

**Controlli Automatici:
Raccolta di Prove Scritte
con Soluzione**

Elena Zattoni

Premessa

Questo volumetto è rivolto agli Studenti dei corsi di Controlli Automatici e raccoglie una serie di prove scritte con soluzione.

Un sincero ringraziamento è dovuto al prof. Giovanni Marro.

Elena Zattoni

Bologna, giugno 2004

Prova scritta di Controlli Automatici # 1

Si consideri il sistema in retroazione rappresentato in Fig.1.

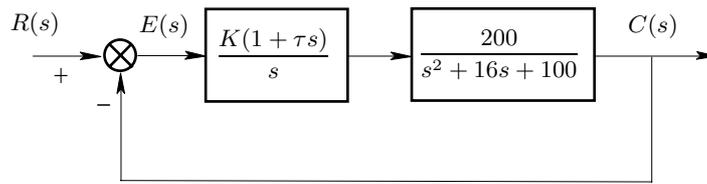


Fig. 1: Sistema in retroazione.

- a) Posto $\tau = 0$, si determini il valore del parametro $K > 0$ per il quale si ha errore a regime nella risposta alla rampa unitaria $e_r = 0.1$.
- b) Posto $\tau = 0$, si determini l'intervallo di valori del parametro $K > 0$ per i quali il sistema in retroazione è stabile asintoticamente.
- c) Posto $K = 5$ e $\tau = 0$, si traccino i diagrammi asintotici di Bode (delle ampiezze e delle fasi) della funzione guadagno d'anello del sistema in retroazione. Si determini il margine di fase del sistema.
- d) Posto $\tau = 0$, si tracci qualitativamente il luogo delle radici del sistema in retroazione al variare del parametro $K > 0$.
- e) Posto $K = 5$, si tracci qualitativamente il contorno delle radici del sistema in retroazione al variare del parametro $\tau > 0$ (i poli del sistema in retroazione per $\tau = 0$ sono $p_1 = -13.96$ e $p_{2,3} = -1.02 \pm 8.4j$). Si determini il valore del parametro τ per il quale il sistema presenta il minimo tempo di assestamento (cioè per il quale i tre poli presentano la stessa ascissa). Si determini inoltre tale valore minimo del tempo di assestamento.
- f) Posto $K = 5$ e $\tau = 0$, si tracci qualitativamente il diagramma di Nyquist della funzione guadagno d'anello del sistema in retroazione.
- g) Si assuma che nella catena diretta del sistema in retroazione specificato al punto f), fra il regolatore e l'impianto, sia inserita la non linearità descritta dalla caratteristica, simmetrica rispetto all'origine, riportata in Fig.2. Si assuma il riferimento uguale a zero e si tracci qualitativamente il grafico della corrispondente funzione descrittiva $F(X)$ nell'intorno del punto di lavoro. Si determinino la pulsazione ω^* e l'ampiezza X dell'oscillazione autosostenuta presente nel sistema.

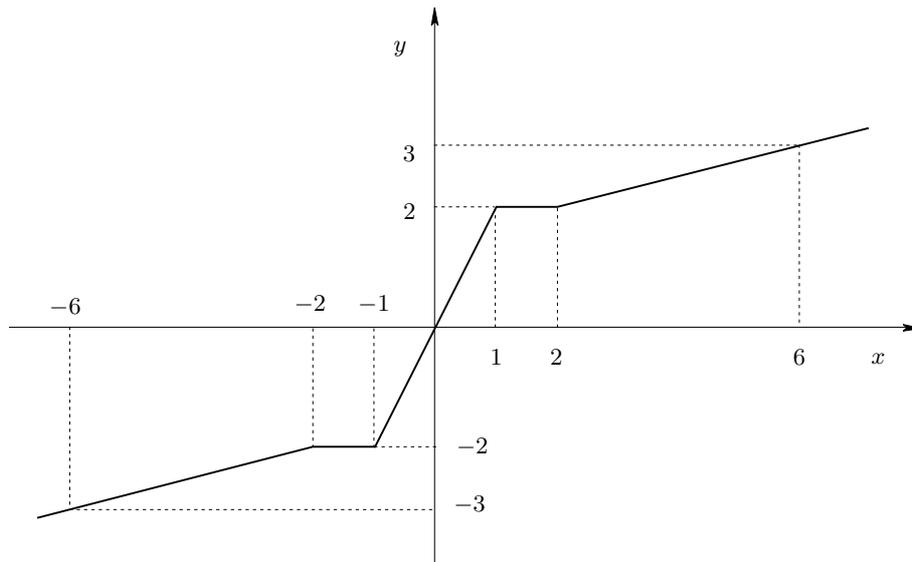


Fig. 2: Caratteristica dell'elemento non lineare.

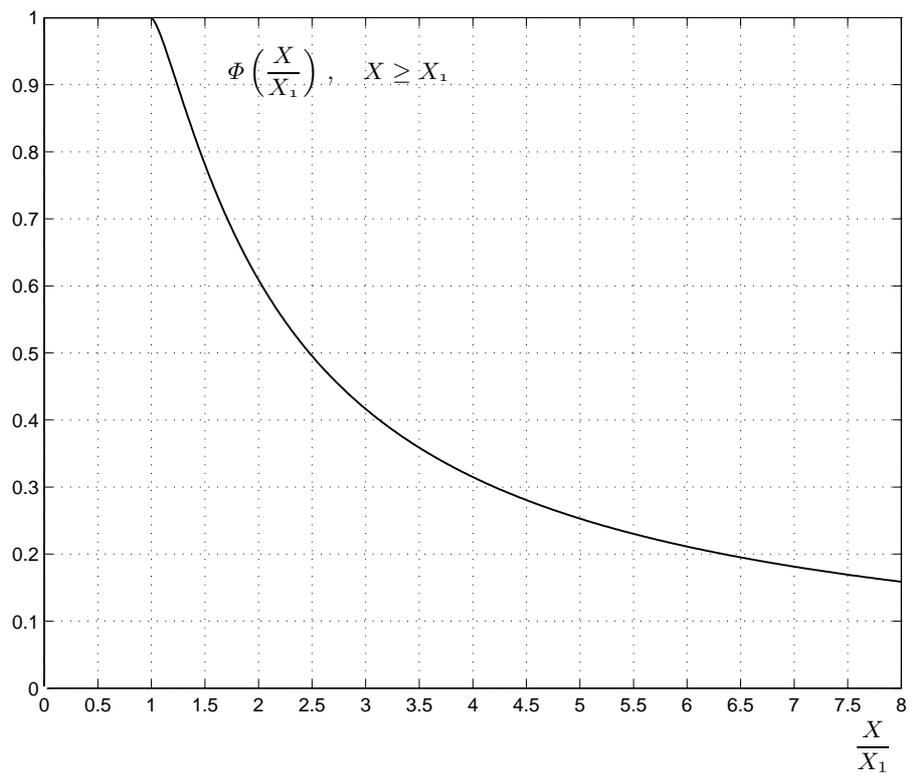


Fig. 3: Diagramma della funzione descrittiva della saturazione (pendenza unitaria del tratto lineare).

Soluzione

a) Errore a regime nella risposta alla rampa unitaria:

$$e_{\infty} = \frac{1}{K_v}, \quad K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G(s) = 2K,$$

Quindi,

$$e_{\infty} = \frac{1}{2K} = 0.1, \quad \Rightarrow \quad K = 5.$$

b) Equazione caratteristica:

$$1 + \frac{200K}{s(s^2 + 16s + 100)} = 0 \quad \Rightarrow \quad s^3 + 16s^2 + 100s + 200K = 0.$$

Tabella di Routh:

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 100 \\ 2 & 16 & 200K \\ 1 & 200(8-K) & 0 \\ 0 & 40000K(8-K) & \end{array}$$

Condizioni ricavate dalla tabella di Routh:

$$(8 - K > 0 \text{ and } K > 0) \quad \Rightarrow \quad 0 < K < 8.$$

c) Funzione guadagno d'anello (in forma fattorizzata):

$$G_a(s) = \frac{1000}{s(s^2 + 16s + 100)}.$$

Funzione guadagno d'anello (in forma con costanti di tempo):

$$G_a(s) = \frac{10}{s \left(1 + \frac{16}{100}s + \frac{1}{100}s^2\right)} = \frac{10}{s \left(1 + 2 \cdot 0.8 \frac{s}{10} + \left(\frac{s}{10}\right)^2\right)}.$$

Pulsazioni alle quali si ha una variazione di pendenza del diagramma asintotico delle ampiezze:

$$\omega_n = 10 \Leftrightarrow p_{1,2} = -8 \pm 6j.$$

Posizionamento verticale del diagramma asintotico delle ampiezze:

$$\alpha(\bar{\omega}) = \frac{|s^h G(s)|_{s=0}}{\bar{\omega}^h} = 10 = 20 \text{ db},$$

essendo $h = 1$ ed avendo considerato $\bar{\omega} = 1$. Fase iniziale:

$$\varphi_0 = -h \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}.$$

La coppia di poli complessi coniugati stabile introduce uno sfasamento complessivo, per ω che va da 0 a ∞ , di ampiezza π e di segno negativo. Il rapporto fra le pulsazioni ω_a e ω_b alle quali il raccordo incontra gli asintoti e la pulsazione naturale ω_n è dato da

$$\frac{\omega_n}{\omega_a} = \frac{\omega_b}{\omega_n} = 4.81^\delta = 4.81^{0.8} = 3.5133.$$

Sul diagramma delle ampiezze si legge un valore di prima approssimazione della pulsazione di incrocio, $\omega_{(I)}^* = 8 \text{ rad/sec}$; corrispondentemente si calcola $|G(j8)| = 0.9401 < 1$. Si procede ad esempio scegliendo $\omega_{(II)}^* = 7 \text{ rad/sec}$ e si calcola $|G(j7)| = 1.1608 > 1$. Si itera il procedimento, scegliendo ad esempio $\omega_{(III)}^* = 7.8 \text{ rad/sec}$ e si calcola $|G(j7.8)| = 0.9802 < 1$ e, con $\omega_{(IV)}^* = 7.7 \text{ rad/sec}$, si ottiene infine $|G(j7.7)| = 1.0009 \approx 1$, per cui si può assumere $\omega^* = 7.7 \text{ rad/sec}$. Si trova quindi $\angle G(j\omega^*) = \angle G(j7.7) = -2.8224 \text{ rad} = -161.7145^\circ$, da cui

$$M_F = -161.7145^\circ + 180^\circ = 18.2855^\circ.$$

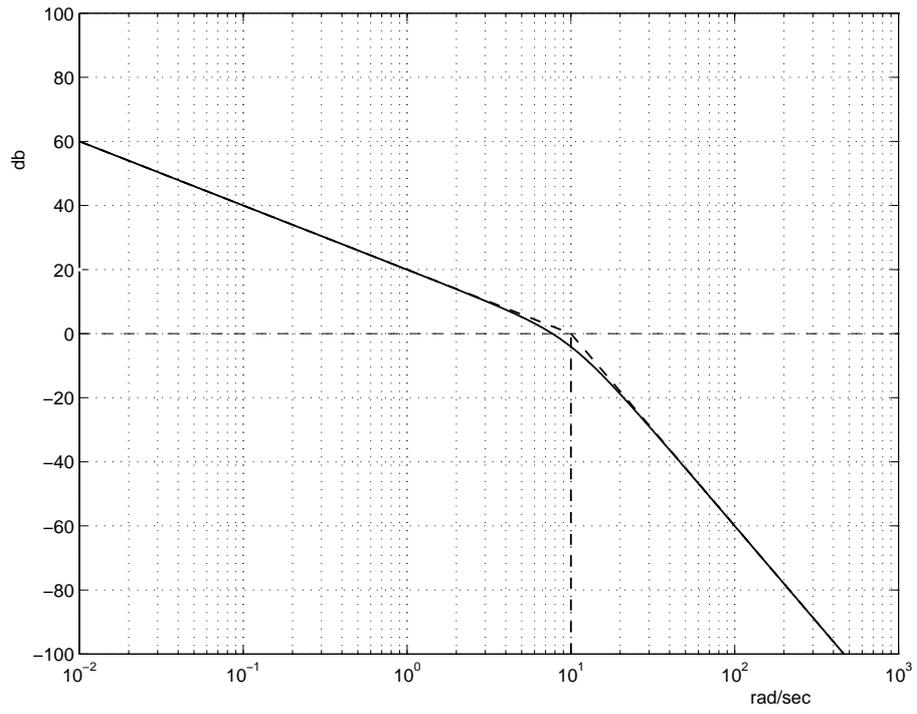


Fig. 4: Diagramma di Bode delle ampiezze.

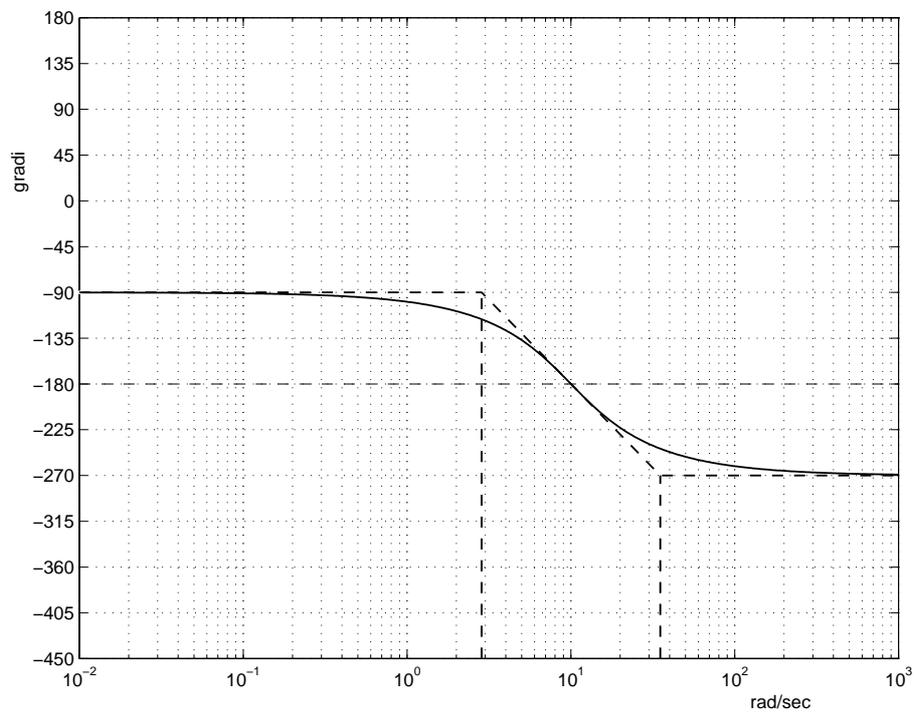


Fig. 5: Diagramma di Bode delle fasi.

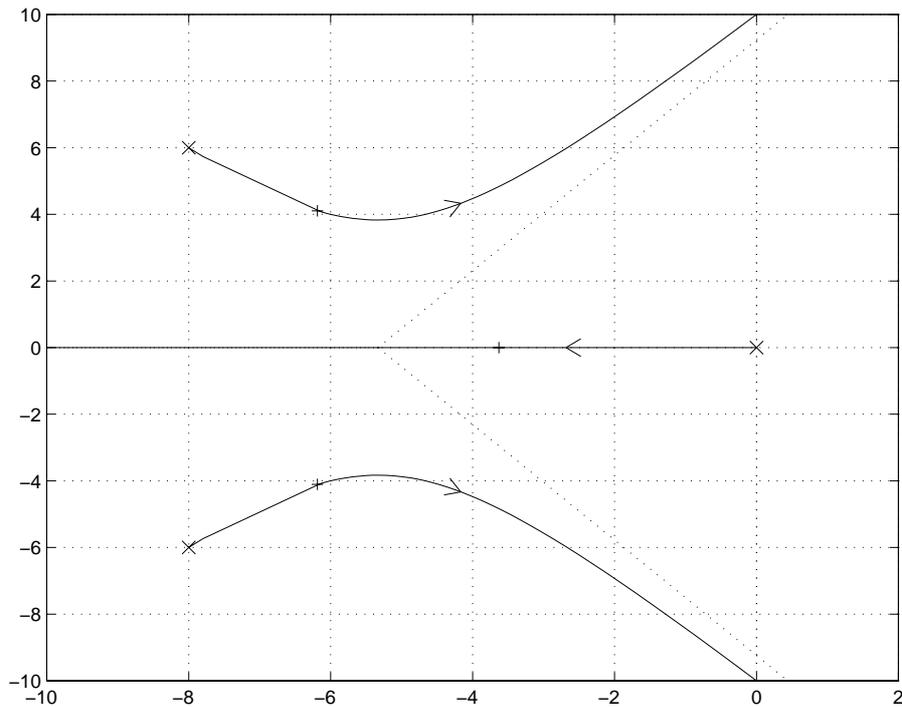


Fig. 6: Luogo delle radici.

d) Funzione di trasferimento della catena diretta:

$$G(s) = \frac{200}{s(s^2 + 16s + 100)}.$$

Poli e zeri:

$$p_1 = 0, \quad p_{2,3} = -8 \pm 6j \quad \Rightarrow \quad n = 3 \text{ rami e } n = 3 \text{ asintoti.}$$

Punti dell'asse reale che appartengono al luogo:

$$[-\infty \ 0].$$

Centro stella degli asintoti:

$$\sigma_a = \frac{1}{3}(-8 + 6j - 8 - 6j) = -5.3333.$$

Angoli formati dagli asintoti con l'asse reale:

$$\vartheta_{a,0} = \frac{\pi}{3}, \quad \vartheta_{a,1} = \pi, \quad \vartheta_{a,2} = \frac{5\pi}{3}.$$

Angolo con cui il luogo lascia il polo p_2 :

$$\vartheta_\nu = (2\nu + 1)\pi - \angle(-8 + 6j) - \angle(-8 + 6j + 8 + 6j) = (2\nu + 1)\pi - \arctan\left(\frac{6}{-8}\right) - \frac{\pi}{2} = (2\nu + 1)\pi - 2.4981 - \frac{\pi}{2},$$

da cui

$$\vartheta_0 = -0.9273 \text{ rad} = -53.1306^\circ.$$

Il luogo delle radici è rappresentato in Fig.6.

e) Equazione caratteristica del sistema in retroazione:

$$1 + \frac{1000(1 + \tau s)}{s(s^2 + 16s + 100)} = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 + \tau \frac{1000s}{s^3 + 16s^2 + 100s + 1000} = 0.$$

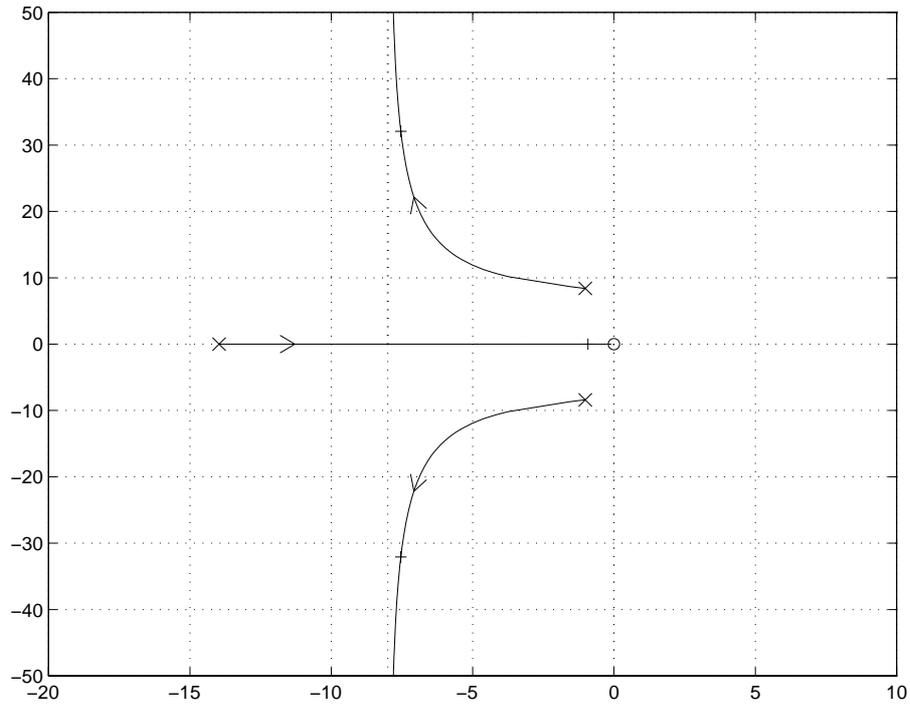


Fig. 7: Contorno delle radici.

Poli e zeri:

$$p_1 = -13.96, \quad p_{2,3} = -1.02 \pm 8.4j, \quad z_1 = 0, \quad \Rightarrow n = 3 \text{ rami e } n - m = 2 \text{ asintoti.}$$

Punti dell'asse reale che appartengono al contorno:

$$[-13.96 \quad 0].$$

Il contorno presenta $n - m = 3 - 1 = 2$ asintoti. Centro stella degli asintoti:

$$\sigma_a = \frac{1}{2} (-13.96 - 2 \cdot 1.02) = -8.$$

Angoli formati dagli asintoti con l'asse reale:

$$\vartheta_{a,0} = \frac{\pi}{2}, \quad \vartheta_{a,1} = \frac{3\pi}{2}.$$

Angolo con cui il contorno lascia il polo p_2 :

$$\begin{aligned} \vartheta_{2,\nu} &= (2\nu + 1)\pi + \angle(-1.02 + 8.4j) - \angle(-1.02 + 8.4j + 13.96) - \angle(-1.02 + 8.4j + 1.02 + 8.4j) \\ &= (2\nu + 1)\pi + 1.6918 - 0.5758 - 1.5708 \\ &= (2\nu + 1)\pi - 0.4548, \end{aligned}$$

da cui, ad esempio,

$$\vartheta_{2,0} = 2.6868 = 153.9419^\circ.$$

Il contorno delle radici è rappresentato in Fig.7.

L'ascissa dei tre poli allineati si calcola applicando il teorema del baricentro del luogo delle radici:

$$3\sigma_0 = -13.96 - 2 \cdot 1.02 \quad \Rightarrow \quad \sigma_0 = -5.3333.$$

Il valore di τ per il quale i tre poli presentano la stessa ascissa si calcola risolvendo in τ l'equazione caratteristica scritta per $s = \sigma_0$, cioè

$$1 + \tau \frac{1000s}{s^3 + 16s^2 + 100s + 1000} \Big|_{s=\sigma_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 - 6.926\tau = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau = 0.1444.$$

Infine, il minimo del tempo di assestamento è

$$T_{a,\min} = \frac{3}{|\sigma_0|} = \frac{3}{5.3333} = 0.5625.$$

f) Funzione guadagno d'anello (in forma fattorizzata):

$$G(s) = \frac{1000}{s(s^2 + 16s + 100)}.$$

Funzione guadagno d'anello (in forma con costanti di tempo):

$$G(s) = \frac{10}{s \left(1 + \frac{16}{100}s + \frac{1}{100}s^2 \right)}.$$

Comportamento per valori piccoli di ω :

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow 0^+} |G(j\omega)| &= \infty, \\ \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \angle G(j\omega) &= -\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Ascissa dell'asintoto parallelo all'asse verticale:

$$\sigma_a = -10 \cdot \frac{16}{100} = -1.6.$$

Comportamento per $\omega \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow \infty} |G(j\omega)| &= 0, \\ \lim_{\omega \rightarrow \infty} \angle G(j\omega) &= (m-n)\frac{\pi}{2} = -\frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$

Per il calcolo dell'intersezione con il semiasse reale negativo si procede nel modo indicato di seguito. Equazione caratteristica:

$$1 + K \frac{1000}{s(s^2 + 16s + 100)} = 0 \quad \Rightarrow \quad s^3 + 16s^2 + 100s + 1000K = 0.$$

Tabella di Routh:

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 100 \\ 2 & 16 & 1000K \\ 1 & 200(8-5K) & 0 \\ 0 & 200000K(8-5K) & \end{array}$$

Condizioni ricavate dalla tabella di Routh:

$$(8 - 5K > 0 \text{ and } K > 0) \quad \Rightarrow \quad 0 < K < \frac{8}{5} \quad \Rightarrow \quad K^* = \frac{8}{5}.$$

Ascissa dell'intersezione con il semiasse reale negativo:

$$\sigma_0 = -\frac{1}{K^*} = -\frac{5}{8} = -0.625.$$

Pulsazione dell'intersezione con il semiasse reale negativo:

$$16s^2 + 1000 \cdot \frac{8}{5} = 0 \quad \Rightarrow \quad s^2 + 100 = 0 \quad \Rightarrow \quad s = \pm 10j \quad \Rightarrow \quad \omega^* = 10 \text{ rad/sec}.$$

Il diagramma di Nyquist è mostrato in Fig.8.

g) Il punto di lavoro del sistema si ottiene intersecando la caratteristica dell'elemento non lineare con la retta $y=0$ e coincide perciò con l'origine. Determinazione qualitativa dell'andamento di $F(X)$:

$$\begin{aligned} F(X) &\longrightarrow 2 && \text{per } X \rightarrow 0^+, \\ F(X) &\longrightarrow 0.25 && \text{per } X \rightarrow \infty, \\ F(X) &= 2 && \text{per } 0 < X < 1. \end{aligned}$$

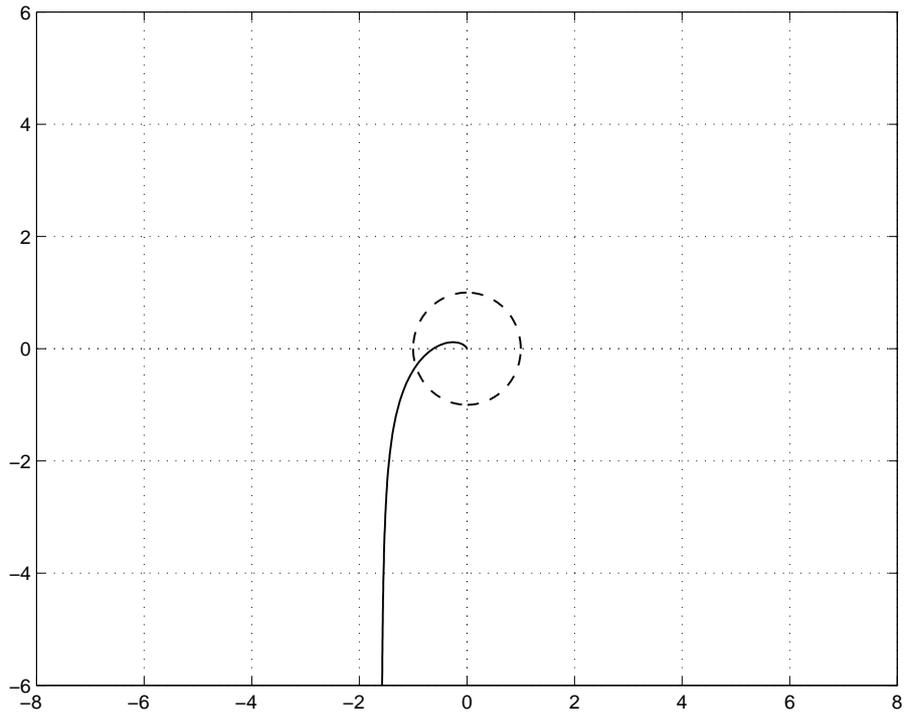


Fig. 8: Diagramma di Nyquist.

