = A_1\, x_1(t) + B_1\, C_2\, x_2(t) + D_1\, u_2(t)\ .$$

Operando la stessa sostituzione nella (A.2) si ottiene

$$y_1(t) = C_1\, x_1(t) + D_1\, C_2\, x_2(t) + D_1\, D_2\, u_2(t)\ .$$

Essendo $u = u_2$, $y = y_1$, si hanno le seguenti matrici del sistema complessivo

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & B_1\, C_2 \\ O & A_2 \end{bmatrix}\ , \quad B = \begin{bmatrix} B_1\, D_2 \\ B_2 \end{bmatrix}\ ,$$
$$C = \begin{bmatrix} C_1 & D_1\, C_2 \end{bmatrix}\ , \quad D = \begin{bmatrix} D_1\, D_2 \end{bmatrix}\ . \tag{A.5}$$

L'istruzione Matlab che definisce tale sistema è

`>> sys=sys1*sys2;` (è importante mantenere l'ordine dei fattori).

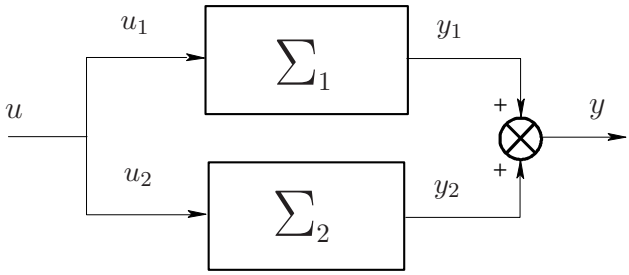


Fig. A.2. Sistemi in parallelo.

Con riferimento al collegamento in parallelo mostrato in Fig. A.2, sostituendo nella $y = y_1 + y_2$ le (A.2) e (A.4) e notando che è $u_1 = u_2 = u$, si ottiene

$$y(t) = C_1\, x_1(t) + C_2\, x_2(t) + (D_1 + D_2)\, u(t) \ .$$

Le matrici del sistema complessivo sono pertanto

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{bmatrix} \ , \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \ , \\ C &= \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \ , \quad D = \begin{bmatrix} D_1 + D_2 \end{bmatrix} \ . \end{aligned} \tag{A.6}$$

L'istruzione Matlab che definisce tale sistema è

```
>> sys=sys1+sys2;
```

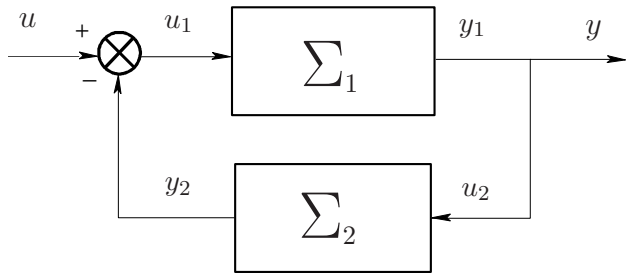


Fig. A.3. Sistemi in retroazione.

Si considera infine il collegamento in retroazione mostrato in Fig. A.3. Sostituendo nella (A.2) la relazione $u_1 = u - y_2$ e tenendo conto della (A.4), si ottiene

$$y_1(t) = C_1\, x_1(t) + D_1\ (u(t) - C_2\, x_2(t) - D_2\, y_1(t)) \ ,$$

cioè

$$y_1(t) = (I + D_1\, D_2)^{-1}\ (C_1\, x_1(t) - D_1\, C_2\, x_2(t) + D_1\, u(t)) \ .$$

Analogamente, sostituendo nella (A.4) la relazione $u_2 = y_1$ e tenendo conto della (A.2), si ottiene

$$y_2(t) = C_2\, x_2(t) + D_2\ (C_1\, x_1(t) + D_1\ (u(t) - y_2(t))) \ ,$$

cioè

$$y_2(t) = (I + D_2\, D_1)^{-1}\ (C_2\, x_2(t) + D_2\, C_1\, x_1(t) + D_1\, D_2\, u(t))\ .$$

Operando le analoghe sostituzioni di u_1 e u_2 nelle (A.1) e (A.3) si ottiene

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= A_1\, x_1(t) + B_1 \Big(u(t) - (I + D_2\, D_1)^{-1} \\
&\qquad\qquad (C_2\, x_2(t) + D_2\, C_1\, x_1(t) + D_1\, D_2\, u(t))\Big)\ , \\
\dot{x}_2(t) &= A_2\, x_2(t) + B_2\, (I + D_1\, D_2)^{-1}\ (C_1\, x_1(t) - D_1\, C_2\, x_2(t) + D_1\, u(t))\ ,
\end{aligned}$$

da cui, tenendo conto della relazione $y = y_1$, si deducono per il sistema complessivo le matrici

$$\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} A_1 - B_1\, (I + D_2\, D_1)^{-1}\, D_2\, C_1 & -B_1\, (I + D_2\, D_1)^{-1}\, C_2 \\ B_2\, (I + D_1\, D_2)^{-1}\, C_1 & A_2 - B_2\, (I + D_1\, D_2)^{-1}\, D_1\, C_2 \end{bmatrix}\ , \\
B &= \begin{bmatrix} B_1 - B_1\, (I + D_2\, D_1)^{-1}\, D_2\, D_1 \\ B_2\, (I + D_1\, D_2)^{-1}\, D_1 \end{bmatrix}\ , \\
C &= \begin{bmatrix} (I + D_1\, D_2)^{-1}\, C_1 & -(I + D_1\, D_2)^{-1}\, D_1\, C_2 \end{bmatrix}\ , \\
D &= \begin{bmatrix} (I + D_1\, D_2)^{-1}\, D_1 \end{bmatrix}\ .
\end{aligned} \tag{A.7}$$

L'istruzione Matlab che definisce tale sistema è

```
>> sys=feedback(sys1,sys2);
```

È necessario che una delle due matrici $(I + D_1\, D_2)$, $(I + D_2\, D_1)$ (che hanno lo stesso determinante) sia non singolare, il che avviene, in particolare, se almeno uno dei due sistemi è puramente dinamico.