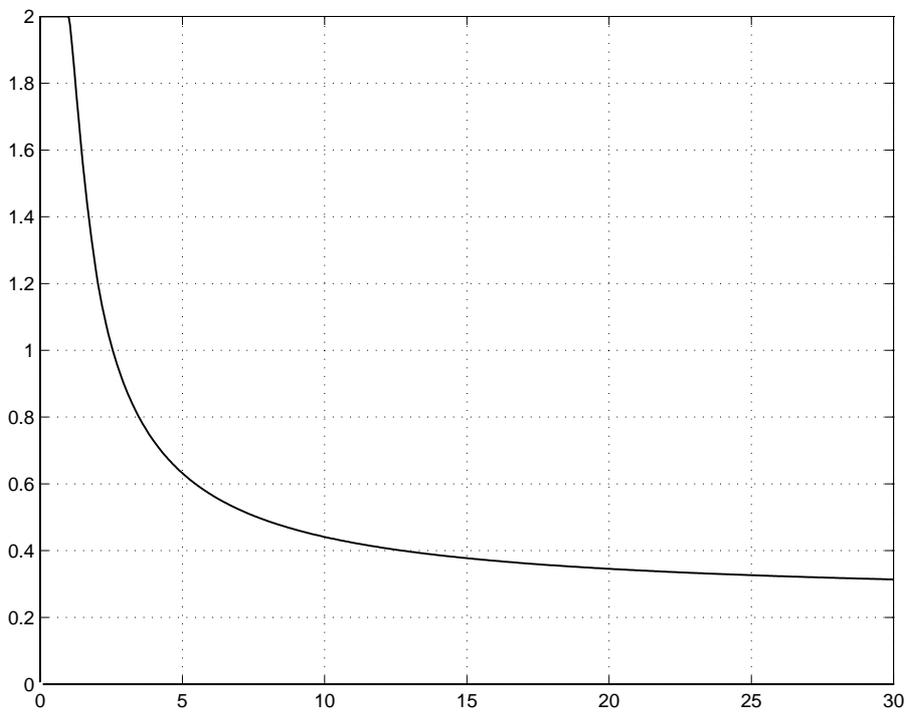


Fig. 9: Funzione descrittiva.

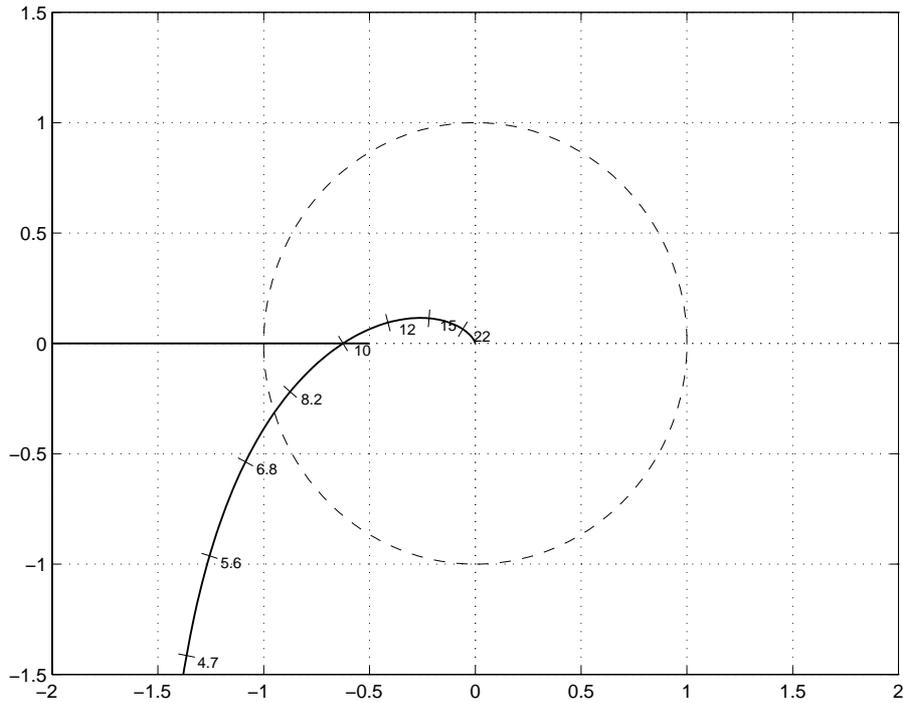


Fig. 10: Verifica dell'esistenza di oscillazioni autosostenute.

L'andamento qualitativo di $F(X)$ è mostrato in Fig.9. Determinazione qualitativa del grafico di $-\frac{1}{F(X)}$:

$$-\frac{1}{F(X)} \rightarrow -0.5 \quad \text{per} \quad X \rightarrow 0^+,$$

$$-\frac{1}{F(X)} \rightarrow -4 \quad \text{per} \quad X \rightarrow \infty.$$

La costruzione grafica per verificare l'esistenza di eventuali oscillazioni autosostenute è mostrata in Fig.10. Poiché esiste un'intersezione tra i diagrammi polari di $G(j\omega)$ e di $-1/F(X)$, il sistema è sede di un'oscillazione autosostenuta. La pulsazione dell'oscillazione autosostenuta è la pulsazione $\omega^* = 10$ rad/sec calcolata al punto f) come la pulsazione alla quale il diagramma di Nyquist della $G(j\omega)$ interseca l'asse reale. L'ascissa dell'intersezione è stata anch'essa calcolata al punto f) ed è data da $\sigma_0 = -0.625$. Dunque, in corrispondenza dell'intersezione è

$$-\frac{1}{F(X)} = -0.625 \Rightarrow F(X) = 1.6.$$

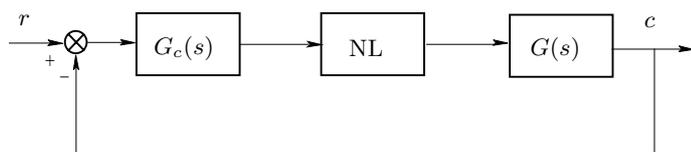
Nel caso specifico, la pendenza del tratto lineare della caratteristica della saturazione è $m=2$. Com'è noto, il diagramma della specifica $F(X)$ si ottiene moltiplicando per $m=2$ il diagramma (Fig.3) della funzione descrittiva della saturazione con pendenza unitaria del tratto lineare della caratteristica. Per determinare l'ampiezza X dell'oscillazione all'ingresso della saturazione si legge nel grafico di Fig.3 il valore dell'ascissa X/X_1 corrispondente al valore dell'ordinata

$$\frac{F(X)}{m} = \frac{1.6}{2} = 0.8,$$

si legge cioè $X/X_1 \cong 1.45$. Essendo nel caso specifico $X_1 = 1$, risulta $X \cong 1.45$.

Prova scritta di Controlli Automatici # 2

Si consideri il sistema in retroazione rappresentato in Fig.1.



$$G(s) = \frac{400}{(s+1)(s+2)(s+20)}.$$

Fig. 1: Sistema in retroazione.

- a) Assumendo $G_c(s) = 1$ e il blocco NL costituito da un guadagno unitario, si determini il margine di ampiezza del sistema.
- b) Assumendo $G_c(s) = 1$ e il blocco NL costituito da un guadagno unitario, si traccino i diagrammi asintotici di Bode (delle ampiezze e delle fasi) della funzione guadagno d'anello del sistema.
- c) Assumendo il blocco NL costituito da un guadagno unitario, si progetti analiticamente un regolatore $G_c(s)$ di tipo 1 tale da garantire al sistema in retroazione un tempo di ritardo $t_r \leq 0.25$ sec e un errore a regime nella risposta alla rampa unitaria $e_r \leq 0.2$. A questo scopo si suggerisce di utilizzare come funzione di trasferimento campione quella di un filtro di Butterworth opportunamente scelto (tabelle e grafici relativi sono allegati).
- d) Assumendo che il blocco $G_c(s)$ sia il regolatore progettato al punto c) e che il blocco NL sia costituito da un guadagno unitario, si tracci il diagramma di Nyquist della funzione guadagno d'anello del sistema.
- e) Assumendo che il blocco $G_c(s)$ sia il regolatore progettato al punto c) e che il blocco NL sia costituito da un relé ideale di ampiezza $Y_1 = 10$, si determini la pulsazione ω^* dell'oscillazione autosostenuta presente nel sistema con $r = 0$. Si determinino inoltre l'ampiezza della sinusoide all'ingresso del relé e l'ampiezza della fondamentale all'uscita del sistema.
- f) Si modifichi la funzione di trasferimento del regolatore $G_c(s)$ in modo tale che l'oscillazione autosostenuta presente nel sistema nelle condizioni descritte al punto e) risulti avere pulsazione $3\omega^*$.
- g) Si determini l'attenuazione, espressa in db, della fondamentale all'uscita del sistema alla pulsazione $3\omega^*$ rispetto a quella alla pulsazione ω^* .

ordine	α_8	α_7	α_6	α_5	α_4	α_3	α_2	α_1	α_0
1								1	1
2							1	1,414	1
3						1	2	2	1
4					1	2,613	3,414	2,613	1
5				1	3,236	5,236	5,236	3,236	1
6			1	3,864	7,464	9,142	7,464	3,864	1
7		1	4,494	10,10	14,60	14,60	10,10	4,494	1
8	1	5,126	13,14	21,85	25,69	21,85	13,14	5,126	1

Tab. 1: Tabella dei coefficienti dei filtri di Butterworth di ordine da 1 a 8.

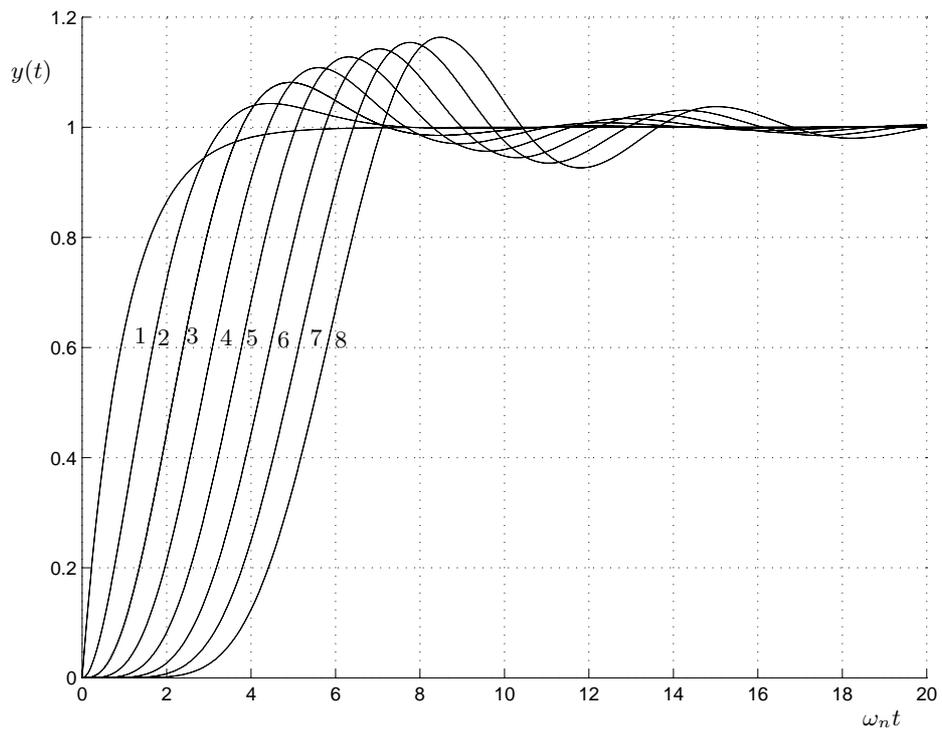


Fig. 2: Risposte al gradino dei filtri di Butterworth di ordine da 1 a 8.

Soluzione

a) Equazione caratteristica:

$$1 + K \frac{400}{(s+1)(s+2)(s+20)} = 0 \quad \Rightarrow \quad s^3 + 23s^2 + 62s + 40(1+10K) = 0.$$

Tabella di Routh:

$$\begin{array}{c|ccc} 3 & 1 & 62 & \\ 2 & 23 & 40(1+10K) & \\ 1 & 1386-400K & 0 & \\ 0 & 40(1+10K)(1386-400K) & & \end{array}$$

Condizioni ricavate dalla tabella di Routh:

$$(1386 - 400K > 0 \text{ and } 1 + 10K > 0) \quad \Rightarrow \quad -0.1 < K < 3.4650.$$

Margine di ampiezza:

$$M_A = 3.4650.$$

b) Funzione guadagno d'anello (in forma fattorizzata):

$$G(s) = \frac{400}{(s+1)(s+2)(s+20)}.$$

Funzione guadagno d'anello (in forma con costanti di tempo):

$$G(s) = \frac{10}{(1+s)(1+0.5s)(1+0.05s)}.$$

Pulsazioni alle quali si ha una variazione di pendenza del diagramma asintotico delle ampiezze:

$$\begin{aligned} \omega_1 = 1 & \Leftrightarrow p_1 = -1, \\ \omega_2 = 2 & \Leftrightarrow p_2 = -2, \\ \omega_3 = 20 & \Leftrightarrow p_3 = -20. \end{aligned}$$

Posizionamento verticale del diagramma asintotico delle ampiezze:

$$G(0) = 10 = 20 \text{ db},$$

essendo $h = 0$. Fase iniziale:

$$\varphi_0 = 0.$$

Ciascun polo (reale e stabile) introduce uno sfasamento complessivo, per ω che va da 0 a ∞ , di ampiezza $\pi/2$ e di segno negativo. I diagrammi di Bode sono riportati in Fig.3 e in Fig.4.

c) La condizione di realizzabilità fisica impone di scegliere una funzione di trasferimento campione con grado relativo almeno uguale a tre. Tenendo conto del suggerimento di utilizzare come funzione di trasferimento campione quella di un filtro di Butterworth, e del fatto che conviene comunque scegliere un filtro del minimo ordine possibile, si sceglie appunto un filtro del terzo ordine.

La condizione sul comportamento a regime nella risposta al gradino impone che i polinomi a numeratore e a denominatore della funzione di trasferimento campione abbiano i termini noti uguali fra loro. I coefficienti del polinomio a denominatore del filtro di Butterworth soddisfano questa condizione.

Condizione sul tempo di ritardo: nel grafico relativo alla risposta al gradino unitario del filtro di Butterworth del terzo ordine con banda unitaria si legge

$$\omega_n t_r = 2.13;$$

imponendo

$$t_r \leq 0.25 \text{ sec},$$

si ricava

$$\omega_n \geq 8.52 \text{ rad/sec}.$$

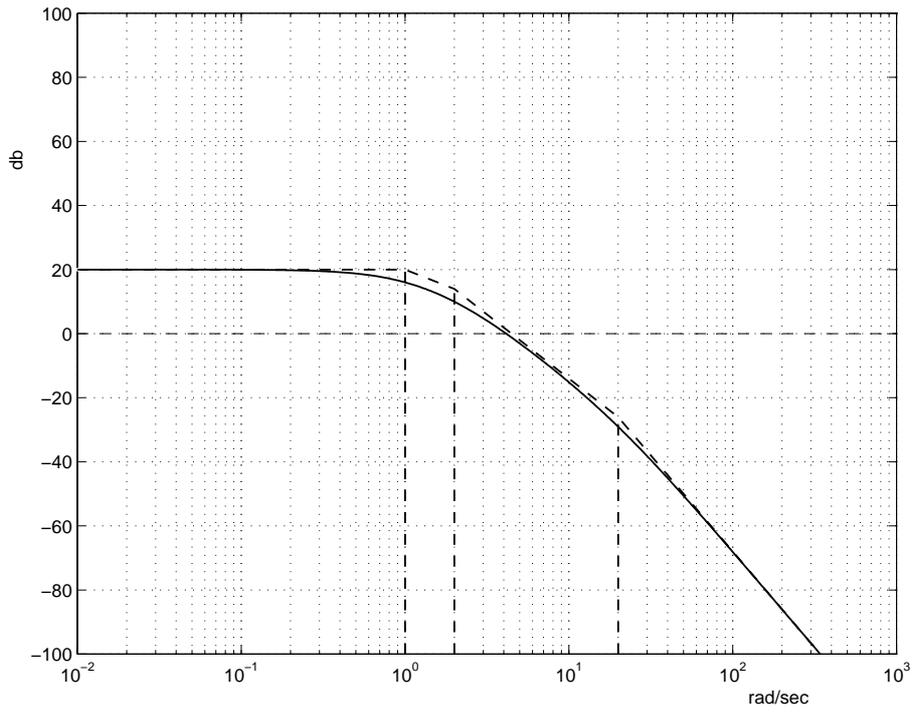


Fig. 3: Diagramma di Bode delle ampiezze della funzione guadagno d'anello.

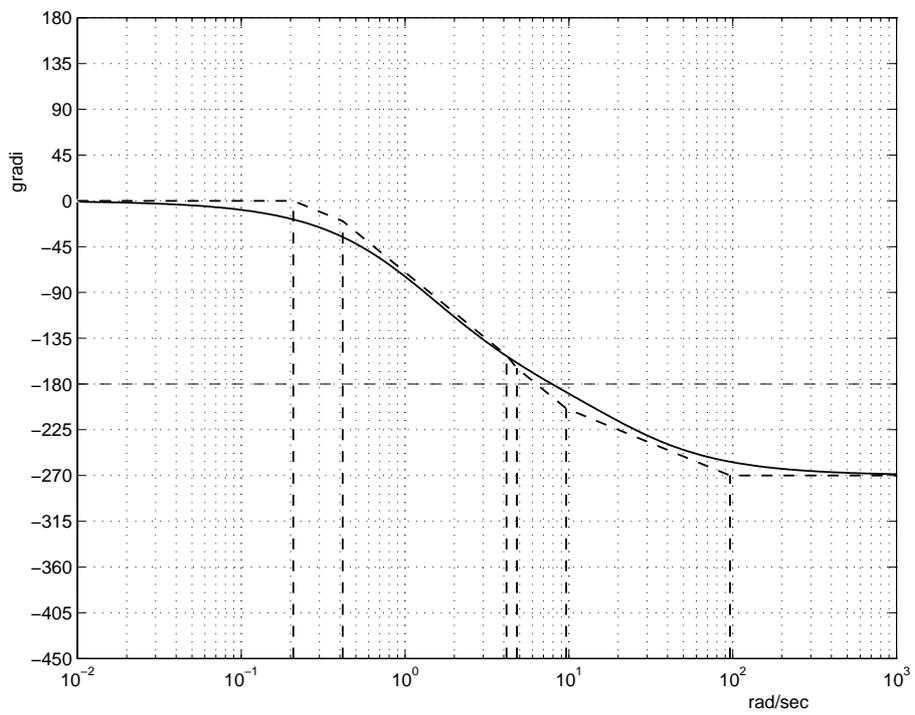


Fig. 4: Diagramma di Bode delle fasi della funzione guadagno d'anello.

Condizione sul comportamento a regime nella risposta alla rampa unitaria:

$$e_r = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s^2} [1 - G_0(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{s^2} \cdot \frac{\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^3 + 2\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + 2\left(\frac{s}{\omega_n}\right)}{\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^3 + 2\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + 2\left(\frac{s}{\omega_n}\right) + 1} = \frac{2}{\omega_n};$$

imponendo

$$e_r = \frac{2}{\omega_n} \leq 0.2,$$

si ottiene

$$\omega_n \geq 10 \text{ rad/sec.}$$

La pulsazione

$$\omega_n = 10 \text{ rad/sec}$$

consente di soddisfare sia la specifica sul tempo di ritardo sia quella sull'errore a regime nella risposta al gradino unitario. Dunque la funzione di trasferimento campione è

$$G_0(s) = \frac{1}{\left(\frac{s}{10}\right)^3 + 2\left(\frac{s}{10}\right)^2 + 2\left(\frac{s}{10}\right) + 1} = \frac{1000}{s^3 + 20s^2 + 200s + 1000}.$$

La funzione di trasferimento del regolatore è

$$G_c(s) = \frac{G_0(s)}{1 - G_0(s)} \cdot \frac{1}{G(s)} = \frac{2.5(s+1)(s+2)(s+20)}{s(s^2 + 20s + 200)}.$$

d) Funzione guadagno d'anello:

$$G_l(s) = \frac{G_0(s)}{1 - G_0(s)} = \frac{1000}{s(s^2 + 20s + 200)} = \frac{5}{s(1 + 0.1s + 0.005s^2)}.$$

Comportamento per $\omega \rightarrow 0^+$:

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow 0^+} |G_l(j\omega)| &= \infty, \\ \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \angle G_l(j\omega) &= -\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Ascissa dell'asintoto parallelo all'asse immaginario:

$$\sigma_a = -5 \cdot 0.1 = -0.5.$$

Comportamento per $\omega \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow \infty} |G_l(j\omega)| &= 0, \\ \lim_{\omega \rightarrow \infty} \angle G_l(j\omega) &= -\frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$

Per il calcolo della intersezione con il semiasse reale negativo si procede nel modo indicato di seguito. Equazione caratteristica:

$$1 + K \frac{1000}{s(s^2 + 20s + 200)} = 0 \quad \Rightarrow \quad s^3 + 20s^2 + 200s + 1000K = 0.$$

Tabella di Routh:

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 200 \\ 2 & 20 & 1000K \\ 1 & 1000(4-K) & 0 \\ 0 & 10^6 K(4-K) & \end{array}$$

Condizioni ricavate dalla tabella di Routh:

$$(4 - K > 0 \text{ and } K > 0) \quad \Rightarrow \quad 0 < K < 4 \quad \Rightarrow \quad K^* = 4.$$

Ascissa dell'intersezione con il semiasse reale negativo:

$$\sigma_0 = -\frac{1}{K^*} = -\frac{1}{4} = -0.25.$$

Pulsazione dell'intersezione con il semiasse reale negativo:

$$20s^2 + 1000 \cdot 4 = 0 \Rightarrow s^2 + 200 = 0 \Rightarrow s = \pm j\sqrt{200} = \pm j14.1421 \Rightarrow \omega^* = 14.1421 \text{ rad/sec}.$$

Il diagramma di Nyquist della funzione guadagno d'anello è mostrato in Fig.5.

e) Funzione descrittiva $F(X)$ del relé ideale di ampiezza $Y_1 = 10$:

$$F(X) = \frac{4Y_1}{\pi X} = \frac{40}{\pi X}.$$

La costruzione grafica per verificare l'esistenza di eventuali oscillazioni autosostenute è mostrato in Fig.5 La pulsazione dell'oscillazione autosostenuta coincide con la pulsazione $\omega^* = 14.1421 \text{ rad/sec}$ determinata al punto d). Ampiezza della sinusoide all'ingresso del relé:

$$-\frac{1}{F(X)} = -0.25 \Rightarrow \frac{\pi X}{40} = -0.25 \Rightarrow X = 3.182.$$

Ampiezza della fondamentale all'uscita del sistema:

$$\frac{4Y_1}{\pi} |G(j\omega^*)| = \frac{40}{\pi} 0.08064 = 1.0267.$$

f) Funzione di trasferimento campione modificata:

$$G_0(s) = \frac{1}{\left(\frac{s}{30}\right)^3 + 2\left(\frac{s}{30}\right)^2 + 2\left(\frac{s}{30}\right) + 1} = \frac{2.7 \cdot 10^4}{s^3 + 60s^2 + 1800s + 2.7 \cdot 10^4}.$$

Nuova funzione guadagno d'anello:

$$G_l(s) = \frac{G_0(s)}{1 - G_0(s)} = \frac{2.7 \cdot 10^4}{s^3 + 60s^2 + 1800s}.$$

Nuova tabella di Routh:

3	1	1800
2	60	$2.7 \cdot 10^4 K$
1	$10^4(10.8 - 2.7K)$	0
0	$2.7 \cdot 10^8 K(10.8 - 2.7K)$	

Condizioni ricavate dalla tabella di Routh:

$$(10.8 - 2.7K > 0 \text{ and } K > 0) \Rightarrow 0 < K < 4 \Rightarrow K^* = 4.$$

Pulsazione della nuova oscillazione autosostenuta:

$$60s^2 + 10.8 \cdot 10^4 = 0 \Rightarrow s^2 + 1800 = 0 \Rightarrow s = \pm j\sqrt{1800} = \pm j42.4264 \Rightarrow \omega = 42.4264 \text{ rad/sec} = 3\omega^*.$$

Nuova funzione di trasferimento del regolatore:

$$G_c(s) = \frac{G_0(s)}{1 - G_0(s)} \cdot \frac{1}{G(s)} = \frac{67.5(s+1)(s+2)(s+20)}{s^3 + 60s^2 + 1800s}.$$

g) Attenuazione in db:

$$20 \log \frac{|G(3j\omega^*)|}{|G(j\omega^*)|} = 20 \log \frac{0.004731}{0.08064} = -24.6320 \text{ db}.$$

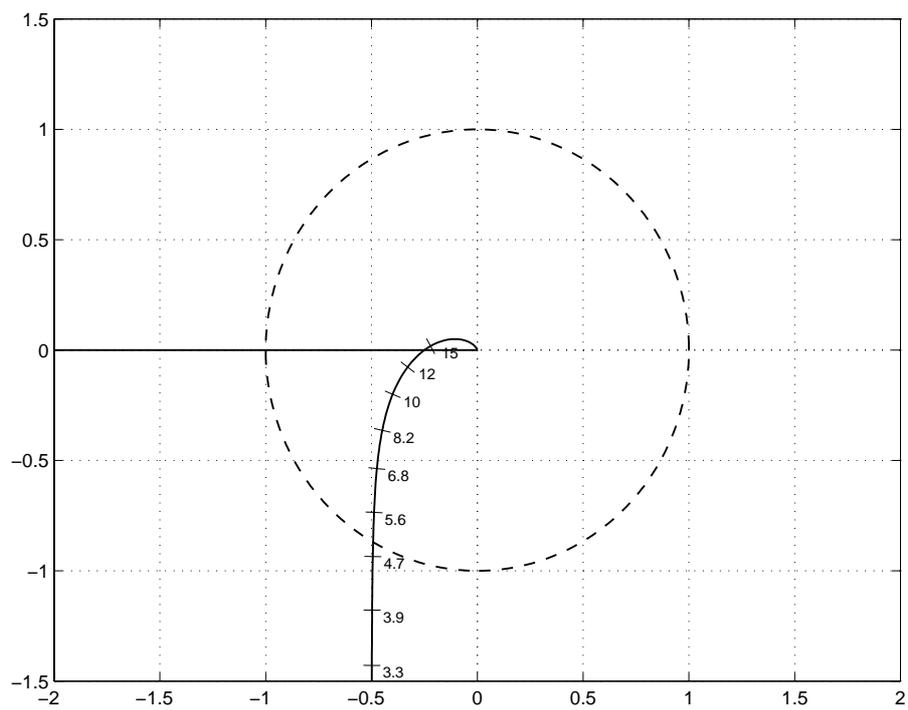
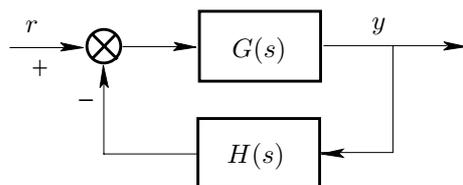


Fig. 5: Oscillazioni autosostenute.

Prova scritta di Controlli Automatici # 3

Si consideri il sistema in retroazione rappresentato in Fig.1.



$$G(s) = \frac{K(s+4)}{s(s-1)(s-10)},$$

$$H(s) = s+4.$$

Fig. 1: Sistema in retroazione.

- Si determini l'intervallo di valori del parametro K per i quali il sistema è stabile.
- Assumendo che l'errore a regime riferito all'ingresso sia definito dalla relazione

$$e_i(t) = \frac{K_c r(t) - y(t)}{K_c},$$

con K_c uguale all'inverso del guadagno statico del blocco di retroazione, si determini l'espressione (funzione del parametro K) dell'errore a regime riferito all'ingresso nella risposta alla rampa $r(t) = 16t$.

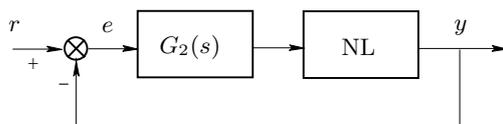
c) Assumendo $K = 20$, si tracci qualitativamente il diagramma di Nyquist completo della funzione guadagno d'anello. Si calcolino, in particolare, l'ascissa σ_a dell'asintoto verticale e l'intersezione σ_1 del diagramma con il semiasse reale negativo. Si dica se il sistema in retroazione è, o meno, stabile.

d) Assumendo $K = 20$, si traccino qualitativamente i diagrammi di Bode asintotici delle ampiezze e delle fasi della funzione guadagno d'anello.

e) Si tracci qualitativamente il luogo delle radici della funzione guadagno d'anello al variare del parametro $K > 0$. Si individui, solo qualitativamente, la posizione dei punti di diramazione. Si calcoli il valore del parametro K per il quale il sistema in retroazione presenta una coppia di poli complessi coniugati alla quale corrisponde il tempo di assestamento $T_a = 3$ sec.

f) Dato il sistema con funzione di trasferimento $G_1(s) = \frac{10}{s(s+10)}$, si calcolino i valori dei parametri α e τ di una rete anticipatrice tale da imporre al sistema in retroazione il margine di fase $M_f = 60^\circ$ alla pulsazione $\omega = 10$ rad/sec. A questo scopo si utilizzino le formule di inversione¹.

g) Si consideri il sistema in retroazione rappresentato in Fig.2, il cui elemento non lineare NL è definito dalla caratteristica riportata in Fig.3. Utilizzando il criterio del cerchio, si analizzi la stabilità asintotica del punto di lavoro (x_0, y_0) corrispondente all'ingresso costante $r = 2$.



$$G_2(s) = \frac{2}{s(s+2)}.$$

Fig. 2: Sistema non lineare in retroazione.

¹Si ricorda che valgono le relazioni:

$$\alpha = \frac{M \cos \varphi - 1}{M(M - \cos \varphi)}, \quad \omega \tau = \frac{M - \cos \varphi}{\sin \varphi}.$$

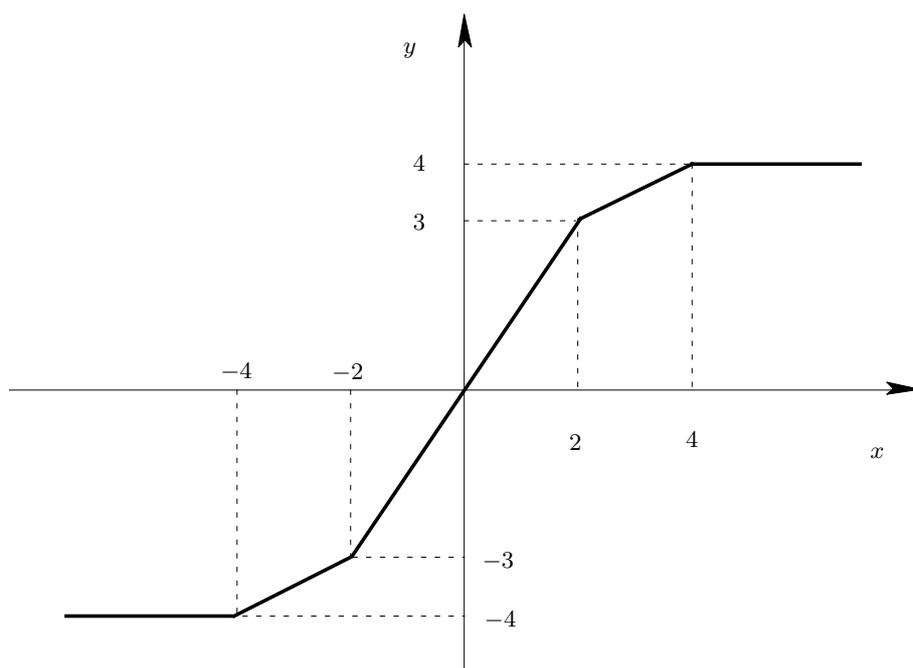


Fig. 3: Caratteristica dell'elemento non lineare.

Soluzione

a) Equazione caratteristica:

$$1 + K \frac{(s+4)^2}{s(s-1)(s-10)} = 0 \quad \Rightarrow \quad s^3 + (K-11)s^2 + (8K+10)s + 16K = 0.$$

Tabella di Routh:

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 8K+10 \\ 2 & K-11 & 16K \\ 1 & 8K^2-94K-110 & 0 \\ 0 & 16K(8K^2-94K-110) & \end{array}$$

Condizioni ricavate dalla tabella di Routh:

$$(K > 11 \text{ and } K > 0 \text{ and } K > 12.8224) \quad \Rightarrow \quad K > K^* = 12.8224.$$

b) Per definizione, per K_c si ha

$$K_c = \frac{1}{H(0)} = \frac{1}{4}.$$

La funzione di trasferimento della catena di amplificazione diretta del sistema equivalente con retroazione unitaria è

$$G_{eq}(s) = \frac{G(s)}{K_c + G(s)[K_c H(s) - 1]}.$$

La costante di velocità K_v risulta:

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G_{eq}(s) = \frac{8K}{5+2K}.$$

L'errore a regime (riferito all'ingresso) nella risposta alla rampa $r(t) = 16t$ è

$$e_{i,r} = 16 \frac{1}{K_v} = 16 \frac{5+2K}{8K} = 4 + \frac{10}{K}.$$

c) Funzione guadagno d'anello (in forma fattorizzata):

$$G_l(s) = \frac{20(s+4)^2}{s(s-1)(s-10)}.$$

Funzione guadagno d'anello (nella forma con costanti di tempo):

$$G_l(s) = 32 \frac{(1+0.25s)^2}{s(1-s)(1-0.1s)}.$$

Comportamento per $\omega \rightarrow 0^+$:

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow 0^+} |G_l(j\omega)| &= \infty, \\ \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \angle G_l(j\omega) &= -\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Ascissa dell'asintoto parallelo all'asse immaginario:

$$\sigma_a = 32(0.25 \cdot 2 + 1 + 0.1) = 51.2.$$

Comportamento per $\omega \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow \infty} |G_l(j\omega)| &= 0, \\ \lim_{\omega \rightarrow \infty} \angle G_l(j\omega) &= -\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

L'intersezione con il semiasse reale negativo si determina sfruttando l'analisi di stabilità effettuata al punto a).
Risulta

$$\sigma_1 = -\frac{20}{K^*} = -1.5598.$$

Il diagramma di Nyquist della funzione guadagno d'anello è mostrato in Fig.4. Il diagramma di Nyquist completo della funzione guadagno d'anello circonda due volte in senso antiorario il punto critico. Poiché la funzione guadagno d'anello ha due poli a parte reale positiva, il sistema ad anello chiuso risulta stabile.

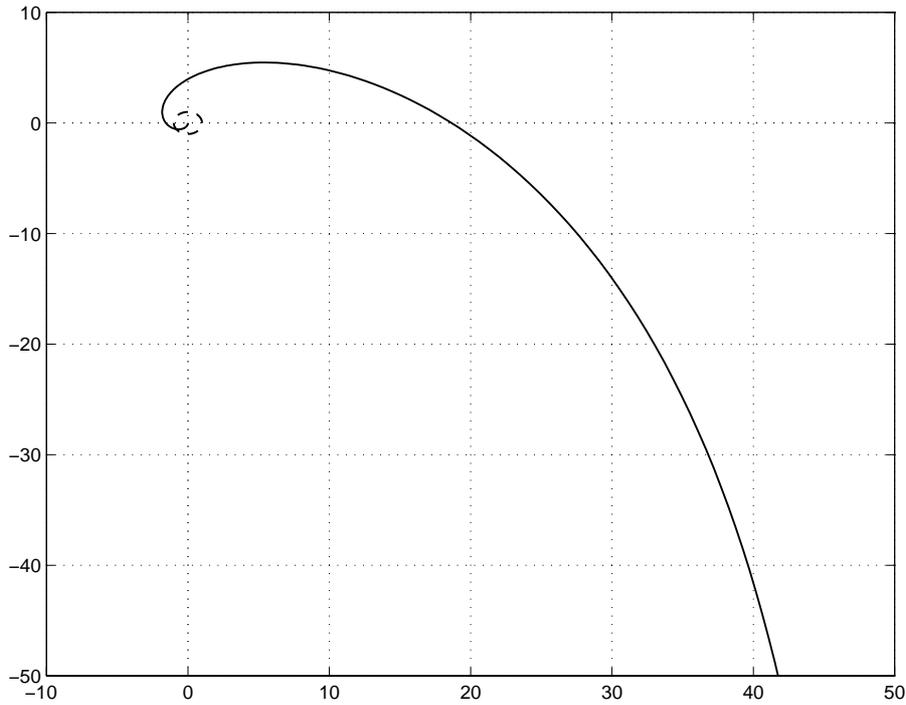


Fig. 4: Diagramma di Nyquist.

d) La funzione guadagno d'anello (in forma fattorizzata e in forma con costanti di tempo) è la $G_l(s)$ definita al punto c). Pulsazioni alle quali si ha una variazione di pendenza del diagramma asintotico delle ampiezze:

$$\begin{aligned} \omega_1 = 0 &\Leftrightarrow p_1 = 0, \\ \omega_2 = 1 &\Leftrightarrow p_2 = 1, \\ \omega_3 = 4 &\Leftrightarrow z_{1,2} = -4 \\ \omega_4 = 10 &\Leftrightarrow p_3 = 10. \end{aligned}$$

Posizionamento verticale del diagramma asintotico delle ampiezze:

$$\beta(\bar{\omega}) = \frac{|s^h G(s)|_{s=0}}{\bar{\omega}^h} = 32 = 30.1030 \text{ db},$$

essendo $h = 1$ e avendo assunto $\bar{\omega} = 1 \text{ rad/sec}$. Fase iniziale:

$$\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}.$$

Ciascun polo (reale e instabile) introduce uno sfasamento complessivo, per ω che va da 0 a ∞ , di ampiezza $\pi/2$ e di segno positivo. Ciascuno zero (reale e stabile) introduce anch'esso uno sfasamento complessivo, per ω che va da 0 a ∞ , di ampiezza $\pi/2$ e di segno positivo. I diagrammi di Bode sono riportati in Fig.5 e in Fig.6.

e) La funzione guadagno d'anello (in forma fattorizzata e in forma con costanti di tempo) è la $G_l(s)$ definita al punto c).

Poli e zeri:

$$p_1 = 0, p_2 = 1, p_3 = 10, z_{1,2} = -4 \Rightarrow n = 3 \text{ rami e } n - m = 1 \text{ asintoto.}$$

Punti dell'asse reale che appartengono al luogo:

$$[-\infty -4] \cup [-4 0] \cup [1 10].$$

Angolo formato dall'asintoto con l'asse reale:

$$\vartheta_{a,0} = \pi.$$

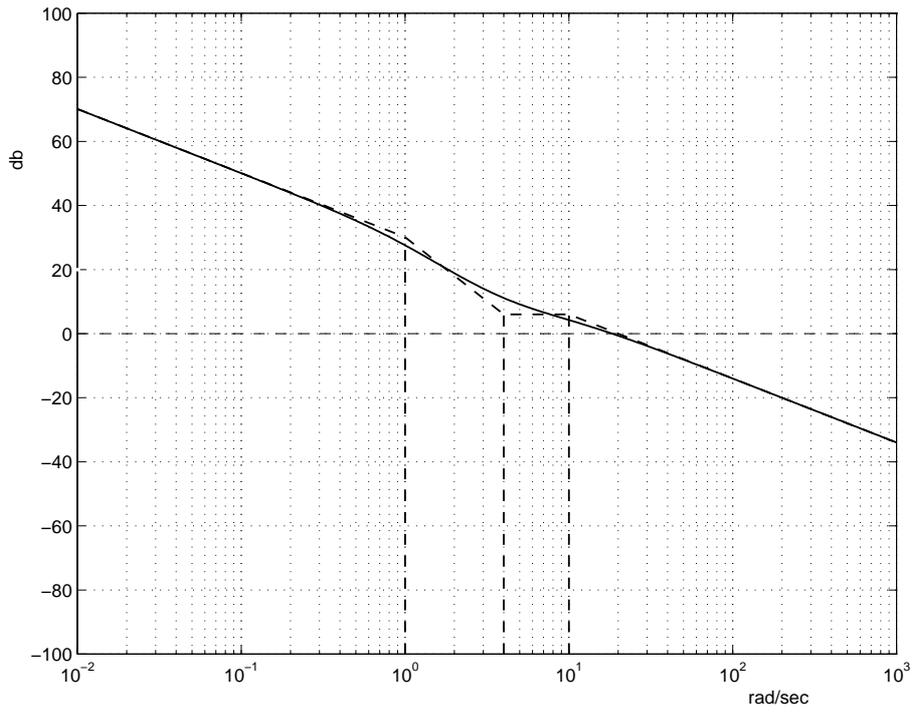


Fig. 5: Diagramma di Bode delle ampiezze della funzione guadagno d'anello.

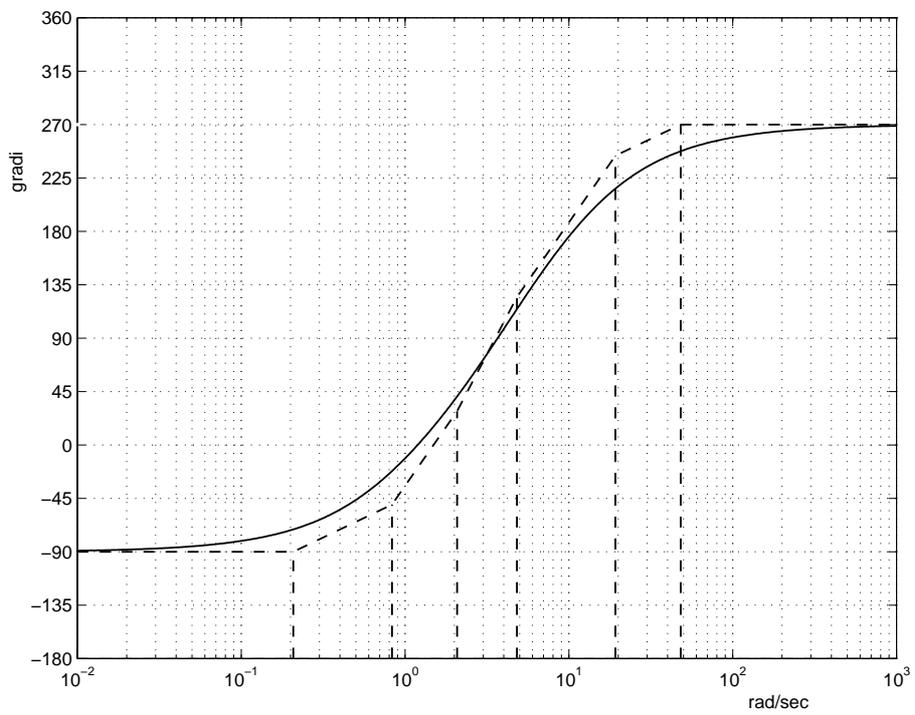


Fig. 6: Diagramma di Bode delle fasi della funzione guadagno d'anello.

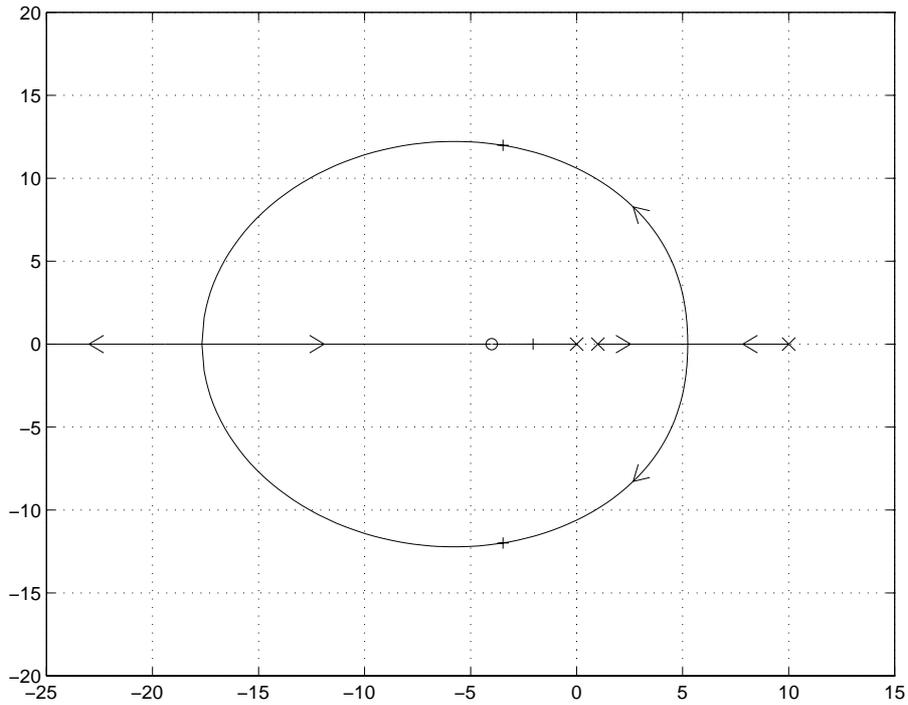


Fig. 7: Luogo delle radici.

Il luogo presenta un punto dell'asse reale compreso nell'intervallo $[1 \ 10]$ dal quale si dipartono due rami e da un punto dell'asse reale compreso nell'intervallo $[-\infty \ -4]$ nel quale gli stessi due rami convergono. Il luogo delle radici è rappresentato in Fig.7.

La coppia di poli complessi coniugati alla quale corrisponde il tempo di assestamento $T_a = 3 \text{ sec}$ è caratterizzata dall'aver parte reale $\sigma = -1$. Dunque si risolve in K e in ω l'equazione caratteristica in cui si è assunto, ad esempio, $s = -1 + j\omega$. Si ha

$$1 + K \frac{(s+4)^2}{s(s-1)(s-10)} \Big|_{s=-1+j\omega} = 0,$$

da cui

$$2(7\omega^2 - 11) + (9 - \omega^2)K + (35 - \omega^2 + 6K)j\omega = 0$$

e quindi

$$\omega = \pm 11.1538, \quad K = 14.9012.$$

f) Ampiezza e fase della $G_1(j\omega)$ alla pulsazione $\omega = 10 \text{ rad/sec}$:

$$G_1(10j) = \frac{10}{10j(10j+10)} = \frac{1}{10(-1+j)} = 0.0707e^{-j\frac{3\pi}{4}}.$$

Amplificazione M e anticipo di fase φ che la rete deve fornire alla pulsazione $\omega = 10 \text{ rad/sec}$:

$$M = \frac{1}{0.0707} = 14.1443,$$

$$\varphi = -120^\circ + 135^\circ = 15^\circ.$$

Verifica di fattibilità:

$$\varphi = 15^\circ < \arccos \frac{1}{M} = \arccos \frac{1}{14.1443} = 85.9437^\circ.$$

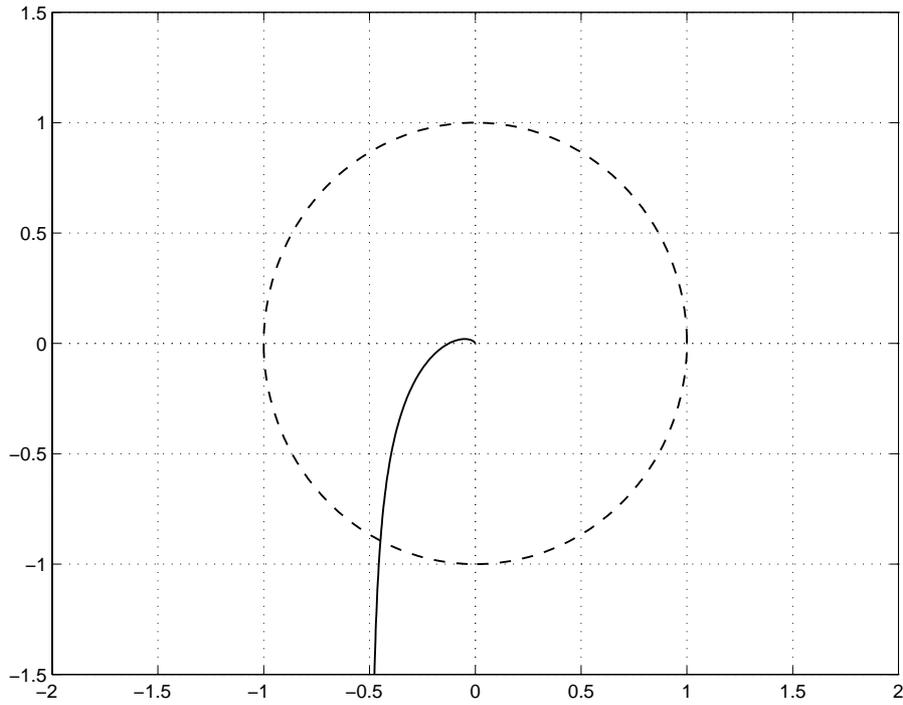


Fig. 8: Diagramma di Nyquist di $G_2(s)$.

Valori dei parametri della rete:

$$\alpha = \frac{M \cos \varphi - 1}{M(M - \cos \varphi)} = \frac{14.1443 \cos 15^\circ - 1}{14.1443(14.1443 - \cos 15^\circ)} = 0.0679,$$

$$\tau = \frac{M - \cos \varphi}{\omega \sin \varphi} = \frac{14.1443 - \cos 15^\circ}{10 \sin 15^\circ} = 5.0917.$$

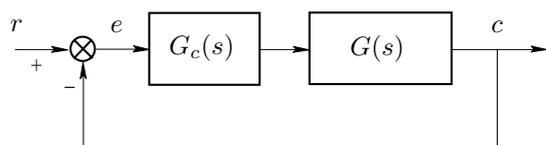
Funzione di trasferimento della rete anticipatrice:

$$G_c(s) = \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s} = \frac{1 + 5.0917 s}{1 + 0.3457 s}.$$

g) La relazione imposta dalla parte lineare del sistema è $y=2$, da cui segue che il punto di lavoro è $(x_0, y_0) = (4/3, 2)$. Le pendenze delle due rette che, intersecandosi in corrispondenza del punto di lavoro, definiscono il settore che contiene la caratteristica dell'elemento non lineare, sono rispettivamente $\alpha=0$ e $\beta=3/2$. Poichè il diagramma di Nyquist della $G_2(s)$ (si veda Fig.8) non circonda nè tocca il cerchio critico, il punto di lavoro è stabile asintoticamente.