Indice analitico

allocazione degli zeri 78
allocazione dei poli
  con retroazione stato-ingresso 74
  con retroazione uscita-azione forzante 75
antitrasformazione $\mathcal{Z}$ 93
antitrasformazione di Laplace 92
approssimazione del continuo con il discreto 18
autovalore 42
autovettore 42
azione forzante 3
base principale 1
blocco di Jordan 44
campionamento 55
  della risposta all'impulso 24
collegamento
  in cascata 106
  in parallelo 107
  in retroazione 107
comportamento esterno di un sistema 26
comportamento interno di un sistema 26
controllabilità 38
  della forma di Jordan complessa 48
  della forma di Jordan reale 50
  dopo il campionamento 52
coppia (A, B) controllabile 30
coppia (A, C) osservabile 32
criterio del rango 48
differenza prima dello stato 4
dispositivo di tenuta di ordine uno 25
dispositivo di tenuta di ordine zero 25
equazione caratteristica 42
equazione di Sylvester 51, 73
errore di stima 76
esosistema
  per il gradino unitario 21
  per la rampa unitaria 21
  per la sinusoide 21
esponenziale di matrice 16
forma canonica 34
forma di Jordan 43
forma di Jordan complessa 46
forma di Jordan reale 43, 46
funzione costante a tratti 18
funzione di evoluzione dello stato 3
funzione di uscita 3
immagine di una matrice 40
imposizione del guadagno statico 79
ingresso 1
insieme
  degli stati controllabili 29
  degli stati finali compatibili 29
  degli stati iniziali compatibili 29
  degli stati raggiungibili 29
  delle funzioni di ingresso ammissibili 29
insieme inosservabile 32
  di un sistema a tempo continuo 55
  di un sistema a tempo discreto 53
insieme raggiungibile 31
  di un sistema a tempo continuo 55
  di un sistema a tempo discreto 53
integrale di convoluzione 16
interpolazione lineare 19
intersezione di sottospazi 40
invariante 41
  invariante esternamente stabile 28
  invariante internamente stabile 28
lemma di Heymann 95
matrice
  aggiunta 69
  del legame algebrico ingresso-uscita 3
  del sistema 3
  di Toeplitz 44

di base 40
di controllabilità 30
di distribuzione degli ingressi 3
di distribuzione delle uscite 3
di osservabilità 32
di permutazione di colonne 47
di permutazione di righe 46
di risposta all'impulso 16
di risposta all'impulso ingresso-stato 16, 24
di risposta all'impulso ingresso-uscita 16, 24
di transizione dello stato 14, 23
di trasferimento 71
in forma compagna 62
matrici simili 41
metodi di Runge-Kutta 12
metodo dei rettangoli 11
metodo dei trapezi 12
metodo delle potenze binarie 23
minimalità 38
modelli normalizzati 10
modi 27, 28, 44
norma di Frobenius 17
nucleo di un integrale di convoluzione 16
nucleo di una matrice 40
nullità di una matrice 26
osservabilità 38
della forma di Jordan complessa 50
della forma di Jordan reale 50
dopo il campionamento 53
osservatore asintotico 76
osservatore di ordine pieno 76
osservatore di ordine ridotto 96
polinomio caratteristico 42
proprietà di separazione 77
per osservatori di ordine ridotto 97
rango di una matrice 40
realizzazione 37
canonica del regolatore 61
canonica dell'osservatore 64
di Jordan riferita all'ingresso 64
di Jordan riferita all'uscita 67
minima 37
parallela riferita all'ingresso 64
parallela riferita all'uscita 67
regola di Simpson 12
regolatore di tipo 0 90
regolatore di tipo 1 84, 91
regolatore di tipo 2 87
risonanza 73
robustezza 82
scomposizione canonica di Kalman 36
segnali di saggio 20
sistema
a fase minima 72
a parametri concentrati 2
a parametri distribuiti 2
a tempo continuo 2
a tempo discreto 2
completamente controllabile 29
completamente diagnosticabile 29
completamente incasellabile 29
completamente osservabile 29
completamente raggiungibile 29
completamente ricostruibile 29
controllato di tipo 0 84, 87
controllato di tipo 1 90, 91
duale 33
esteso 19
lineare non stazionario 3
lineare stazionario 3
MIMO 2
monovariabile 2
multivariabile 2
non lineare non stazionario 2
non lineare stazionario 3
puramente dinamico 2
SISO 2
sistemi
campionati nello spazio degli stati 24
equivalenti 34
equivalenti ingresso-uscita 38
esternamente equivalenti 38
internamente equivalenti 34
somma di sottospazi 40
sottospazio 40
invariante 41
spazio nullo di una matrice 40
spettro 42
stabilità asintotica 27
globale 27

stato 1
    di equilibrio 26
    di equilibrio a un dato istante 26
teorema di Cayley-Hamilton 42
traiettoria 4
    ammissibile 29
trasformazione di similitudine 41
unità di regolazione asintotica 80
unità stabilizzante 80
unità stabilizzante di ordine ridotto 99
uscita 1
valore caratteristico 42
variabile intermedia 96
variabili adimensionali 10
varietà lineare 40
velocità dello stato 4
vettore caratteristico 42
zero invariante 71