Prova scritta di Controlli Automatici # 4

Si consideri il sistema in retroazione rappresentato in Fig.1.



$$G(s) = \frac{600}{(s+1)(s+2)(s+30)}.$$

Fig. 1: Sistema in retroazione.

- a) Assumendo $G_c(s) = 1$, si determini il margine di ampiezza del sistema.
 - b) Assumendo $G_c(s) = 1$, si traccino i diagrammi asintotici di Bode (delle ampiezze e delle fasi) della funzione guadagno d'anello del sistema.
 - c) Assumendo $G_c(s) = K$, si tracci il luogo delle radici del sistema in retroazione al variare del parametro $K > 0$.
 - d) Si progetti analiticamente un regolatore $G_c(s)$ in base alle seguenti specifiche:
 - i) errore a regime nullo nella risposta al gradino;
 - ii) massima sovraelongazione $S \leq 10\%$;
 - iii) tempo di ritardo $t_r \leq 0.084 \text{ sec}$;
 - iv) errore a regime nella risposta alla rampa unitaria $e_r \leq 0.1$.
- A questo scopo si suggerisce di utilizzare come funzione di trasferimento campione quella di un filtro di Butterworth (si danno grafici e tabelle).
- e) Assumendo che il blocco $G_c(s)$ sia il regolatore progettato al punto d), si tracci il diagramma di Nyquist della funzione guadagno d'anello del sistema.
 - f) Assumendo che il blocco $G_c(s)$ sia il regolatore progettato al punto d) e che nella catena diretta, fra il regolatore e il sistema controllato, sia inserito un relé ideale di ampiezza $Y_1 = 100 \pi/4 = 78.5398$, si determinino la pulsazione ω^* dell'oscillazione autosostenuta presente nel sistema con $r = 0$ e l'ampiezza della sinusoide all'ingresso del relé.
 - g) Si determini l'ampiezza della fondamentale all'uscita del sistema.

ordine	α_8	α_7	α_6	α_5	α_4	α_3	α_2	α_1	α_0
1								1	1
2							1	1,414	1
3						1	2	2	1
4					1	2,613	3,414	2,613	1
5				1	3,236	5,236	5,236	3,236	1
6			1	3,864	7,464	9,142	7,464	3,864	1
7		1	4,494	10,10	14,60	14,60	10,10	4,494	1
8	1	5,126	13,14	21,85	25,69	21,85	13,14	5,126	1

Tab. 1: Tabella dei coefficienti dei filtri di Butterworth di ordine da 1 a 8.

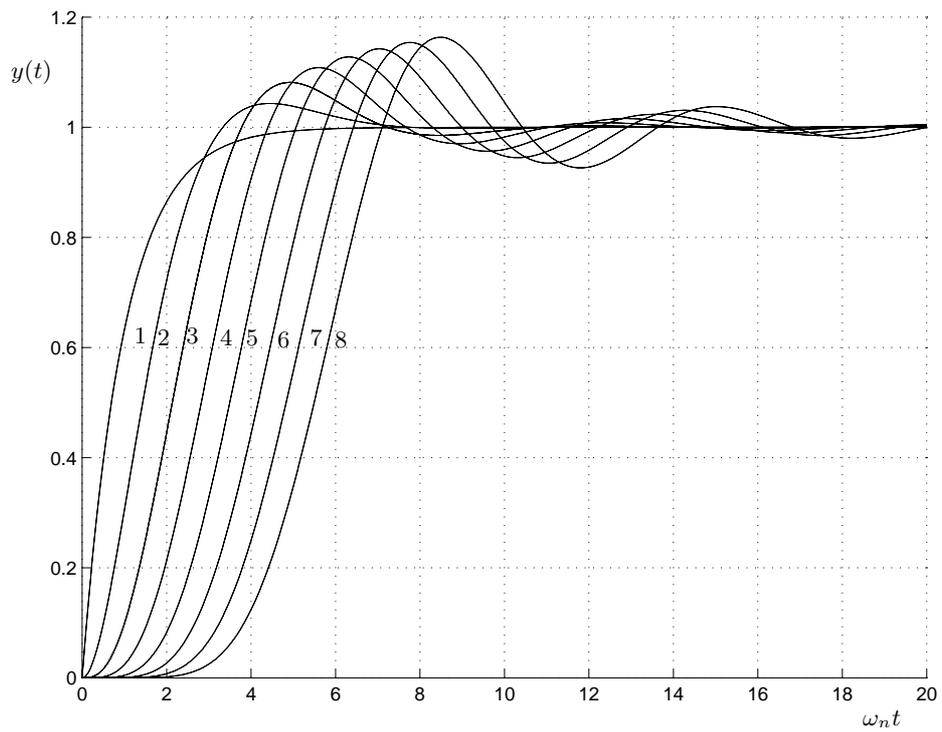


Fig. 2: Risposte al gradino dei filtri di Butterworth di ordine da 1 a 8.

Soluzione

a) Equazione caratteristica:

$$1 + K \frac{600}{(s+1)(s+2)(s+30)} = 0 \quad \Rightarrow \quad s^3 + 33s^2 + 92s + 60(1+10K) = 0.$$

Tabella di Routh:

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 92 \\ 2 & 33 & 60(1+10K) \\ 1 & 2976-600K & 0 \\ 0 & 60(1+10K)(2976-600K) & \end{array}$$

Condizioni ricavate dalla tabella di Routh:

$$(2976 - 600K > 0 \text{ and } 1 + 10K > 0) \quad \Rightarrow \quad -0.1 < K < 4.9600.$$

Margine di ampiezza:

$$M_A = 4.9600.$$

b) Funzione guadagno d'anello (in forma fattorizzata):

$$G(s) = \frac{600}{(s+1)(s+2)(s+30)}.$$

Funzione guadagno d'anello (in forma con costanti di tempo):

$$G(s) = \frac{10}{(1+s)(1+0.5s)(1+0.0333s)}.$$

Pulsazioni alle quali si ha una variazione di pendenza del diagramma asintotico delle ampiezze:

$$\begin{aligned} \omega_1 = 1 & \Leftrightarrow p_1 = -1, \\ \omega_2 = 2 & \Leftrightarrow p_2 = -2, \\ \omega_3 = 30 & \Leftrightarrow p_3 = -30. \end{aligned}$$

Posizionamento verticale del diagramma asintotico delle ampiezze:

$$G(0) = 10 = 20 \text{ db},$$

essendo $h=0$. Fase iniziale:

$$\varphi_0 = 0.$$

Ciascun polo (reale e stabile) introduce uno sfasamento complessivo, per ω che va da 0 a ∞ , di ampiezza $\pi/2$ e di segno negativo, dunque la fase finale è $\varphi_f = -\frac{3\pi}{2}$. I diagrammi di Bode sono riportati nelle Figure 3 e 4.

c) Poli:

$$p_1 = -1, p_2 = -2, p_3 = -30 \quad \Rightarrow \quad n = 3 \text{ rami e } n = 3 \text{ asintoti}.$$

Punti dell'asse reale che appartengono al luogo:

$$[-\infty \quad -30] \cup [-2 \quad -1].$$

Punti di emergenza:

$$G'(s) = 3s^2 + 66s + 92 = 0 \quad \Rightarrow \quad s = \begin{cases} -20.5, \\ -1.5. \end{cases}$$

Dunque il punto di emergenza è in $s = -1.5$. La soluzione $s = -20.5$, invece, individua un punto che non appartiene al luogo. Centro stella degli asintoti:

$$\sigma_a = \frac{1}{3}(-1 - 2 - 30) = -11.$$

Angoli formati dagli asintoti con l'asse reale:

$$\vartheta_{a,0} = \frac{\pi}{3}, \quad \vartheta_{a,1} = \pi, \quad \vartheta_{a,2} = \frac{5\pi}{3}.$$

Il luogo delle radici è rappresentato in Fig.5.

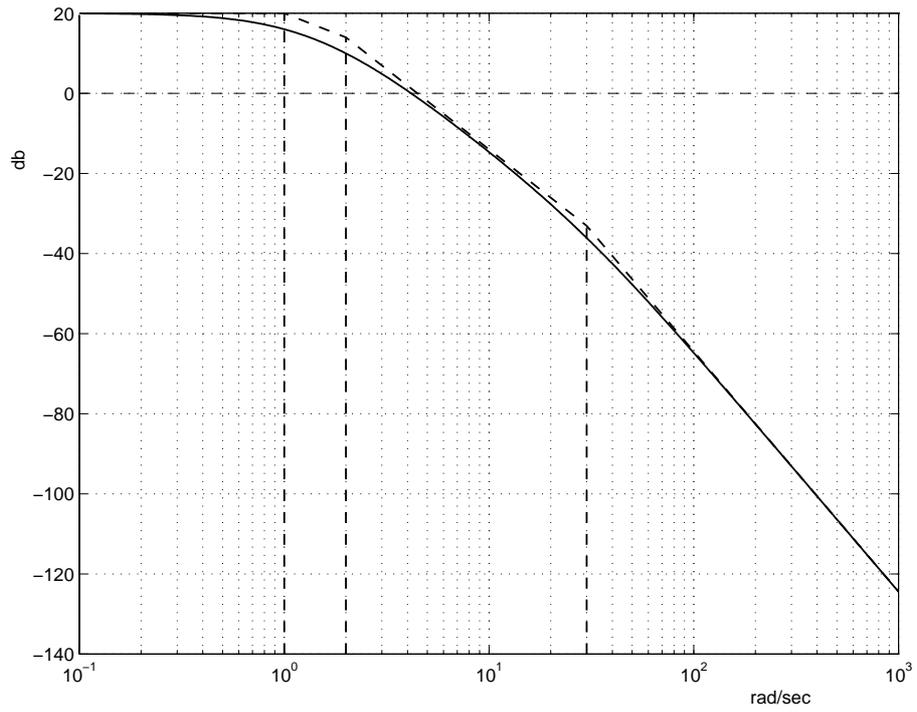


Fig. 3: Diagramma di Bode delle ampiezze della funzione guadagno d'anello.

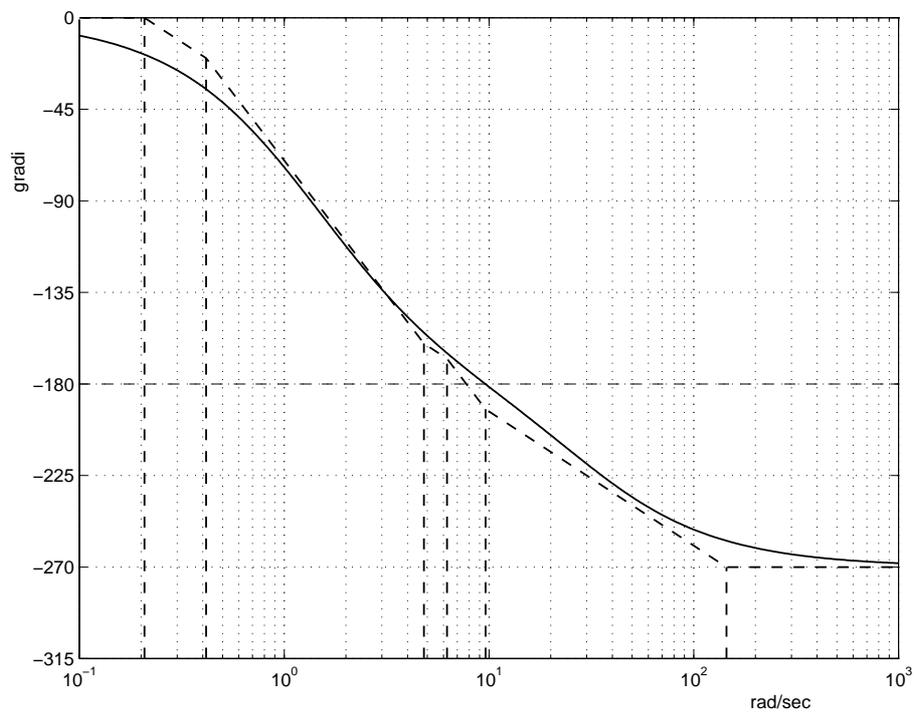


Fig. 4: Diagramma di Bode delle fasi della funzione guadagno d'anello.

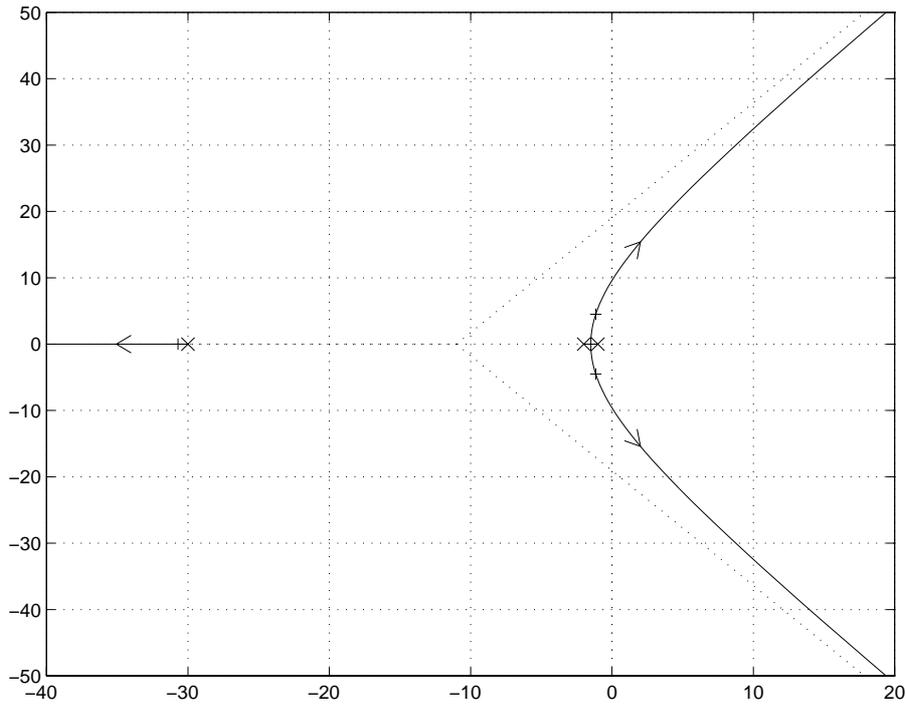


Fig. 5: Luogo delle radici.

d) La condizione di realizzabilità fisica impone di scegliere una funzione di trasferimento campione con grado relativo non inferiore a quello del sistema controllato, perciò almeno uguale a tre. Tenendo conto del suggerimento di utilizzare un filtro di Butterworth e del fatto che conviene usare un filtro del minimo ordine possibile, si sceglie come funzione di trasferimento campione quella di un filtro di Butterworth di ordine tre, cioè

$$G_0(s) = \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^3 + 2\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + 2\left(\frac{s}{\omega_n}\right) + 1}$$

La banda ω_n del filtro si sceglie in base alle specifiche assegnate.

- i) La condizione sul comportamento a regime nella risposta al gradino richiede che i polinomi a numeratore e a denominatore della funzione di trasferimento campione abbiano i termini noti uguali fra loro. Questa condizione è soddisfatta dalle funzioni di trasferimento dei filtri di Butterworth.
- ii) Nei grafici normalizzati delle risposte al gradino dei filtri di Butterworth si vede che la condizione sulla massima sovraelongazione è senz'altro soddisfatta da un filtro di Butterworth di ordine 3.
- iii) Nel grafico normalizzato della risposta al gradino unitario del filtro di Butterworth di ordine tre si legge che il valore di $\omega_n t$ in corrispondenza del 50% del valore finale è approssimativamente 2.1. Dunque

$$\omega_n t_r = 2.1 \quad \text{and} \quad t_r \leq 0.084 \quad \Rightarrow \quad \omega_n \geq 25 \text{ rad/sec.}$$

iv) L'espressione dell'errore a regime nella risposta alla rampa unitaria è

$$e_r = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s^2} [1 - G_0(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s^2} \frac{\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^3 + 2\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + 2\left(\frac{s}{\omega_n}\right)}{\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^3 + 2\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + 2\left(\frac{s}{\omega_n}\right) + 1} = \frac{2}{\omega_n}.$$

Dunque, imponendo

$$e_r = \frac{2}{\omega_n} \leq 0.1,$$

si ottiene

$$\omega_n \geq 20 \text{ rad/sec}.$$

In definitiva, un filtro di Butterworth di ordine 3 con banda $\omega_n = 25 \text{ rad/sec}$ soddisfa tutte le specifiche. Dunque la funzione di trasferimento campione è

$$G_0(s) = \frac{1}{\left(\frac{s}{25}\right)^3 + 2\left(\frac{s}{25}\right)^2 + 2\left(\frac{s}{25}\right) + 1} = \frac{15625}{s^3 + 50s^2 + 1250s + 15625}.$$

La funzione di trasferimento del regolatore è

$$G_c(s) = \frac{G_0(s)}{1 - G_0(s)} \frac{1}{G(s)} = \frac{625(s+1)(s+2)(s+30)}{24s(s^2+50s+1250)} = 26.04 \frac{(s+1)(s+2)(s+30)}{s(s^2+50s+1250)}.$$

e) Funzione guadagno d'anello:

$$G_l(s) = \frac{G_0(s)}{1 - G_0(s)} = \frac{15625}{s(s^2+50s+1250)} = \frac{12.5}{s(1+0.04s+0.0008s^2)}.$$

La funzione guadagno d'anello è di tipo 1, quindi il diagramma di Nyquist parte da un punto all'infinito, in particolare è

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} |G_l(j\omega)| = \infty, \quad \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \angle G_l(j\omega) = -\frac{\pi}{2}.$$

Ascissa dell'asintoto parallelo all'asse immaginario:

$$\sigma_a = 12.5(-0.04) = -0.5.$$

Essendo il numero dei poli $n=3$ maggiore del numero degli zeri $m=0$, il diagramma di Nyquist termina nell'origine tangente a uno degli assi coordinati, in particolare

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} |G_l(j\omega)| = 0, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \angle G_l(j\omega) = -\frac{3\pi}{2}.$$

Per il calcolo della intersezione con il semiasse reale negativo si procede nel modo indicato di seguito. Equazione caratteristica:

$$1 + K \frac{15625}{s(s^2+50s+1250)} = 0 \quad \Rightarrow \quad s^3 + 50s^2 + 1250s + 15625K = 0.$$

Tabella di Routh:

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 1250 \\ 2 & 50 & 15625K \\ 1 & 15625(4-K) & 0 \\ 0 & 15625^2K(4-K) & \end{array}$$

Condizioni ricavate dalla tabella di Routh:

$$(4 - K > 0 \text{ and } K > 0) \quad \Rightarrow \quad 0 < K < 4 \quad \Rightarrow \quad K^* = 4.$$

Ascissa dell'intersezione con il semiasse reale negativo:

$$\sigma_0 = -\frac{1}{K^*} = -\frac{1}{4} = -0.25.$$

Pulsazione dell'intersezione con il semiasse reale negativo:

$$50s^2 + 15625 \cdot 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad s^2 + 1250 = 0 \quad \Rightarrow \quad s = \pm j\sqrt{1250} = \pm j35.3553 \quad \Rightarrow \quad \omega^* = 35.3553 \text{ rad/sec}.$$

Il diagramma di Nyquist della funzione guadagno d'anello è mostrato in Fig.6.

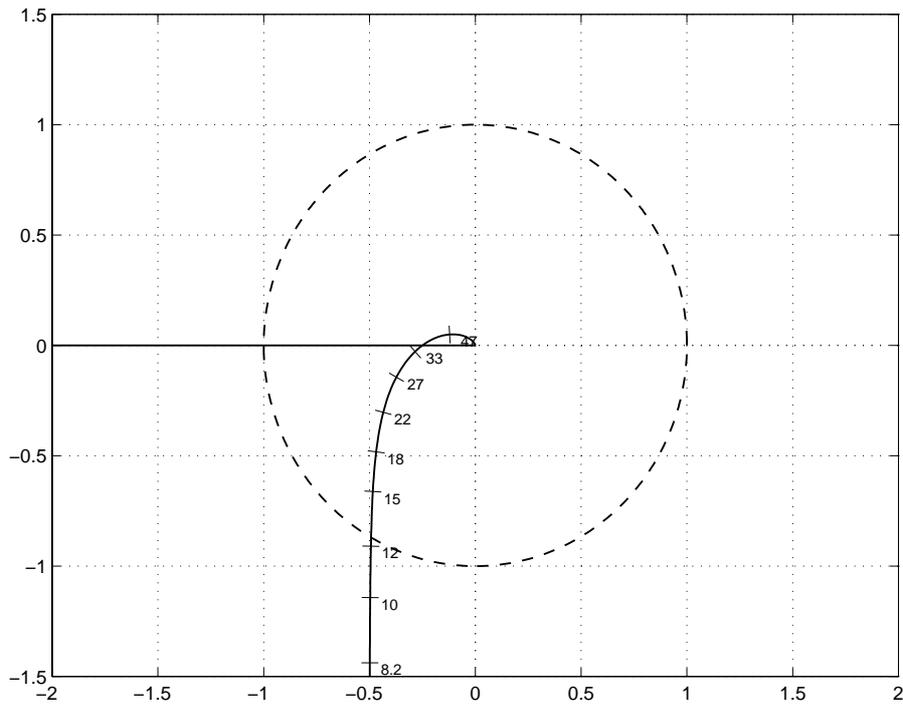


Fig. 6: Oscillazioni autosostenute.

f) La funzione descrittiva $F(X)$ del relé ideale di ampiezza $Y_1 = 78.5398$ è

$$F(X) = \frac{4Y_1}{\pi X} = \frac{100}{X}.$$

Anche la costruzione grafica per verificare l'esistenza di eventuali oscillazioni autosostenute è mostrata in Fig.6. La pulsazione dell'oscillazione autosostenuta coincide con la pulsazione $\omega^* = 35.3553$ rad/sec determinata al punto d). L'ampiezza della sinusoide all'ingresso del relé è

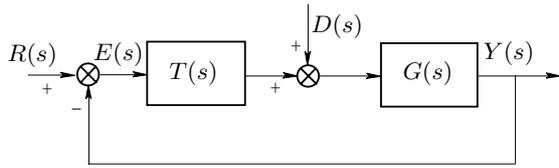
$$-\frac{1}{F(X)} = -0.25 \Rightarrow -\frac{X}{100} = -0.25 \Rightarrow X = 25.$$

g) L'ampiezza della fondamentale all'uscita del sistema si determina moltiplicando l'ampiezza della fondamentale all'uscita del relé per la funzione di risposta armonica del sistema controllato calcolata in corrispondenza della pulsazione delle oscillazioni autosostenute $\omega^* = 35.3553$ rad/sec. Risulta

$$\frac{4Y_1}{\pi} |G(j\omega^*)| = 100 \cdot 0.00676 = 0.676.$$

Prova scritta di Controlli Automatici # 5

Si consideri il sistema in retroazione rappresentato in Fig.1.



$$G(s) = \frac{s + 2}{s(s + 1)(s^2 + 10s + 41)}.$$

Fig. 1: Sistema in retroazione.

- a) Posto $T(s) = K$, si determini l'intervallo di valori del parametro $K > 0$ per il quale il sistema retroazionato è stabile asintoticamente.
- b) Posto $T(s) = K$, si determini il valore del parametro $K > 0$ per il quale, in presenza di un gradino unitario all'ingresso $d(t)$ e con ingresso $r(t)$ identicamente nullo, il valore a regime dell'uscita risulta essere $y(t) = y_r = 0.01$. Assumendo per K il valore così determinato, si calcoli l'errore a regime nella risposta alla rampa unitaria applicata all'ingresso di riferimento $r(t)$ — in questo caso si intende $d(t)$ identicamente nullo.
- c) Assumendo per K il valore determinato al punto b), si traccino i diagrammi asintotici di Bode (delle ampiezze e delle fasi) della funzione guadagno d'anello del sistema.
- d) Assumendo per K il valore determinato al punto b), si tracci il diagramma di Nyquist della funzione guadagno d'anello del sistema.
- e) Si definisca per via analitica la funzione di trasferimento $T(s)$ del regolatore assumendo come funzione di trasferimento campione quella di un sistema del terzo ordine con due poli complessi e uno reale

$$G_0(s) = \frac{1}{(0.0593s^2 + 0.2414s + 1)(0.1686s + 1)}.$$

- f) Si consideri la rete correttiva

$$T(s) = 100 \frac{1 + s}{1 + \tau s}$$

che opera una cancellazione polo-zero all'interno del sistema. Si tracci il contorno delle radici del sistema in retroazione al variare del parametro $\tau > 0$. A questo scopo, si tenga conto dei seguenti fatti: *i*) per $\tau = 0$ le radici sono $p_1 = -1.5650$ e $p_{2,3} = -4.2175 \pm 10.4887j$; *ii*) il contorno presenta un punto di diramazione in $s = -4.193$.

- g) Si consideri il sistema non lineare in retroazione rappresentato in Fig.2. Si determini il punto di lavoro (x_0, y_0) corrispondente all'ingresso costante $r = 2$. Si tracci qualitativamente l'andamento della funzione descrittiva $F(X)$ nell'intorno del punto di lavoro. Si determinino l'ampiezza X^* e la pulsazione ω^* dell'oscillazione autosostenuta presente nel sistema.

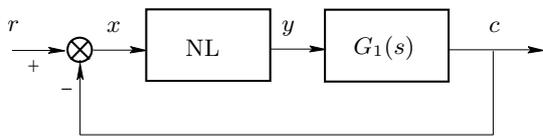


Fig. 2: Sistema non lineare in retroazione.

$$G_1(s) = \frac{e^{-2s}}{2(1 + \tau s)}, \quad \tau \ll 2.$$

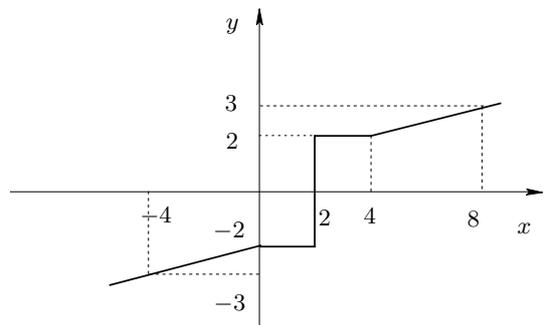


Fig. 3: Caratteristica dell'elemento non lineare.

Soluzione

a) Equazione caratteristica:

$$1 + K \frac{s+2}{s(s+1)(s^2+10s+41)} = 0 \quad \Rightarrow \quad s^4 + 11s^3 + 51s^2 + (41+K)s + 2K = 0.$$

Tabella di Routh:

$$\begin{array}{c|ccc} 4 & 1 & 51 & 2K \\ 3 & 11 & 41+K & 0 \\ 2 & 520-K & 22K & 0 \\ 1 & -K^2+237K+21320 & 0 & \\ 0 & 22K(-K^2+237K+21320) & & \end{array}$$

Condizioni ricavate dalla tabella di Routh:

$$(520 - K > 0 \text{ and } -K^2 + 237K + 21320 > 0 \text{ and } K > 0) \quad \Rightarrow \quad 0 < K < 306.5.$$

b) Funzione di trasferimento da d ad y :

$$G_{yd}(s) = \frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{G(s)}{1 + KG(s)} = \frac{s+2}{s(s+1)(s^2+10s+41) + K(s+2)}.$$

Valore di regime dell'uscita nella risposta al gradino all'ingresso $d(t)$:

$$y_r = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sG_{yd}(s) \frac{1}{s} = \frac{1}{K}.$$

Quindi

$$\frac{1}{K} = 0.01 \quad \Rightarrow \quad K = 100.$$

Errore a regime nella risposta alla rampa unitaria:

$$e_r = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + KG(s)} \frac{1}{s^2} = \frac{1}{K_v},$$

dove

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sKG(s) = \lim_{s \rightarrow 0} 100 \frac{s+2}{(s+1)(s^2+10s+41)} = \frac{200}{41} = 4.8780,$$

e quindi

$$e_r = 0.2050.$$

c) Funzione guadagno d'anello (in forma fattorizzata):

$$G_a(s) = 100 \frac{s+2}{s(s+1)(s^2+10s+41)}.$$

Funzione guadagno d'anello (in forma con costanti di tempo):

$$G_a(s) = 4.8780 \frac{1 + 0.5s}{s(1+s) \left(1 + 2 \frac{0.7809}{6.4031} s + \frac{1}{6.4031^2} s^2 \right)}.$$

Pulsazioni alle quali si ha una variazione di pendenza del diagramma asintotico delle ampiezze:

$$\begin{aligned} \omega_1 = 1 & \quad \Leftrightarrow \quad p_1 = -1, \\ \omega_2 = 2 & \quad \Leftrightarrow \quad z_1 = -2, \\ \omega_3 = 6.4031 & \quad \Leftrightarrow \quad p_{2,3} = -5 \pm 4j. \end{aligned}$$

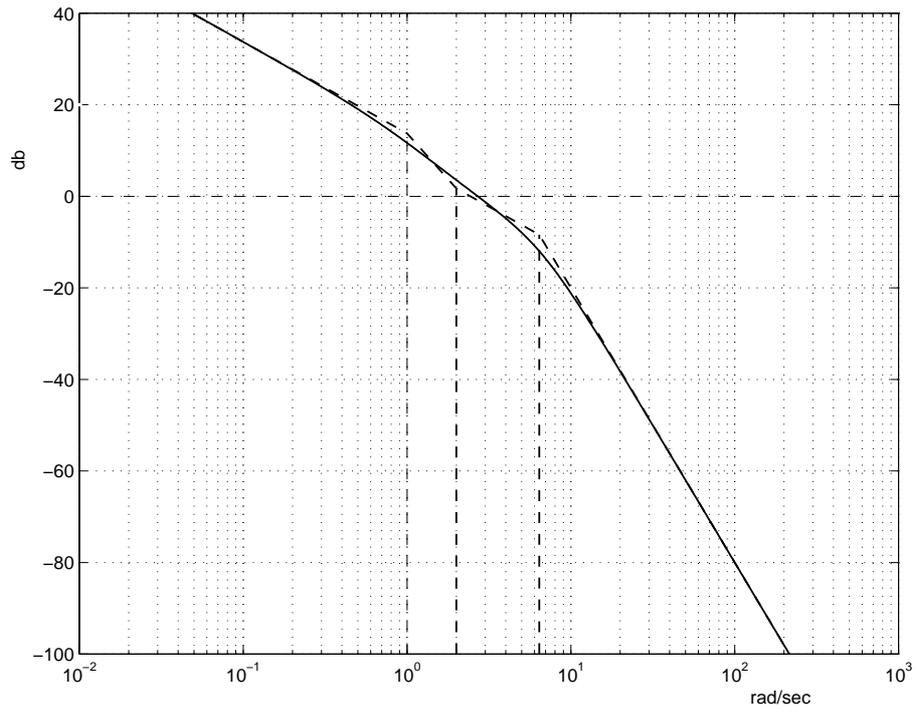


Fig. 4: Diagramma di Bode delle ampiezze.

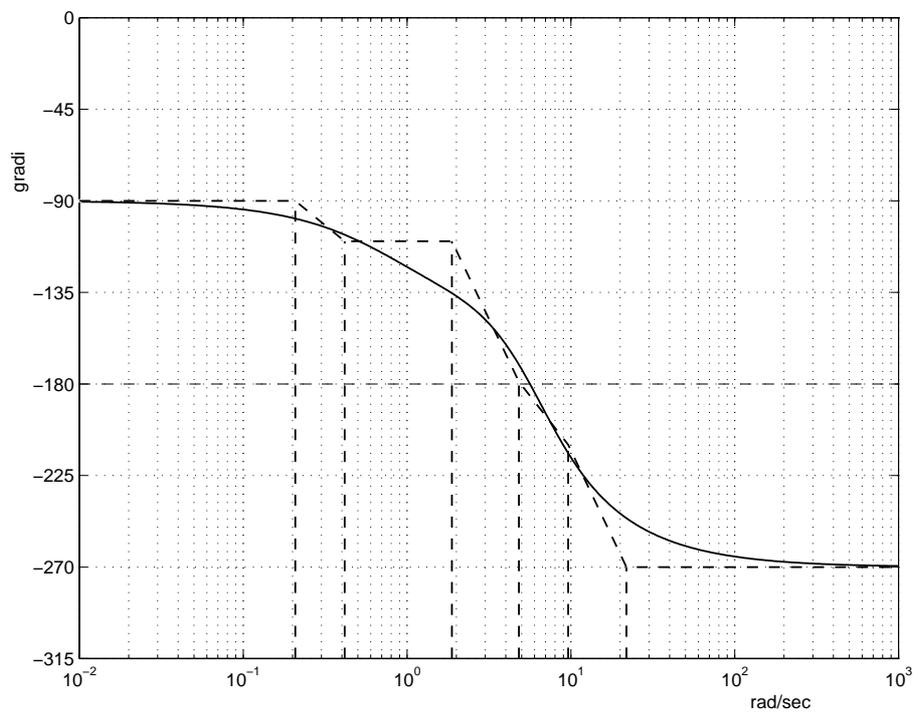


Fig. 5: Diagramma di Bode delle fasi.

Posizionamento verticale del diagramma asintotico delle ampiezze:

$$\beta(\bar{\omega}) = \frac{|s^h G(s)|_{s=0}}{\bar{\omega}^h} = 4.8780 = 13.7648 \text{ db},$$

essendo $h = 1$ ed avendo considerato $\bar{\omega} = 1$. Fase iniziale:

$$\varphi_0 = -h \frac{\pi}{2} - \bar{\varphi} = -\frac{\pi}{2},$$

essendo $K = 4.8780 > 0$ e quindi $\bar{\varphi} = 0$. Fase finale:

$$\varphi_f = (m - n) \frac{\pi}{2} + (\text{sign } K_1 - 1) \frac{\pi}{2} = -3 \frac{\pi}{2},$$

non essendo presenti né poli né zeri a parte reale positiva e quindi essendo $\text{sign } K_1 = \text{sign } K = 1$. Il polo reale stabile introduce uno sfasamento complessivo, per ω che va da 0 a ∞ , di ampiezza $\pi/2$ e di segno negativo. Lo zero reale stabile introduce uno sfasamento complessivo, per ω che va da 0 a ∞ , di ampiezza $\pi/2$ e di segno positivo. La coppia di poli complessi coniugati stabile introduce uno sfasamento complessivo, per ω che va da 0 a ∞ , di ampiezza π e di segno negativo. Nel tracciare il diagramma asintotico relativo allo sfasamento dovuto alla coppia di poli complessi coniugati è necessario tener conto del coefficiente di smorzamento $\delta = 0.7809$ per il quale l'intersezione fra il raccordo e gli asintoti avviene a una distanza uguale a $4.81^\delta = 3.4095$, rispettivamente a destra e a sinistra della pulsazione naturale. I diagrammi di Bode sono riportati in Fig.4 e in Fig.5.

d) La funzione guadagno d'anello, in forma fattorizzata e in forma con costanti di tempo è la $G_a(s)$ riportata nella soluzione del punto c).

Comportamento per $\omega \rightarrow 0+$. Essendo il sistema di tipo $h = 1$, il diagramma parte da un punto all'infinito. Infatti è

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow 0^+} |G(j\omega)| &= \infty, \\ \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \angle G(j\omega) &= -h \frac{\pi}{2} - \bar{\varphi} = -\frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

in quanto è $\bar{\varphi} = 0$, essendo $K = 4.878 > 0$. Ascissa dell'asintoto parallelo all'asse immaginario:

$$\sigma_a = 4.8780(0.5 - 1 - 0.2439) = -3.6287.$$

Comportamento per $\omega \rightarrow \infty$. Essendo $m = 1 < n = 4$, il diagramma termina nell'origine tangente a uno degli assi coordinati. Infatti è

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow \infty} |G(j\omega)| &= 0, \\ \lim_{\omega \rightarrow \infty} \angle G(j\omega) &= (m - n) \frac{\pi}{2} + \text{sign}(K_1 - 1) \frac{\pi}{2} = -3 \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

essendo $K_1 = 100 > 0$. L'ascissa dell'intersezione con il semiasse reale negativo è, in modulo, uguale a 100 per l'inverso del K limite di stabilità determinato al punto a), cioè

$$\sigma_0 = -100 \frac{1}{K^*} = -100 \frac{1}{306.5} = -0.3263.$$

Il diagramma di Nyquist è mostrato in Fig.6.

e) Funzione guadagno d'anello:

$$G_a(s) = \frac{G_0(s)}{1 - G_0(s)} = \frac{100}{s^3 + 10s^2 + 41s}.$$

Funzione di trasferimento del regolatore:

$$T(s) = \frac{G_a(s)}{G(s)} = 100 \frac{s + 1}{s + 2}.$$

f) Equazione caratteristica:

$$1 + \tau \frac{s^2(s^2 + 10s + 41)}{s^3 + 10s^2 + 141s + 200} = 0.$$

Punti dell'asse reale che appartengono al contorno:

$$[-\infty \quad -1.5650].$$

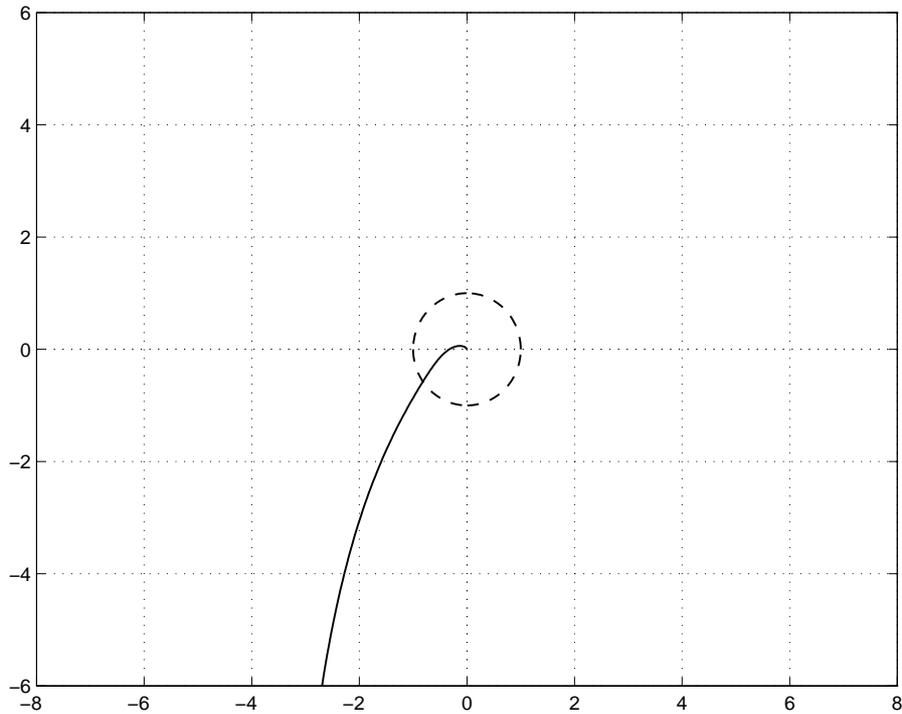


Fig. 6: Diagramma di Nyquist.

Il contorno presenta $m - n = 1$ asintoto, con centro stella

$$\sigma_a = (-2 \cdot 4.2175 - 1.5650 + 2 \cdot 5) = 0.$$

e angolo con l'asse reale

$$\vartheta_{a,0} = \pi.$$

Il contorno delle radici è rappresentato in Fig.7.

g) La relazione imposta dalla parte lineare del sistema è $y = -2x + 4$. Quindi il punto di lavoro è $(x_0, y_0) = (2, 0)$. Rispetto al punto di lavoro la caratteristica dell'elemento non lineare è simmetrica. Determinazione qualitativa dell'andamento di $F(X)$:

$$\begin{aligned} F(X) &\longrightarrow \infty && \text{per } X \rightarrow 0^+, \\ F(X) &\longrightarrow 0.25 && \text{per } X \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Per $X < 2$, la funzione descrittiva coincide con quella del relé ideale, cioè

$$F(X) = \frac{8}{\pi X}.$$

La funzione di risposta armonica interseca il semiasse reale negativo in corrispondenza del punto $\sigma = -0.5$, alla pulsazione $\omega^* = \frac{\pi}{2}$. Imponendo $F(X)G_1(j\omega^*) = -1$ si ottiene $F(X) = 2$ e quindi $X = \frac{4}{\pi} = 1.273$. L'andamento qualitativo di $F(X)$ è mostrato in Fig.8.

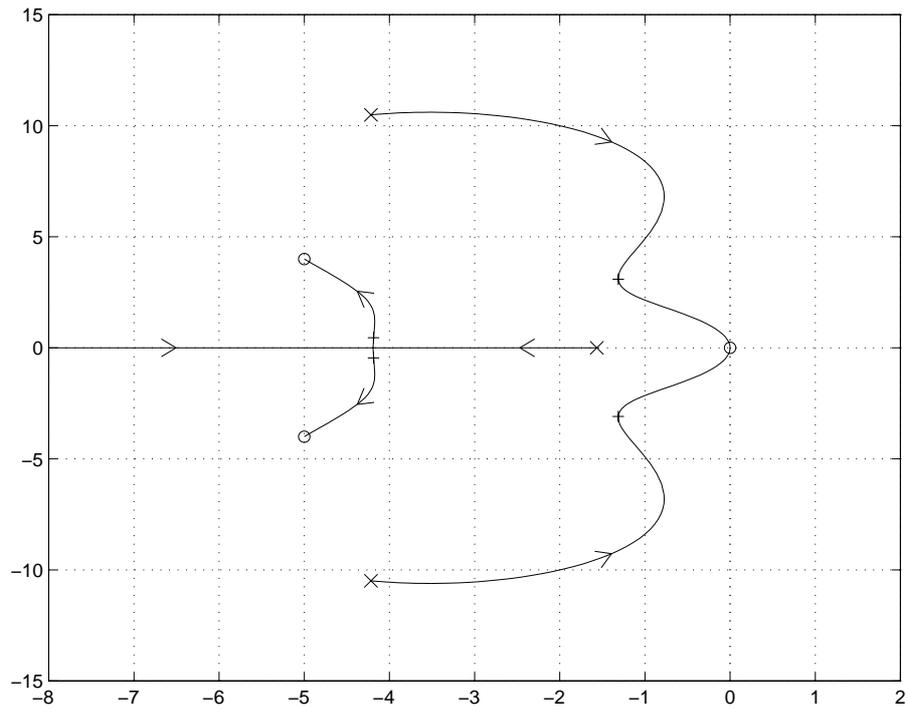


Fig. 7: Contorno delle radici.

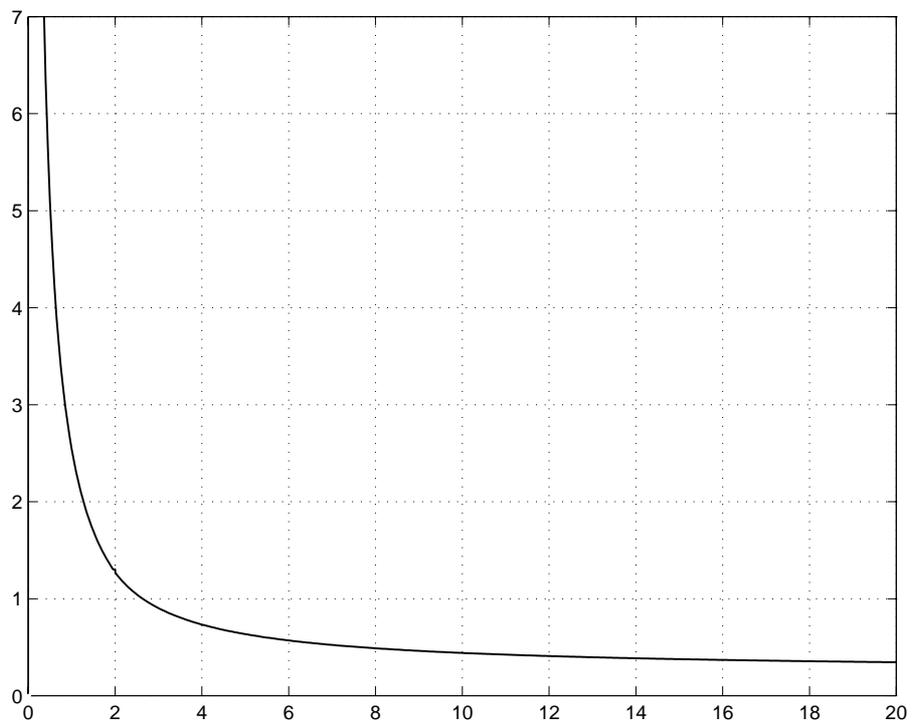


Fig. 8: Funzione descrittiva.

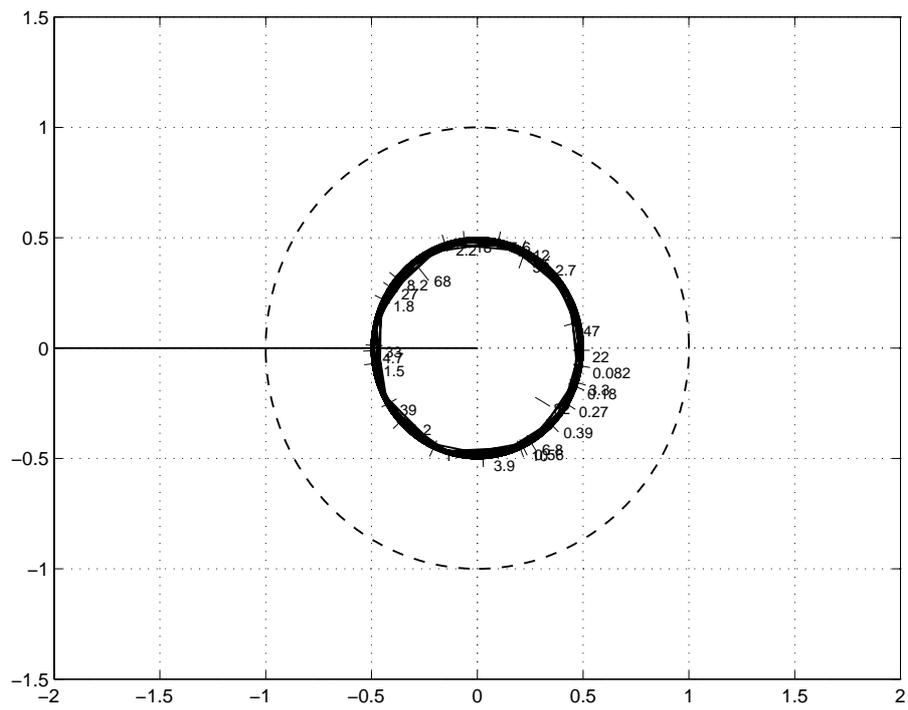
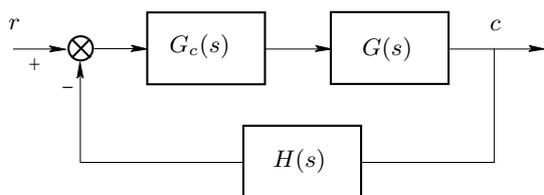


Fig. 9: Verifica dell'esistenza di oscillazioni autosostenute.

Prova scritta di Controlli Automatici # 6

Si consideri il sistema in retroazione rappresentato dal diagramma a blocchi di Fig.1.



$$G(s) = \frac{30}{(s+1)(s+3)(s+10)},$$

$$H(s) = \frac{60}{s+20}.$$

Fig. 1: Sistema in retroazione.

- a) Assumendo $G_c(s) = 1$, si traccino i diagrammi asintotici di Bode (delle ampiezze e delle fasi) della funzione guadagno d'anello del sistema $G_l(s) = G(s)H(s)$.
- b) Il comportamento ideale del sistema sia descritto dalla relazione $c(t) = K_c r(t)$ con $K_c = 1/3$. Si determini il valore dell'errore a regime riferito all'ingresso nella risposta al gradino unitario.
- c) Si progetti il regolatore $G_c(s)$ in modo che siano soddisfatte le seguenti specifiche.
 - i) errore a regime riferito all'ingresso nullo nella risposta al gradino;
 - ii) massima sovraelongazione non superiore al 10%;
 - iii) errore a regime riferito all'ingresso nella risposta alla rampa unitaria non superiore a 0.2;
 - iv) tempo di ritardo non superiore a 0.2 sec;

Si suggerisce di effettuare il progetto per via analitica utilizzando come modello di riferimento un filtro di Butterworth opportunamente scelto (tabelle e grafici relativi sono allegati).

- d) Con riferimento al sistema progettato al punto c), si calcoli il valore della reiezione dei disturbi sull'uscita alla pulsazione di 1 rad/sec.

- e) Si consideri il sistema in retroazione rappresentato in Fig.2. Assumendo che il blocco NL sia costituito da un guadagno unitario, si tracci il diagramma di Nyquist della funzione guadagno d'anello del sistema.

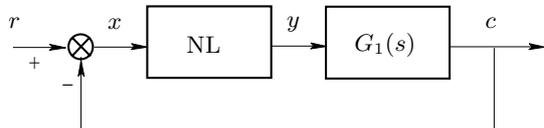


Fig. 2: Sistema non lineare in retroazione.

$$G_1(s) = \frac{0.5}{s(1+2s)^2}.$$

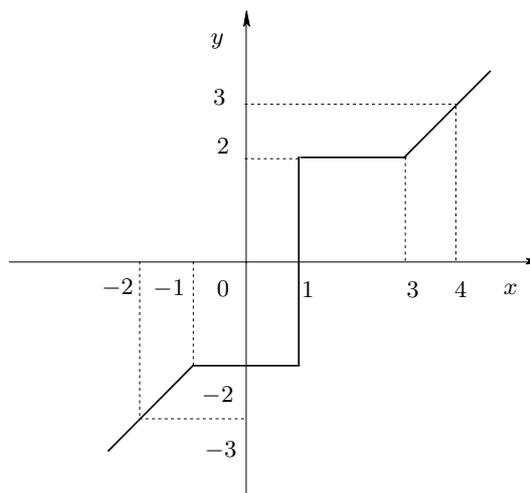


Fig. 3: Caratteristica dell'elemento non lineare.

- f) Con riferimento al sistema introdotto al punto e) ed assumendo che il blocco NL sia un blocco non lineare di tipo algebrico definito dalla caratteristica ingresso-uscita rappresentata in Fig.3, si individui il punto di lavoro (x_0, y_0, c_0) corrispondente al riferimento costante $r = 4$ e si tracci l'andamento della funzione descrittiva dell'elemento non lineare nell'intorno del punto di lavoro.

- g) Si determinino ampiezza e pulsazione della fondamentale di un'eventuale oscillazione autosostenuta all'uscita del sistema.

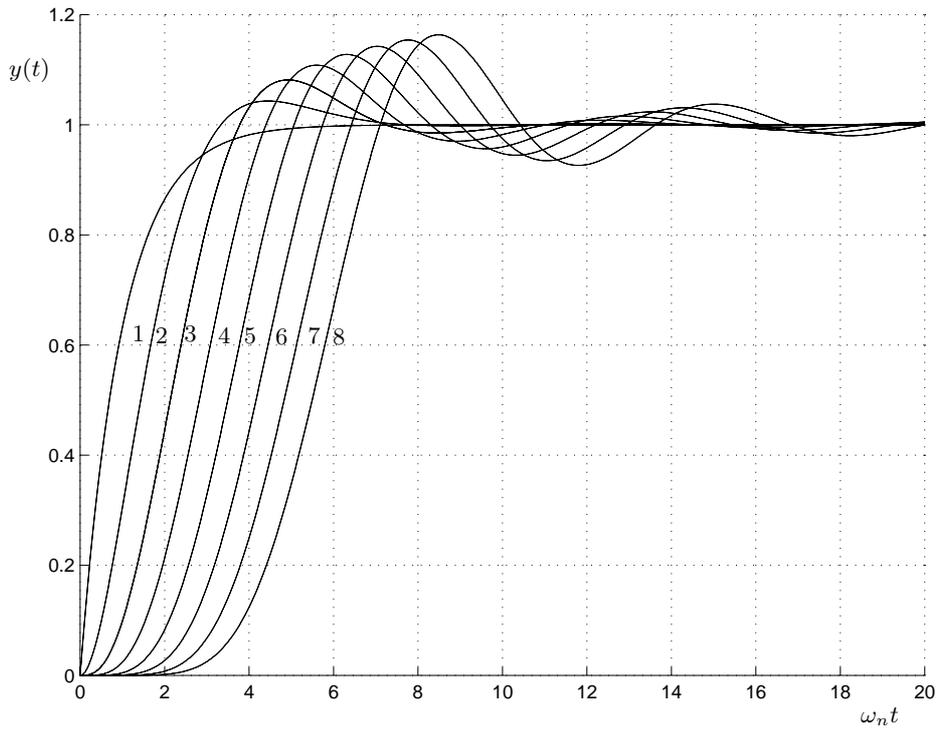


Fig. 4: Risposte al gradino dei filtri di Butterworth di ordine da 1 a 8.

ordine	α_8	α_7	α_6	α_5	α_4	α_3	α_2	α_1	α_0
1								1	1
2							1	1,414	1
3						1	2	2	1
4					1	2,613	3,414	2,613	1
5				1	3,236	5,236	5,236	3,236	1
6			1	3,864	7,464	9,142	7,464	3,864	1
7		1	4,494	10,10	14,60	14,60	10,10	4,494	1
8	1	5,126	13,14	21,85	25,69	21,85	13,14	5,126	1

Tab. 1: Tabella dei coefficienti dei filtri di Butterworth di ordine da 1 a 8.

Soluzione

a) Funzione guadagno d'anello (in forma fattorizzata):

$$G_l(s) = G(s)H(s) = \frac{1800}{(s+1)(s+3)(s+10)(s+20)}.$$

Funzione guadagno d'anello (in forma con costanti di tempo):

$$G_l(s) = \frac{3}{(1+s)(1+0.33s)(1+0.1s)(1+0.05s)}.$$

Pulsazioni alle quali si ha una variazione di pendenza del diagramma asintotico delle ampiezze:

$$\omega_1 = 1, \quad \omega_2 = 3, \quad \omega_3 = 10, \quad \omega_4 = 20.$$

Posizionamento verticale del diagramma asintotico delle ampiezze:

$$G_l(0) = \frac{1800}{3 \cdot 10 \cdot 20} = 3 = 9.542\text{db}.$$

Fase iniziale:

$$\varphi_0 = 0.$$

Fase finale:

$$\varphi_f = -4 \frac{\pi}{2} = 2\pi.$$

Ciascun polo (reale e stabile) introduce uno sfasamento complessivo, per ω che va da 0 a ∞ , di ampiezza $\pi/2$ e di segno negativo. I diagrammi di Bode sono riportati in Fig.5 e in Fig.6.

b) Per l'errore a regime riferito all'ingresso nella risposta al gradino unitario si ha:

$$e_{i,r} = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G_{eq}(s)},$$

con

$$G_{eq}(s) = \frac{G(s)}{K_c + G(s)[K_c H(s) - 1]}.$$

Nel caso specifico è

$$G_{eq}(s) = \frac{90(s+20)}{s^4 + 34s^3 + 323s^2 + 800s + 600}.$$

Quindi è

$$e_{i,r} = \frac{1}{1 + G_{eq}(0)} = \frac{1}{1 + 3} = 0.25.$$

c) La condizione di realizzabilità fisica impone di scegliere una funzione di trasferimento campione con grado relativo almeno uguale a tre. Tenendo conto del suggerimento di utilizzare come funzione di trasferimento campione quella di un filtro di Butterworth e del fatto che conviene comunque scegliere un filtro del minimo ordine possibile, si sceglie appunto un filtro del terzo ordine. La condizione sul comportamento ideale del sistema impone di considerare nella funzione di trasferimento campione un fattore di scala $1/3$. Si ha perciò

$$G_0(s) = \frac{1/3}{\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^3 + 2\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + 2\left(\frac{s}{\omega_n}\right) + 1}.$$

La funzione di trasferimento campione così definita soddisfa le specifiche (i) e (ii). Si considera la condizione sull'errore a regime. In generale, per l'errore a regime riferito all'ingresso vale la relazione

$$E_i(s) = \frac{K_c - G_0(s)}{K_c} R(s).$$

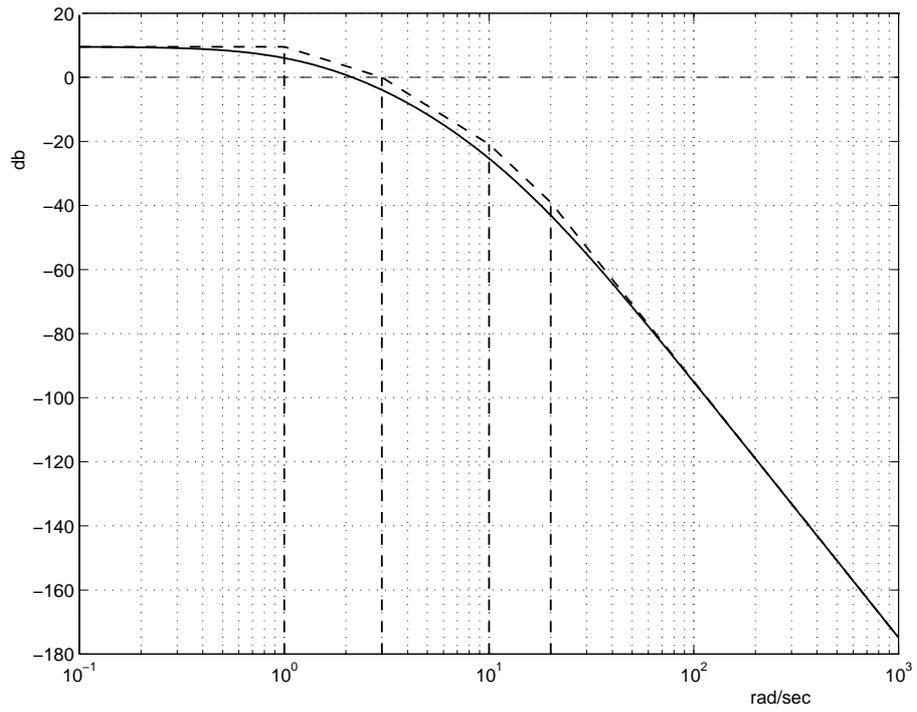


Fig. 5: Diagramma di Bode delle ampiezze della funzione guadagno d'anello.

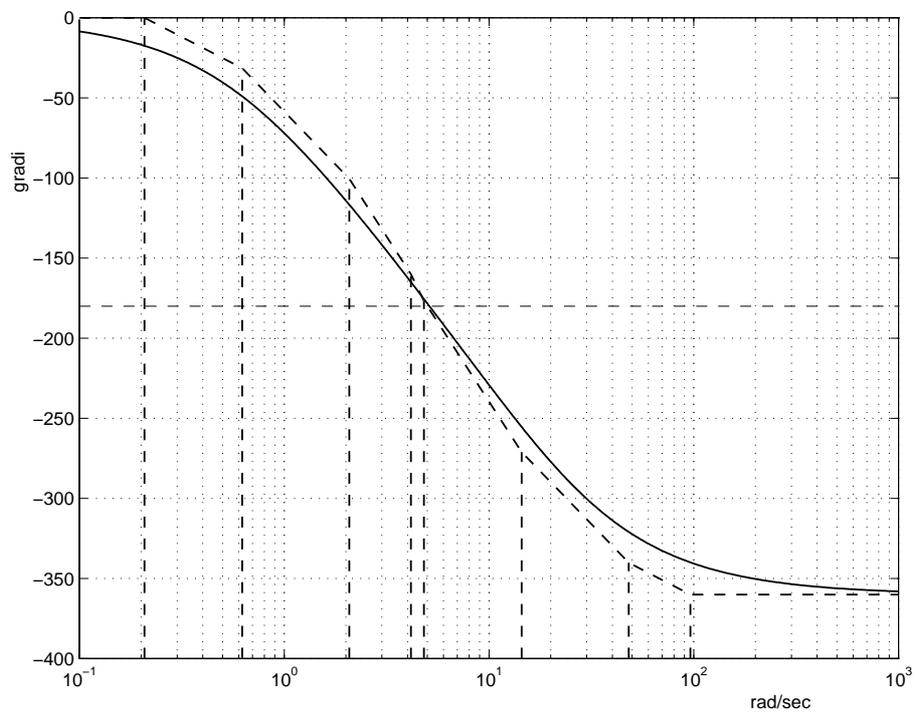


Fig. 6: Diagramma di Bode delle fasi della funzione guadagno d'anello.

Nel caso specifico si ha

$$E_i(s) = \frac{s \left(\frac{s^2}{\omega_n^3} + 2 \frac{s}{\omega_n^2} + 2 \frac{1}{\omega_n} \right)}{\left(\frac{s}{\omega_n} \right)^3 + 2 \left(\frac{s}{\omega_n} \right)^2 + 2 \left(\frac{s}{\omega_n} \right) + 1} R(s),$$

e quindi

$$e_{i,r} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s \left(\frac{s^2}{\omega_n^3} + 2 \frac{s}{\omega_n^2} + 2 \frac{1}{\omega_n} \right)}{\left(\frac{s}{\omega_n} \right)^3 + 2 \left(\frac{s}{\omega_n} \right)^2 + 2 \left(\frac{s}{\omega_n} \right) + 1} \frac{1}{s^2} = \frac{2}{\omega_n},$$

da cui

$$e_{i,r} \leq 0.2 \implies \frac{2}{\omega_n} \leq 0.2 \implies \omega_n \geq \frac{2}{0.2} = 10 \text{ rad/sec.}$$

Si considera infine la specifica (iv). Nel grafico relativo alla risposta al gradino unitario del filtro di Butterworth del terzo ordine con banda unitaria si legge

$$\omega_n t_r = 2.13;$$

imponendo

$$t_r = \frac{2.13}{\omega_n} \leq 0.2 \text{ sec},$$

si ricava

$$\omega_n \geq 10.65 \text{ rad/sec.}$$

Si effettua dunque il progetto con $\omega_n = 12 \text{ rad/sec}$. La funzione di trasferimento campione è

$$G_0(s) = \frac{1/3}{\left(\frac{s}{12} \right)^3 + 2 \left(\frac{s}{12} \right)^2 + 2 \left(\frac{s}{12} \right) + 1} = \frac{576}{s^3 + 24s^2 + 288s + 1728}.$$

La funzione di trasferimento del regolatore è

$$G_c(s) = \frac{G_0(s)H(s)}{1 - G_0(s)H(s)} \cdot \frac{1}{G(s)H(s)} = \frac{19.2(s+1)(s+3)(s+10)(s+20)}{s(s^3 + 44s^2 + 768s + 7488)}.$$

d) La funzione di trasferimento relativa alla presenza di un disturbo d sull'uscita è data da:

$$\begin{aligned} G_{cd}(s) &= \frac{1}{1 + G_c(s)G(s)H(s)} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{G_0(s)H(s)}{1 - G_0(s)H(s)} \frac{1}{G(s)H(s)} G(s)H(s)} \\ &= \frac{1}{\frac{1 - G_0(s)H(s) + G_0(s)H(s)}{1 - G_0(s)H(s)}} \\ &= 1 - G_0(s)H(s). \end{aligned}$$

Il valore del modulo di $G_{cd}(j\omega)$ in corrispondenza della pulsazione 1 rad/sec è dato da

$$|G_{cd}(j)| = 0.2163 = -13.3 \text{ db.}$$

Quindi la reiezione dei disturbi sull'uscita alla pulsazione di 1 rad/sec risulta essere uguale a 13.3 db .

e) Assumendo che il blocco NL sia costituito da un guadagno unitario, la funzione guadagno d'anello del sistema coincide con la funzione $G_1(s)$. Comportamento per $\omega \rightarrow 0^+$:

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow 0^+} |G_1(j\omega)| &= \infty, \\ \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \angle G_1(j\omega) &= -\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

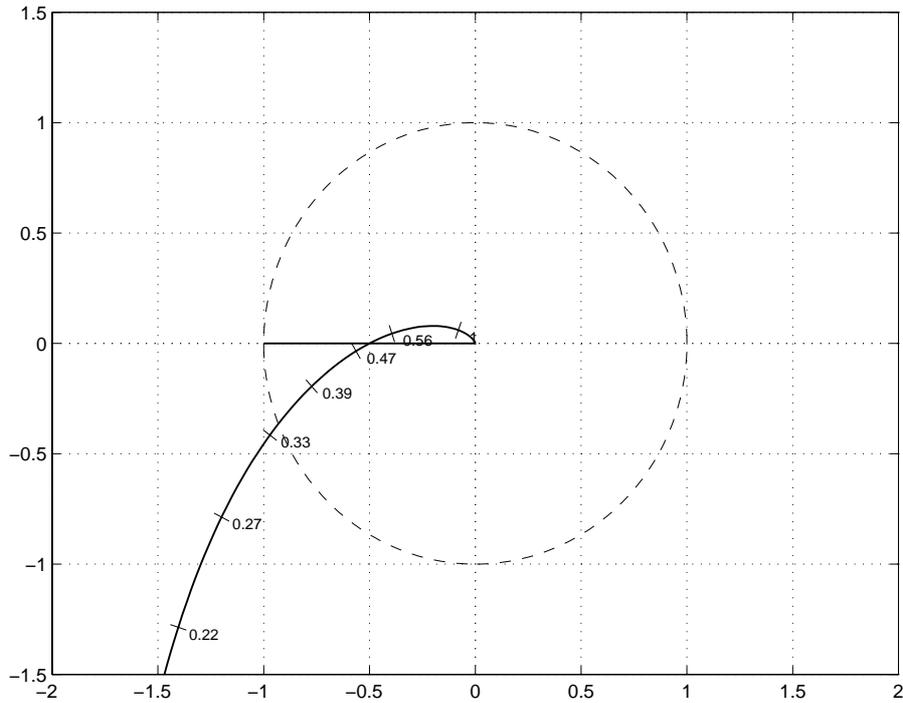


Fig. 7: Oscillazioni autosostenute.

Ascissa dell'asintoto parallelo all'asse immaginario:

$$\sigma_a = 0.5(-2 - 2) = -2.$$

Comportamento per $\omega \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow \infty} |G_1(j\omega)| &= 0, \\ \lim_{\omega \rightarrow \infty} \angle G_1(j\omega) &= -\frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$

Per il calcolo della intersezione con il semiasse reale negativo si osserva che deve essere

$$\text{atan } 2\omega^* = \pi/4 \implies \omega^* = 0.5,$$

quindi

$$\sigma_a = |G_1(j0.5)| = 0.5.$$

Il diagramma di Nyquist della funzione guadagno d'anello è mostrato in Fig.7.

f) Poiché la funzione $G_1(s)$ è di tipo 1, indipendentemente dal valore del riferimento, deve essere $y=0$. Quindi il punto di lavoro del sistema sulla caratteristica dell'elemento non lineare è il punto di coordinate $(x_0, y_0) = (1, 0)$. Corrispondentemente, il valore assunto dall'uscita c in condizioni stazionarie deve essere tale da rendere soddisfatta la condizione

$$x = r - c, \quad \text{con } r = 4 \quad \text{e} \quad x = 1,$$

per cui risulta $c=3$. In definitiva, è $(x_0, y_0, c_0) = (1, 0, 3)$. L'andamento qualitativo della funzione descrittiva dell'elemento non lineare nell'intorno del punto di lavoro è rappresentato in Fig.8.

g) L'intersezione fra i diagrammi di $G_1(j\omega)$ e di $-1/F(X)$ si ha in corrispondenza dell'ascissa σ_a e della pulsazione ω^* determinate al punto e). Per il calcolo dell'ampiezza X dell'oscillazione, si ipotizza che il blocco non lineare lavori in corrispondenza di un valore della X per il quale la caratteristica coincide con quella del relé ideale. In tal caso si ha

$$-\frac{1}{F(X)} = -\frac{\pi X}{8} = -0.5 \implies X = 1.2732.$$

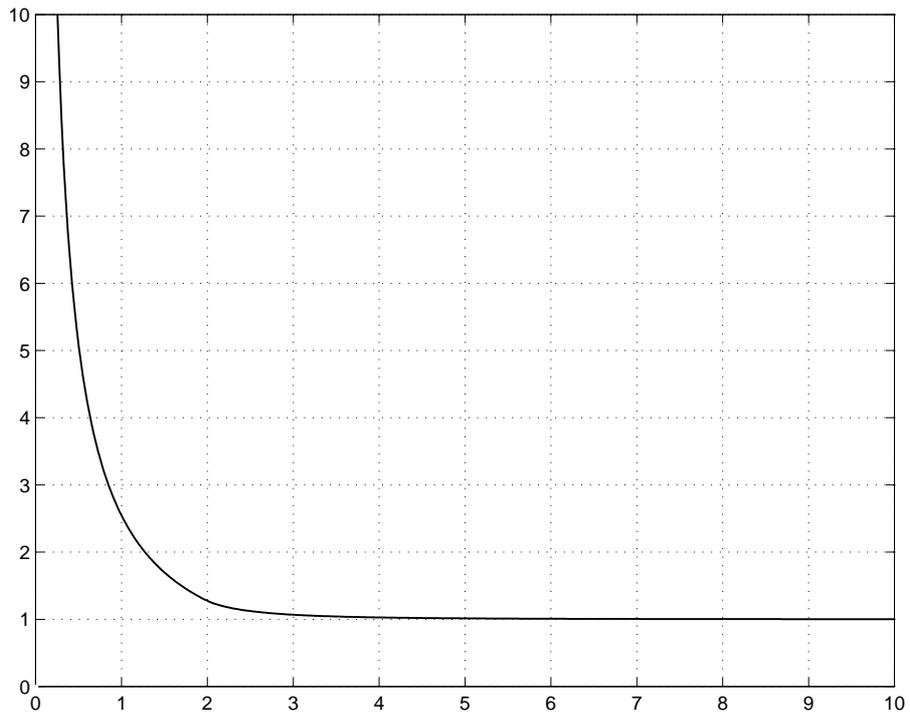


Fig. 8: Funzione descrittiva.

Dunque l'ampiezza dell'oscillazione è tale per cui l'ipotesi formulata è effettivamente soddisfatta. L'ampiezza della fondamentale all'uscita del blocco non lineare è

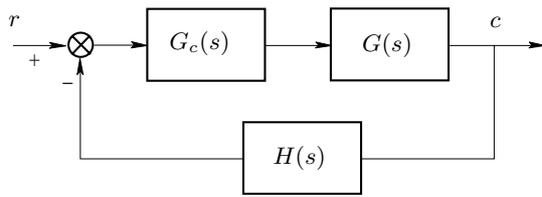
$$\frac{4Y_1}{\pi} = 2.5465.$$

D'altra parte si è visto al punto e) che $|G_1(j0.5)| = 0.5$, per cui l'ampiezza della fondamentale all'uscita del sistema è

$$|G_1(j0.5)| \frac{4Y_1}{\pi} = 1.2732.$$

Prova scritta di Controlli Automatici # 7

Si consideri il sistema in retroazione rappresentato dal diagramma a blocchi di Fig.1.



$$G(s) = \frac{4}{1 + 2.5s + s^2},$$

$$H(s) = \frac{1}{1 + 0.05s}.$$

Fig. 1: Sistema in retroazione.

- a) Assumendo $G_c(s) = 1$, si traccino i diagrammi asintotici di Bode (delle ampiezze e delle fasi) della funzione guadagno d'anello del sistema $G_l(s) = G(s)H(s)$.
- b) Il comportamento ideale del sistema sia descritto dalla relazione $c(t) = K_c r(t)$ con $K_c = 1$. Assumendo $G_c(s) = 1$, si determini il valore dell'errore a regime riferito all'ingresso nella risposta al gradino unitario.
- c) Assumendo $G_c(s) = K$ con $K > 0$, si determini il valore di K per il quale il sistema presenta un errore a regime riferito all'ingresso nella risposta al gradino unitario uguale a 0.02.
- d) Si analizzi la possibilità (o meno) di rendere soddisfatte le specifiche elencate nel seguito realizzando il blocco $G_c(s)$ mediante un guadagno pari al valore calcolato al precedente punto c) e una rete anticipatrice. Le specifiche che devono essere soddisfatte dal sistema compensato sono:

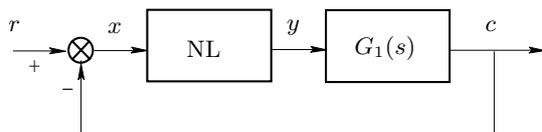
- errore a regime riferito all'ingresso nella risposta al gradino unitario uguale a 0.02;
- margine di fase uguale a 60° .

A questo scopo, si suggerisce di utilizzare i diagrammi di Bode asintotici della funzione guadagno d'anello (opportunamente amplificata) per individuare approssimativamente il valore della pulsazione di incrocio, di determinare poi per via analitica modulo e fase della stessa funzione guadagno d'anello in corrispondenza di varie pulsazioni opportunamente scelte (ad es. $\omega = 7$ rad/sec, $\omega = 10$ rad/sec e $\omega = 20$ rad/sec) e di calcolare infine, in corrispondenza di ciascuna di tali pulsazioni, il massimo anticipo di fase ottenibile con tale tipo di rete correttiva.

- e) Utilizzando le formule di inversione,¹ si progetti la rete ritardatrice che assegna al sistema compensato

- errore a regime riferito all'ingresso nella risposta al gradino unitario uguale a 0.02;
- margine di fase uguale a 60° alla pulsazione $\omega = 1$ rad/sec.

- f) Si consideri il sistema in retroazione rappresentato in Fig.2. Assumendo che il blocco NL sia costituito da un guadagno unitario, si tracci il diagramma di Nyquist della funzione guadagno d'anello del sistema.



$$G_1(s) = \frac{2}{s(1 + 0.5s)^2}.$$

Fig. 2: Sistema in retroazione unitaria.

- g) Con riferimento al sistema introdotto al punto f) ed assumendo che il blocco NL sia costituito da un relé ideale di ampiezza $Y_1 = 4$, si determinino la pulsazione ω^* dell'oscillazione autosostenuta presente nel sistema con $r = 0$ e l'ampiezza della sinusoide all'ingresso del relé. Si determini infine l'ampiezza della fondamentale all'uscita del sistema.

¹Le formule di inversione per la rete anticipatrice sono:

$$\alpha = \frac{M \cos \varphi - 1}{M(M - \cos \varphi)}, \quad \omega \tau = \frac{M - \cos \varphi}{\sin \varphi}.$$

Le stesse valgono anche per la rete ritardatrice invertendo M e cambiando di segno φ .

Soluzione

a) Funzione guadagno d'anello (in forma con costanti di tempo):

$$G_l(s) = \frac{4}{(1+2s)(1+0.5s)(1+0.05s)}.$$

Pulsazioni alle quali si ha una variazione di pendenza del diagramma asintotico delle ampiezze:

$$\omega_1 = 0.5, \quad \omega_2 = 2, \quad \omega_3 = 20.$$

Posizionamento verticale del diagramma asintotico delle ampiezze:

$$G_l(0) = 4 = 12.0412\text{db}.$$

Fase iniziale:

$$\varphi_0 = 0.$$

Fase finale:

$$\varphi_f = -3\frac{\pi}{2}.$$

Ciascun polo (reale e stabile) introduce uno sfasamento complessivo, per ω che va da 0 a ∞ , di ampiezza $\pi/2$ e di segno negativo. I diagrammi di Bode sono riportati in Fig.3 e in Fig.4.

b) Per l'errore a regime riferito all'ingresso nella risposta al gradino unitario si ha:

$$e_{i,r} = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G_{eq}(s)},$$

con

$$G_{eq}(s) = \frac{G(s)}{K_c + G(s)[K_c H(s) - 1]}.$$

Nel caso specifico è

$$G_{eq}(s) = \frac{4(s+20)}{s^3 + 22.5s^2 + 47s + 20}.$$

Quindi è

$$e_{i,r} = \frac{1}{1 + G_{eq}(0)} = \frac{1}{1 + 4} = 0.20.$$

c) In questo caso, per l'errore a regime riferito all'ingresso nella risposta al gradino unitario si ha:

$$e_{i,r} = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G_{eq}^{(I)}(s)},$$

con

$$G_{eq}^{(I)}(s) = \frac{KG(s)}{K_c + KG(s)[K_c H(s) - 1]}.$$

Nel caso specifico è

$$G_{eq}^{(I)}(0) = 4K.$$

Quindi è

$$e_{i,r} = \frac{1}{1 + G_{eq}^{(I)}(0)} = \frac{1}{1 + 4K} < 0.02,$$

da cui segue

$$K = 12.25.$$

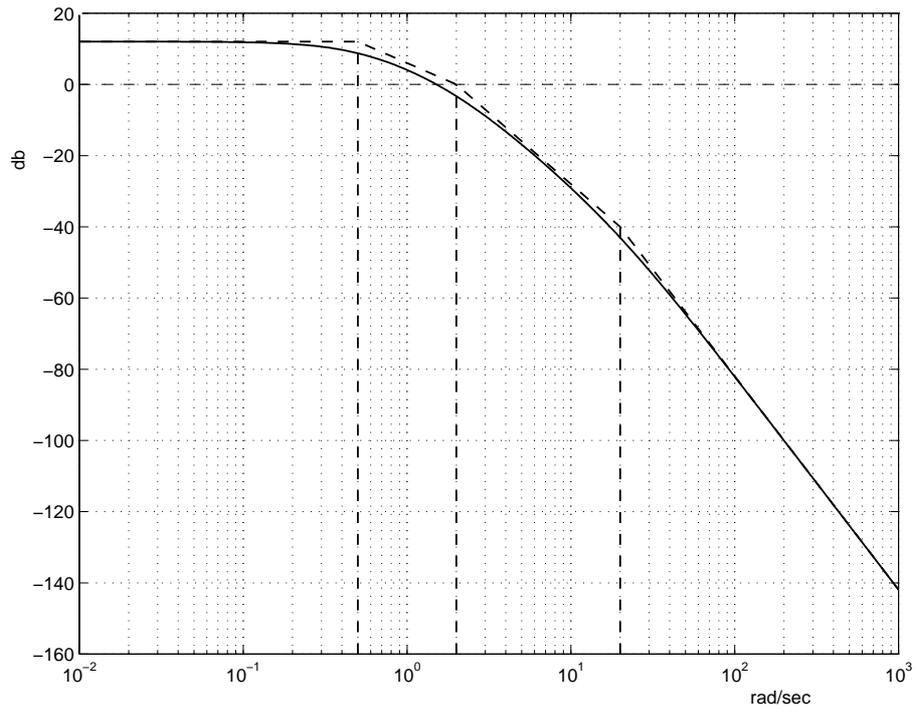


Fig. 3: Diagramma di Bode delle ampiezze della funzione guadagno d'anello.

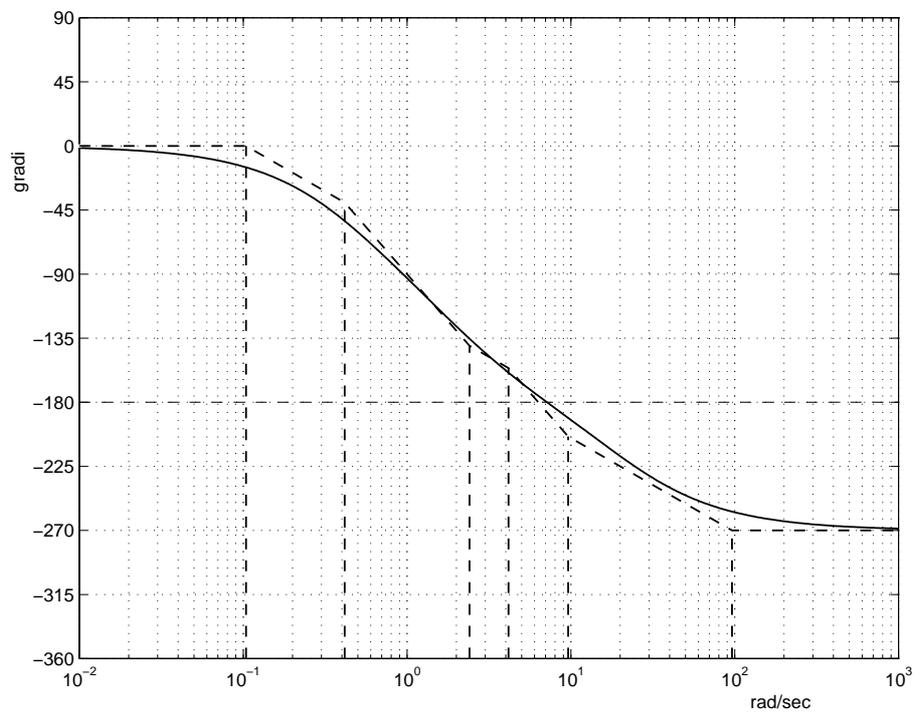


Fig. 4: Diagramma di Bode delle fasi della funzione guadagno d'anello.

d) Come si è mostrato al punto c), per garantire che sia soddisfatta la prima specifica è necessario introdurre nella catena di amplificazione diretta il guadagno

$$K = 12.25 = 21.7627 \text{ db}.$$

Ai fini del progetto della rete correttiva, la funzione guadagno d'anello da considerare, indicata con $G_a(s)$ è pertanto data da

$$G_a(s) = KG(s)H(s) = \frac{49}{(1+2s)(1+0.5s)(1+0.05s)}.$$

Il diagramma di Bode asintotico delle ampiezze della $G_a(j\omega)$ coincide con quella della $G_l(s)$ tracciato al punto a) a meno di una traslazione verso l'alto di 21.7627 db. Tale diagramma è presentato in Fig.5. Il diagramma di Bode asintotico delle fasi della $G_a(j\omega)$ coincide con quella della $G_l(s)$ tracciato al punto a). Il diagramma delle ampiezze permette di leggere per la pulsazione di rottura il valore $\omega = 7 \text{ rad/sec}$. Come verifica, si calcolano innanzitutto modulo a fase della $G_a(j\omega)$ in corrispondenza di tale valore di ω . Si ha

$$\begin{aligned} |G_a(j\omega)| &= 0.9052 = -0.8648 \text{ db}, \\ \angle G_a(j\omega) &= -179.3^\circ, \\ \varphi_{\max} &= \arccos \frac{1}{M} = \arccos 0.9052 = 0.4389 \text{ rad} = 25.1498^\circ, \\ \angle G_a(j\omega) + \varphi_{\max} &= -179.3^\circ + 25.1498^\circ = -154.1502^\circ. \end{aligned}$$

Si considerano ora alcune pulsazioni a destra della pulsazione di rottura. Per $\omega = 10 \text{ rad/sec}$ si ha

$$\begin{aligned} |G_a(j\omega)| &= 0.4292 = -7.346 \text{ db}, \\ \angle G_a(j\omega) &= -192.4^\circ, \\ \varphi_{\max} &= \arccos \frac{1}{M} = \arccos 0.4292 = 1.1272 \text{ rad} = 64.5832^\circ, \\ \angle G_a(j\omega) + \varphi_{\max} &= -192.4^\circ + 64.5832^\circ = -127.8168^\circ. \end{aligned}$$

Per $\omega = 20 \text{ rad/sec}$ si ha

$$\begin{aligned} |G_a(j\omega)| &= 0.08616 = -21.29 \text{ db}, \\ \angle G_a(j\omega) &= -217.9^\circ, \\ \varphi_{\max} &= \arccos \frac{1}{M} = \arccos 0.08616 = 1.4845 \text{ rad} = 85.0573^\circ, \\ \angle G_a(j\omega) + \varphi_{\max} &= -217.9^\circ + 85.0573^\circ = -132.8427^\circ. \end{aligned}$$

Alle pulsazioni considerate la rete anticipatrice non consente di imporre il margine di fase desiderato. Per interpolazione, si può ritenere che questo sia vero anche per le pulsazioni intermedie. Dunque, si può concludere che la rete anticipatrice non consente di rendere soddisfatte le specifiche.

e) Come si è mostrato al punto c), per garantire che sia soddisfatta la prima specifica è necessario introdurre nella catena di amplificazione diretta il guadagno

$$K = 12.25 = 21.7627 \text{ db}.$$

Ai fini del progetto della rete correttiva, la funzione guadagno d'anello da considerare è dunque la stessa $G_a(s)$ determinata al punto d). Per $\omega = 1 \text{ rad/sec}$ si ha

$$\begin{aligned} |G_a(j\omega)| &= 19.58 = 25.83 \text{ db}, \\ \angle G_a(j\omega) &= -92.86^\circ, \\ \varphi_{\max} &= \arccos \frac{1}{M} = \arccos \frac{1}{19.58} = 1.5197 \text{ rad} = 87.0725^\circ, \\ \angle G_a(j\omega) - \varphi_{\max} &= -92.86^\circ - 87.0725^\circ = -179.9325^\circ. \end{aligned}$$

Dunque, alla pulsazione considerata, la rete ritardatrice consente di imporre il margine di fase desiderato. Il ritardo di fase φ e l'attenuazione M che la rete deve fornire sono dati da

$$\begin{aligned} \varphi &= -92.86^\circ + 120^\circ = 27.14^\circ = 0.4737 \text{ rad}, \\ M &= 19.58. \end{aligned}$$

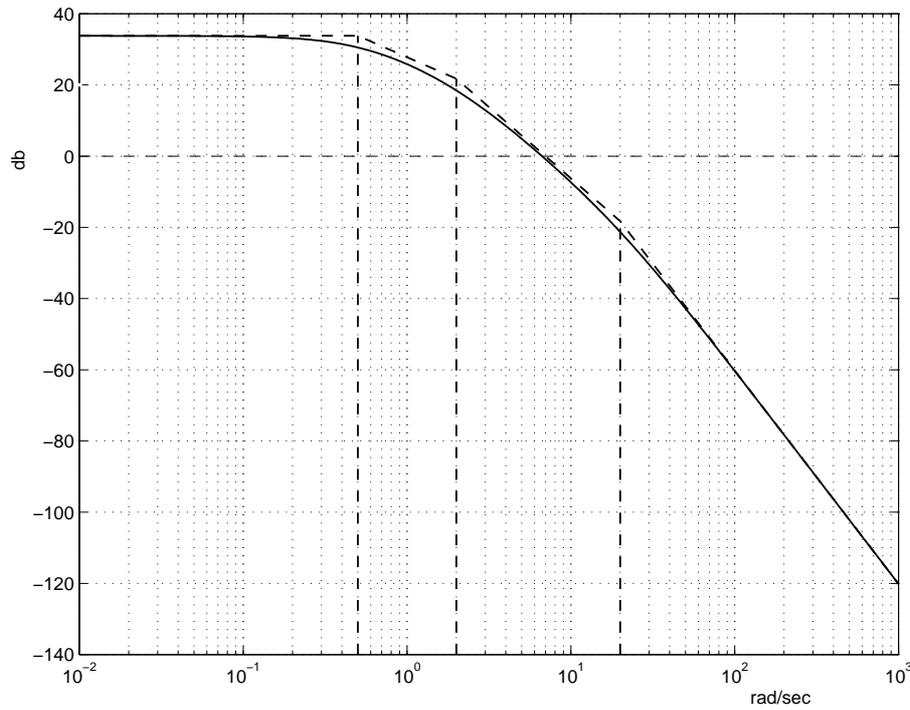


Fig. 5: Diagramma delle ampiezze della funzione guadagno d'anello amplificata.

I parametri α e τ della rete sono perciò dati da

$$\alpha = \frac{M \cos \varphi - 1}{M(M - \cos \varphi)} = 0.0476, \quad \tau = \frac{M - \cos \varphi}{\omega \sin \varphi} = 40.9707.$$

Si conclude perciò

$$G_c(s) = K \frac{1 + \alpha \tau s}{1 + \tau s} = 12.25 \frac{0.0476(s + 0.5128)}{s + 0.02441} = \frac{0.5831(s + 0.5128)}{s + 0.02441}.$$

f) Assumendo che il blocco NL sia costituito da un guadagno unitario, la funzione guadagno d'anello del sistema coincide con la funzione $G_1(s)$. Comportamento per $\omega \rightarrow 0^+$:

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow 0^+} |G_1(j\omega)| &= \infty, \\ \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \angle G_1(j\omega) &= -\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Ascissa dell'asintoto parallelo all'asse immaginario:

$$\sigma_a = 2(-0.5 - 0.5) = -2.$$

Comportamento per $\omega \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow \infty} |G_1(j\omega)| &= 0, \\ \lim_{\omega \rightarrow \infty} \angle G_1(j\omega) &= -\frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$

Per il calcolo della intersezione con il semiasse reale negativo si osserva che deve essere

$$\arctan 0.5\omega^* = \pi/4 \quad \implies \quad \omega^* = 2,$$

quindi

$$\sigma_0 = -|G_1(2j)| = -0.5.$$

Il diagramma di Nyquist della funzione guadagno d'anello è mostrato in Fig.6.

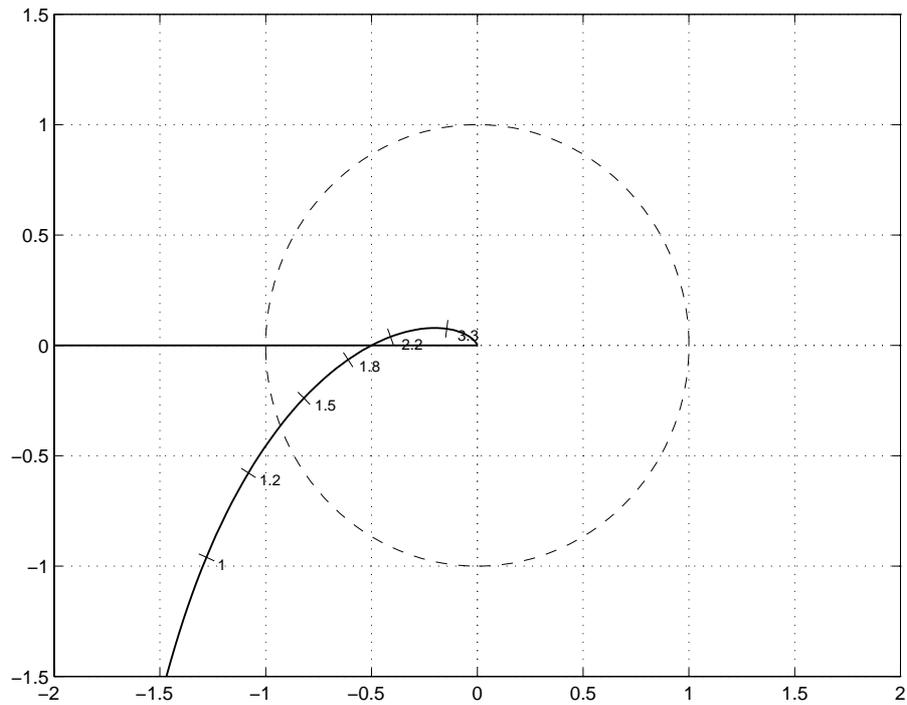


Fig. 6: Oscillazioni autosostenute.

g) La funzione descrittiva $F(X)$ del relé ideale di ampiezza $Y_1 = 4$ è

$$F(X) = \frac{4Y_1}{\pi X} = \frac{16}{\pi X}.$$

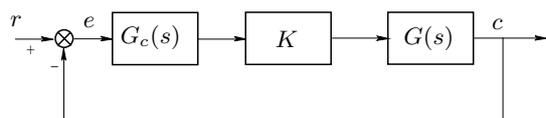
Anche la costruzione grafica per verificare l'esistenza di eventuali oscillazioni autosostenute è mostrata in Fig.6. La pulsazione dell'oscillazione autosostenuta coincide con la pulsazione $\omega^* = 2$ rad/sec determinata al punto f). L'ampiezza della sinusoide all'ingresso del relé è

$$-\frac{1}{F(X)} = -0.5 \quad \Rightarrow \quad X = \frac{16 \cdot 0.5}{\pi} = 2.5465.$$

L'ampiezza della fondamentale all'uscita del sistema coincide con l'ampiezza della fondamentale all'ingresso del relé, essendo la retroazione unitaria.

Prova scritta di Controlli Automatici # 8

Si consideri il sistema in retroazione rappresentato dal diagramma a blocchi di Fig.1.



$$G(s) = \frac{12}{s(s+1)(s+12)}.$$

Fig. 1: Sistema in retroazione.

- a) Assumendo $G_c(s) = 1$, si determini l'intervallo di valori di K per i quali il sistema in retroazione è stabile asintoticamente.
- b) Assumendo $G_c(s) = 1$, si determini il valore di K per il quale l'errore a regime nella risposta alla rampa unitaria è uguale a 0.1.
- c) Assumendo $G_c(s) = 1$ e $K = 10$, si traccino i diagrammi asintotici di Bode (delle ampiezze e delle fasi) della funzione guadagno d'anello del sistema.
- d) Assumendo $K = 10$, si analizzi la possibilità di conferire al sistema in retroazione margine di fase $M_f = 50^\circ$ realizzando il blocco $G_c(s)$ mediante una rete anticipatrice. A questo scopo, si suggerisce di utilizzare i diagrammi di Bode asintotici della funzione guadagno d'anello per individuare approssimativamente il valore della pulsazione di incrocio, di determinare poi per via analitica modulo e fase della stessa funzione guadagno d'anello in corrispondenza di varie pulsazioni opportunamente scelte (ad es. $\omega = 4$ rad/sec, $\omega = 5$ rad/sec e $\omega = 10$ rad/sec) e di calcolare infine, in corrispondenza di ciascuna di tali pulsazioni, il massimo anticipo di fase ottenibile con tale tipo di rete correttiva.
- e) Utilizzando le formule di inversione¹ si progetti la rete correttiva che assegna al sistema compensato il margine di fase $M_f = 50^\circ$ alla pulsazione $\omega = 5$ rad/sec.
- f) Si consideri il sistema in retroazione rappresentato in Fig.2. Si applichi il criterio di Popov per analizzare la stabilità asintotica globale del punto di equilibrio corrispondente al valore costante del riferimento $r = 0$. A questo scopo, si tenga conto del fatto che il diagramma di Popov della $G_1(s)$ è convesso.

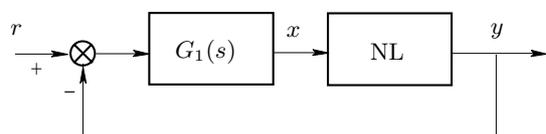


Fig. 2: Sistema non lineare in retroazione.

$$G_1(s) = \frac{120}{s(s+1)(s+12)}.$$

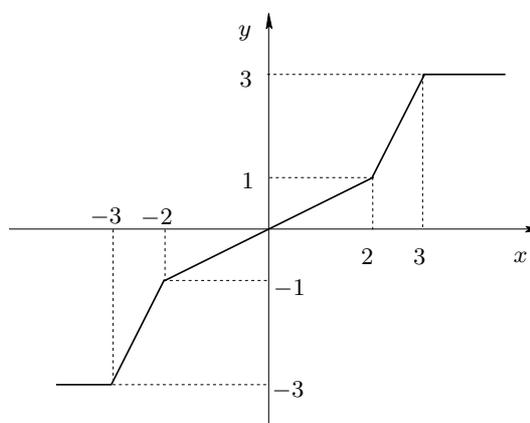


Fig. 3: Caratteristica dell'elemento non lineare.

- g) Con riferimento al sistema introdotto al punto f), e ancora utilizzando il criterio di Popov, si analizzi la stabilità asintotica globale del punto di equilibrio corrispondente al valore costante del riferimento $r = 2$.

¹Le formule di inversione per la rete anticipatrice sono:

$$\alpha = \frac{M \cos \varphi - 1}{M(M - \cos \varphi)}, \quad \omega \tau = \frac{M - \cos \varphi}{\sin \varphi}.$$

Le stesse valgono anche per la rete ritardatrice invertendo M e cambiando di segno φ .

Soluzione

a) Equazione caratteristica:

$$1 + \frac{12K}{s(s+1)(s+12)} = 0 \quad \Rightarrow \quad s^3 + 13s^2 + 12s + 12K = 0.$$

Tabella di Routh:

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 12 \\ 2 & 13 & 12K \\ 1 & 12(13-K) & 0 \\ 0 & 144K(13-K) & \end{array}$$

Condizioni ricavate dalla tabella di Routh:

$$(13 - K > 0 \text{ and } K > 0) \quad \Rightarrow \quad 0 < K < 13.$$

b) Per l'errore a regime nella risposta alla rampa unitaria si ha:

$$e_r = \frac{1}{K_v}, \quad \text{con } K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s K G(s).$$

Nel caso specifico è

$$e_r = \frac{1}{K_v} = \frac{12}{12K} = \frac{1}{K},$$

da cui, imponendo $e_r = 0.1$, si deduce $K = 10$.

c) Funzione guadagno d'anello (in forma con costanti di tempo):

$$G_a(s) = 10 \frac{1}{s(1+s)(1+0.0833s)}.$$

Pulsazioni alle quali si ha una variazione di pendenza del diagramma asintotico delle ampiezze:

$$\omega_1 = 1, \quad \omega_2 = 12.$$

Posizionamento verticale del diagramma asintotico delle ampiezze:

$$\alpha(\bar{\omega}) = \frac{|s^h G_a(s)|_{s=0}}{\bar{\omega}^h} = 10 = 20 \text{ db},$$

essendo $h = 1$ ed avendo considerato $\bar{\omega} = 1$. Fase iniziale:

$$\varphi_0 = -h \frac{\pi}{2} - \bar{\varphi} = -\frac{\pi}{2},$$

essendo $h = 1$ e $\bar{\varphi} = 0$. Fase finale:

$$\varphi_f = -3 \frac{\pi}{2}.$$

Ciascun polo (reale e stabile) introduce uno sfasamento complessivo, per ω che va da 0 a ∞ , di ampiezza $\pi/2$ e di segno negativo. I diagrammi di Bode sono riportati in Fig.4 e in Fig.5.

d) Il diagramma delle ampiezze di $G_a(s)$ permette di leggere per la pulsazione di rottura il valore $\omega = 3$ db. Come verifica, si calcolano innanzitutto modulo a fase della $G_a(j\omega)$ in corrispondenza di tale valore di ω . Si ha

$$\begin{aligned} |G_a(3j)| &= 1.023 = 0.1943 \text{ db}, \\ \angle G_a(3j) &= -175.6^\circ. \end{aligned}$$

Si considerano ora alcune pulsazioni a destra della pulsazione di rottura. Per $\omega = 4$ rad/sec si ha

$$\begin{aligned} |G_a(4j)| &= 0.5752 = -4.803 \text{ db}, \\ \angle G_a(4j) &= -184.4^\circ, \\ \varphi_{\max} &= \arccos \frac{1}{M} = \arccos 0.5752 = 0.9579 \text{ rad} = 54.8864^\circ, \\ \angle G_a(4j) + \varphi_{\max} &= -184.4^\circ + 54.8864^\circ = -129.5136^\circ. \end{aligned}$$

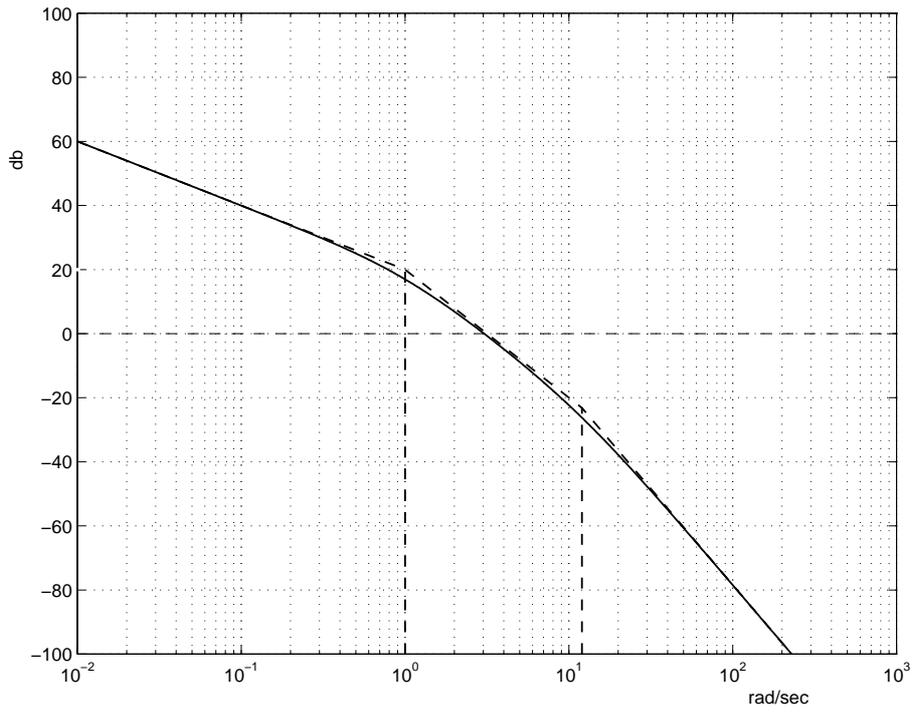


Fig. 4: Diagramma di Bode delle ampiezze della funzione guadagno d'anello.

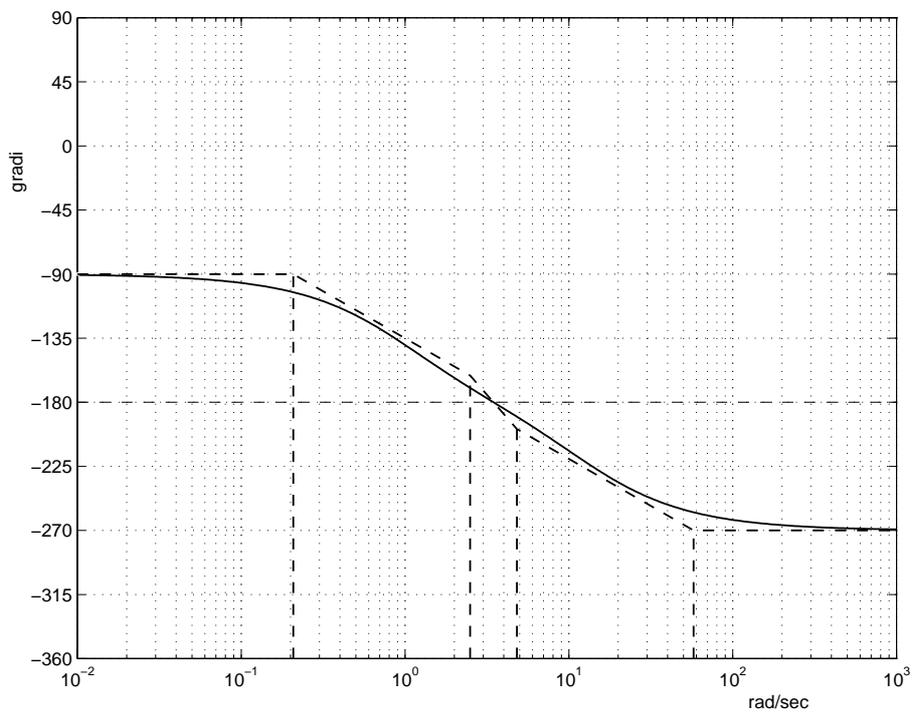


Fig. 5: Diagramma di Bode delle fasi della funzione guadagno d'anello.

Per $\omega = 5$ rad/sec si ha

$$\begin{aligned} |G_a(5j)| &= 0.3621 = -8.824 \text{ db}, \\ \angle G_a(5j) &= -191.3^\circ, \\ \varphi_{\max} &= \arccos \frac{1}{M} = \arccos 0.3621 = 1.2003 \text{ rad} = 68.7708^\circ, \\ \angle G_a(5j) + \varphi_{\max} &= -191.3^\circ + 68.7708^\circ = -122.5292^\circ. \end{aligned}$$

Per $\omega = 10$ rad/sec si ha

$$\begin{aligned} |G_a(10j)| &= 0.07644 = -22.33 \text{ db}, \\ \angle G_a(10j) &= -214.1^\circ, \\ \varphi_{\max} &= \arccos \frac{1}{M} = \arccos 0.07644 = 1.4943 \text{ rad} = 85.6160^\circ, \\ \angle G_a(10j) + \varphi_{\max} &= -214.1^\circ + 85.6160^\circ = -128.4840^\circ. \end{aligned}$$

L'analisi effettuata permette di asserire che esiste un intervallo di valori della pulsazione (all'incirca compreso fra 4 rad/sec e 10 rad/sec) in corrispondenza dei quali una rete anticipatrice consente di imporre il margine di fase desiderato.

e) Modulo e argomento di $G_a(j\omega)$ alla pulsazione $\omega = 5$ rad/sec sono già stati calcolati al punto d), dove si è anche verificata la possibilità di rendere soddisfatta la specifica sul margine di fase impiegando una rete anticipatrice in corrispondenza di un intervallo di pulsazioni che, in particolare, comprende $\omega = 5$ rad/sec. In corrispondenza della pulsazione $\omega = 5$ rad/sec, l'amplificazione e l'anticipo di fase che la rete deve fornire sono rispettivamente

$$M = \frac{1}{|G_a(5j)|} = \frac{1}{0.3621} = 2.7617,$$

e

$$\varphi = -130^\circ + 191.3^\circ = 61.3^\circ = 1.06699.$$

Dunque, per i parametri della rete correttiva si ha

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{M \cos \varphi - 1}{M(M - \cos \varphi)} = \frac{2.7617 \cos 1.0699 - 1}{2.7617(2.7617 - \cos 1.0699)} = 0.0518, \\ \tau &= \frac{M - \cos \varphi}{\omega \sin \varphi} = \frac{2.7617 - \cos 1.0699}{5 \sin 1.0699} = 0.5202. \end{aligned}$$

Si conclude perciò

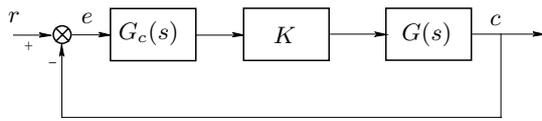
$$G_c(s) = \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s} = \frac{1 + 0.5202s}{1 + 0.02695s}.$$

f) Il punto di lavoro del sistema in corrispondenza del valore nullo del riferimento si trova intersecando la retta $y = r = 0$ con la caratteristica dell'elemento non lineare e coincide perciò con l'origine. Tutta la caratteristica dell'elemento non lineare è contenuta in un settore centrato nell'origine e delimitato dalla retta con pendenza $\beta = 1$. Si osserva che $G_1(s) = 10G(s)$ dove la $G(s)$ è la funzione di trasferimento introdotta al punto a). Poiché il K limite di stabilità determinato al punto a) per $G(s)$ è uguale a 13, l'intersezione con il semiasse reale negativo del diagramma di Nyquist (e quindi anche del diagramma di Popov) della $G_1(s)$ avviene nel punto $\sigma_0 = -10/13 = -0.769$ e quindi a destra del punto -1 . Essendo infine il diagramma di Popov della $G_1(s)$ convesso, si può concludere che esiste una retta per $-1/\beta = -1$ che non interseca nè tocca il diagramma di Popov della $G_1(s)$ e quindi il punto di equilibrio considerato è globalmente stabile asintoticamente.

g) Il punto di lavoro del sistema in corrispondenza del valore del riferimento $r = 2$ si trova intersecando la retta $y = r = 2$ con la caratteristica dell'elemento non lineare ed è perciò il punto di coordinate $(2.5, 2)$. Traslando il settore $[0, \beta]$ (con $\beta = 1$ secondo quanto determinato al punto precedente) nel nuovo punto di lavoro, si vede che tale settore non contiene tutta la caratteristica dell'elemento non lineare. Si deve perciò scegliere un settore $[0, \beta_1]$ (con $\beta_1 = 2$, pendenza della caratteristica dell'elemento non lineare nel nuovo punto di lavoro). Poiché il punto $-1/\beta_1 = -1/2$ si trova a sinistra di σ_0 si può concludere che il nuovo punto di lavoro non è globalmente stabile asintoticamente.

Prova scritta di Controlli Automatici # 9

Si consideri il sistema in retroazione rappresentato dal diagramma a blocchi di Fig.1.



$$G(s) = \frac{s-1}{(s+2)(s+10)}.$$

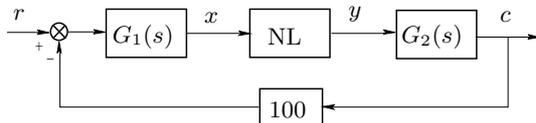
Fig. 1: Sistema in retroazione.

- a) Assumendo $G_c(s) = 1$, si determini il luogo delle radici del sistema in retroazione al variare del parametro $K > 0$.
- b) Assumendo $G_c(s) = 1$, si determini l'intervallo di valori di K per i quali il sistema in retroazione è stabile asintoticamente.
- c) Assumendo $G_c(s) = 1$ e $K = 10$, si traccino i diagrammi asintotici di Bode (delle ampiezze e delle fasi) della funzione guadagno d'anello del sistema.
- d) Assumendo $K = 10$, si progetti per via analitica un regolatore $G_c(s)$ che garantisca al sistema in retroazione errore a regime nullo nella risposta al gradino unitario e costante nella risposta alla rampa unitaria. A questo scopo si suggerisce di utilizzare come funzione di trasferimento campione una funzione del tipo:

$$G_0(s) = \beta(s - \alpha)G_B(s),$$

dove $G_B(s)$ deve essere scelta come la funzione di trasferimento di un filtro di Bessel con banda unitaria e con l'ordine minimo che consente di soddisfare la condizione di realizzabilità fisica del regolatore, α deve essere scelta in modo da conservare nella funzione di trasferimento campione lo zero instabile del sistema da controllare e β deve essere scelta in modo da rendere soddisfatta la specifica sull'errore a regime nella risposta al gradino.

- e) Si consideri il sistema in retroazione non lineare rappresentato dal diagramma a blocchi in Fig.2. Assumendo che il blocco $G_1(s)$ sia un guadagno unitario e che il blocco NL (di tipo algebrico) sia descritto dalla caratteristica ingresso-uscita riportata in Fig.3, si determini il punto di lavoro del sistema con $r = 5$. Si tracci l'andamento della funzione descrittiva $F(X)$ dell'elemento non lineare nell'intorno del punto di lavoro.



$$G_2(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+10)}.$$

Fig. 2: Sistema non lineare in retroazione.

- f) Con riferimento al sistema non lineare introdotto al punto e) e ancora assumendo $G_1(s) = 1$, si determinino la pulsazione ω^* e l'ampiezza X^* (all'ingresso dell'elemento non lineare) dell'oscillazione autosostenuta presente nel sistema con $r = 0$.
- g) Con riferimento al sistema non lineare introdotto al punto e), si progetti il blocco $G_1(s)$ come una rete anticipatrice che garantisca che l'ampiezza dell'oscillazione autosostenuta all'uscita del sistema sia uguale a 0.002. A questo scopo si suggerisce di svolgere le opportune considerazioni sul diagramma di Bode asintotico delle ampiezze di $G_2(j\omega)$ e di utilizzare, per il progetto della rete anticipatrice, le formule di inversione

$$\alpha = \frac{M \cos \varphi - 1}{M(M - \cos \varphi)}, \quad \omega\tau = \frac{M - \cos \varphi}{\sin \varphi},$$

scegliendo $M = 10$.

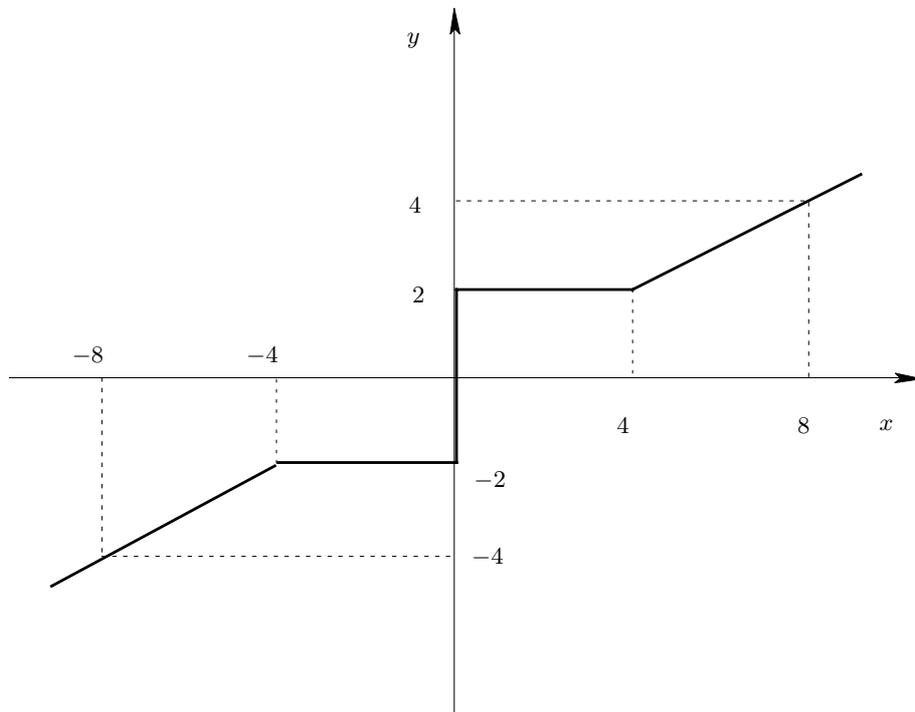


Fig. 3: Caratteristica dell'elemento non lineare.

ordine	α_8	α_7	α_6	α_5	α_4	α_3	α_2	α_1	α_0
1								1	1
2							1	1,732	1
3						1	2,433	2,466	1
4					1	3,124	4,392	3,201	1
5				1	3,811	6,777	6,886	3,936	1
6			1	4,495	9,622	12,36	9,920	4,672	1
7		1	5,178	12,93	19,93	20,27	13,49	5,407	1
8	1	5,861	16,70	29,90	36,51	30,90	17,61	6,143	1

Tab. 1: Tabella dei coefficienti dei filtri di Bessel di ordine da 1 a 8.

Soluzione

a) Poli e zeri:

$$p_1 = -2, p_2 = -10, z_1 = 1 \Rightarrow n = 2 \text{ rami e } n - m = 2 - 1 = 1 \text{ asintoto.}$$

Punti dell'asse reale che appartengono al luogo:

$$[-\infty -10] \cup [-2 1].$$

Angolo formato dall'asintoto con l'asse reale:

$$\vartheta_{a,0} = \frac{(2\nu + 1)\pi}{n - m} = \pi \text{ con } \nu = 0.$$

Il luogo delle radici è rappresentato in Fig.4.

b) Equazione caratteristica:

$$1 + \frac{K(s-1)}{(s+2)(s+10)} = 0 \Rightarrow s^2 + (12+K)s + 20 - K = 0.$$

Tabella di Routh:

$$\begin{array}{c|cc} 2 & 1 & 20 - K \\ 1 & 12 + K & 0 \\ 0 & (20 - K)(12 + K) & \end{array}$$

Condizioni ricavate dalla tabella di Routh:

$$(K > -12 \text{ and } K < 20) \Rightarrow -12 < K < 20.$$

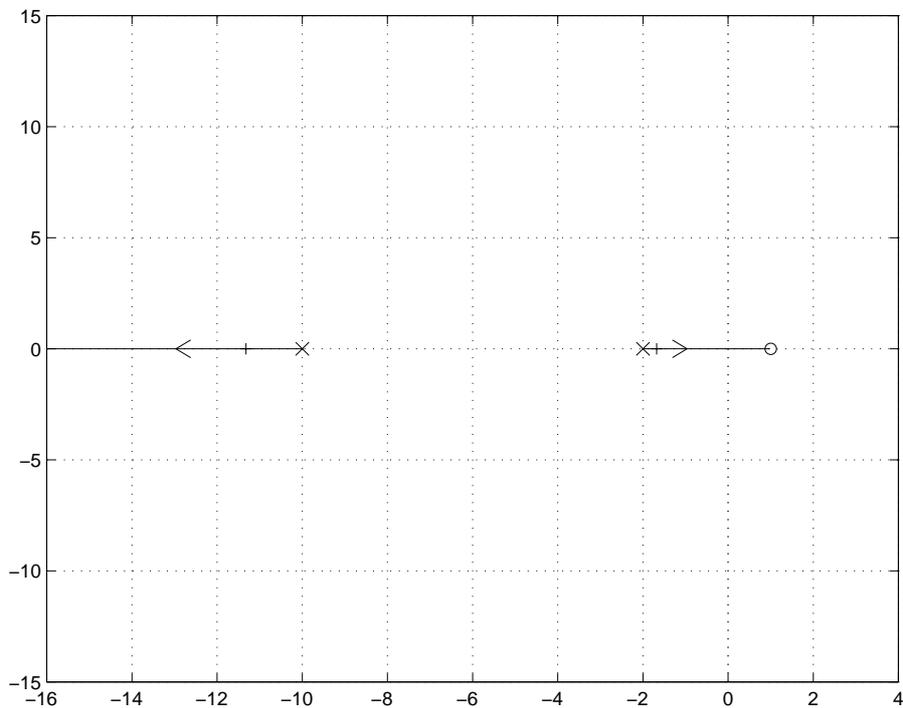


Fig. 4: Luogo delle radici.

c) Funzione guadagno d'anello (in forma fattorizzata):

$$G_a(s) = 10 \frac{(s-1)}{(s+2)(s+10)}.$$

Funzione guadagno d'anello (in forma con costanti di tempo):

$$G_a(s) = -0.5 \frac{(1-s)}{(1+0.5s)(1+0.1s)}.$$

Pulsazioni alle quali si ha una variazione di pendenza del diagramma asintotico delle ampiezze:

$$\omega_1 = 1, \quad \omega_2 = 2, \quad \omega_3 = 10$$

Posizionamento verticale del diagramma asintotico delle ampiezze:

$$|G_a(0)| = 0.5 \cong -6 \text{ db}.$$

Fase iniziale:

$$\varphi_0 = -h \frac{\pi}{2} - \bar{\varphi} = -\pi,$$

essendo $h=0$ e $\bar{\varphi}=\pi$. Fase finale:

$$\varphi_f = -\frac{5\pi}{2}.$$

Lo zero instabile introduce uno sfasamento complessivo, per ω che va da 0 a ∞ , di ampiezza $\pi/2$ e di segno negativo, così come ciascun polo (reale e stabile). I diagrammi di Bode sono riportati in Fig.5 e in Fig.6.

d) Poiché il sistema da controllare $G(s)$ ha grado relativo 1 e poiché nella funzione di trasferimento campione deve essere conservato lo zero instabile di $G(s)$ stessa, il filtro di Bessel deve essere scelto del secondo ordine. È consigliato anche di considerare la banda del filtro unitaria. Dunque,

$$G_B(s) = \frac{1}{s^2 + 1.732s + 1}.$$

Affinchè la funzione di trasferimento campione conservi lo zero instabile del sistema da controllare si deve scegliere $\alpha = 1$. Affinchè sia soddisfatta la specifica sull'errore a regime nella risposta al gradino devono essere uguali i termini noti dei polinomi a numeratore e a denominatore, per cui si deve scegliere $\beta = -1$. Dunque la funzione di trasferimento campione è

$$G_0(s) = \frac{-(s-1)}{s^2 + 1.732s + 1}.$$

Di conseguenza, la funzione di trasferimento del regolatore, risulta essere

$$G_c(s) = \frac{G_0(s)}{1 - G_0(s)} \cdot \frac{1}{G(s)} = \frac{-0.1(s+2)(s+10)}{s(s+2.732)}.$$

e) Il punto di lavoro del sistema si trova intersecando la retta $y=0$ con la caratteristica dell'elemento non lineare e coincide perciò con l'origine. Si noti che esso non dipende dal valore del riferimento. L'andamento qualitativo della funzione descrittiva dell'elemento non lineare nell'intorno del punto di lavoro è rappresentato in Fig.7. Infatti si osserva che

$$\begin{aligned} F(X) &\longrightarrow \infty && \text{per } X \longrightarrow 0+, \\ F(X) &\longrightarrow 0.5 && \text{per } X \longrightarrow \infty. \end{aligned}$$

f) Per determinare pulsazione e ampiezza dell'oscillazione autosostenuta presente nel sistema si individua l'intersezione fra il diagramma della funzione $-1/F(X)$ tracciato per X variabile da 0 a $+\infty$ e il diagramma polare della funzione di risposta armonica della parte lineare del sistema

$$G_l(s) = \frac{100}{s(s+1)(s+10)}.$$

Si ha $\varphi_0 = -\pi/2$ e $\varphi_f = -3\pi/2$. Il calcolo dell'intersezione con il semiasse reale negativo si calcola costruendo la tabella di Routh. Equazione caratteristica:

$$1 + \frac{100K}{s(s+1)(s+10)} = 0 \quad \Rightarrow \quad s^3 + 11s^2 + 10s + 100K = 0.$$

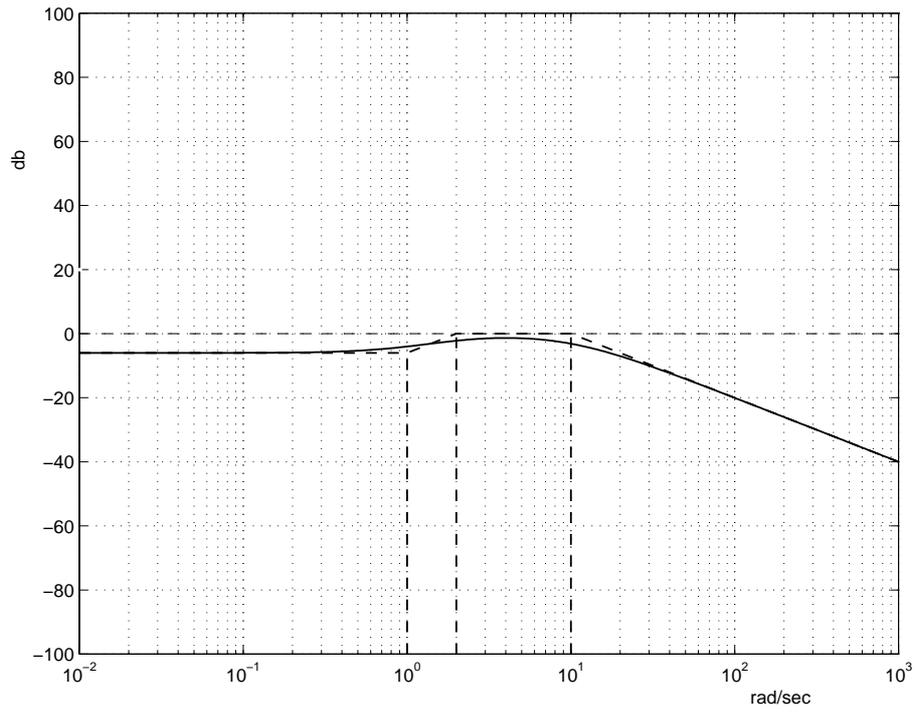


Fig. 5: Diagramma di Bode delle ampiezze della funzione guadagno d'anello.

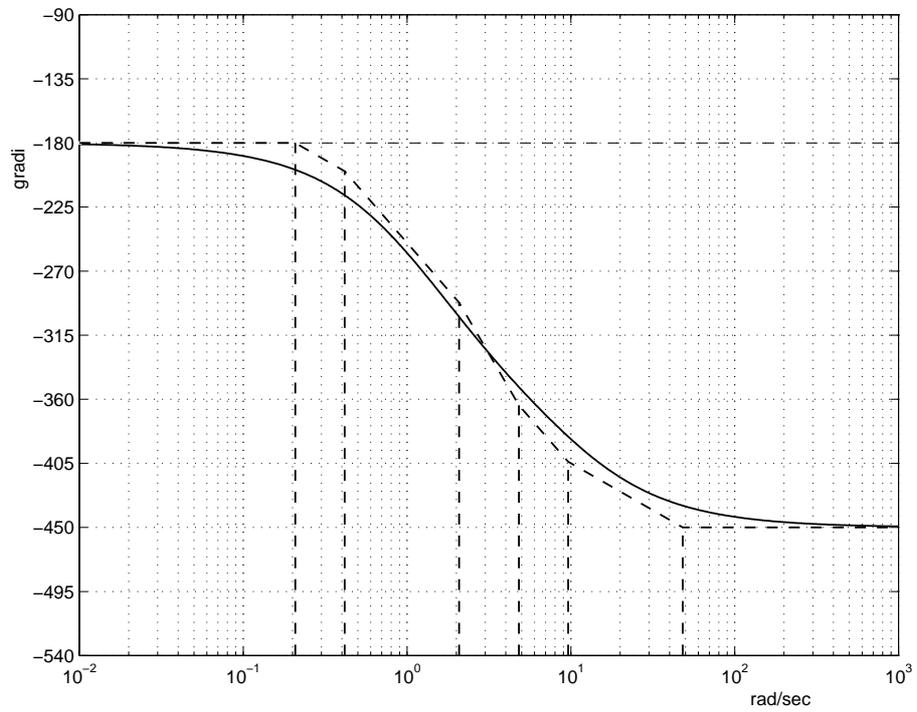


Fig. 6: Diagramma di Bode delle fasi della funzione guadagno d'anello.

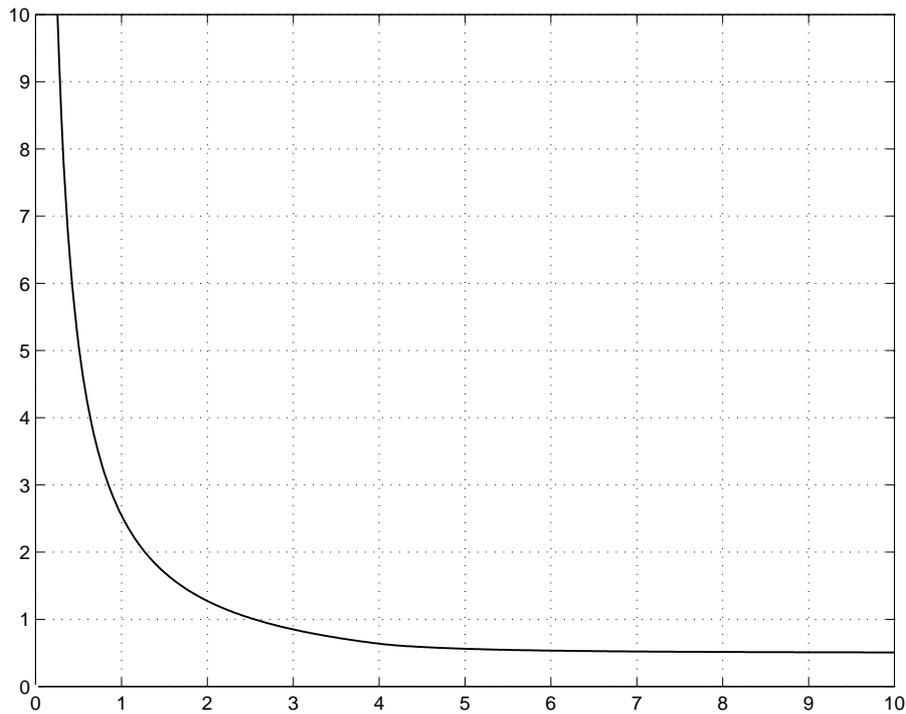


Fig. 7: Grafico della funzione descrittiva dell'elemento non lineare.

Tabella di Routh:

$$\begin{array}{c|cc}
 3 & 1 & 10 \\
 2 & 11 & 100K \\
 1 & 110 - 100K & 0 \\
 0 & 100K(110 - 100K) &
 \end{array}$$

Condizioni ricavate dalla tabella di Routh:

$$K > 0 \text{ and } K < 1.1.$$

Dunque

$$\sigma_0 = -\frac{1}{K^*} = -\frac{1}{1.1} = -0.9091.$$

La pulsazione ω^* si calcola risolvendo l'equazione ausiliaria

$$11s^2 + 110 = 0 \implies s = \pm 3.1623j,$$

da cui $\omega^* = 3.1623$ rad/sec. Per il calcolo dell'ampiezza X^* dell'oscillazione, si ipotizza che il blocco non lineare lavori in corrispondenza di un valore della X per il quale la caratteristica coincide con quella del relé ideale. Sotto tale ipotesi, si ha

$$-\frac{1}{F(X)} = -\frac{\pi X}{4Y_1} = -\frac{\pi X}{8} = -0.9091 \implies X = 2.3150 < 4.$$

Dunque l'ampiezza dell'oscillazione è tale per cui l'ipotesi formulata è effettivamente soddisfatta e quindi $X^* = 2.3150$.

g) L'ampiezza della fondamentale all'uscita del blocco non lineare è

$$\frac{4Y_1}{\pi} = \frac{8}{\pi} = 2.5465.$$

Affinchè l'ampiezza della fondamentale all'uscita del sistema sia uguale a 0.002, è necessario che $G_2(j\omega)$ introduca, alla pulsazione di oscillazione, un'attenuazione di 60 db. Si traccia perciò il diagramma di Bode asintotico

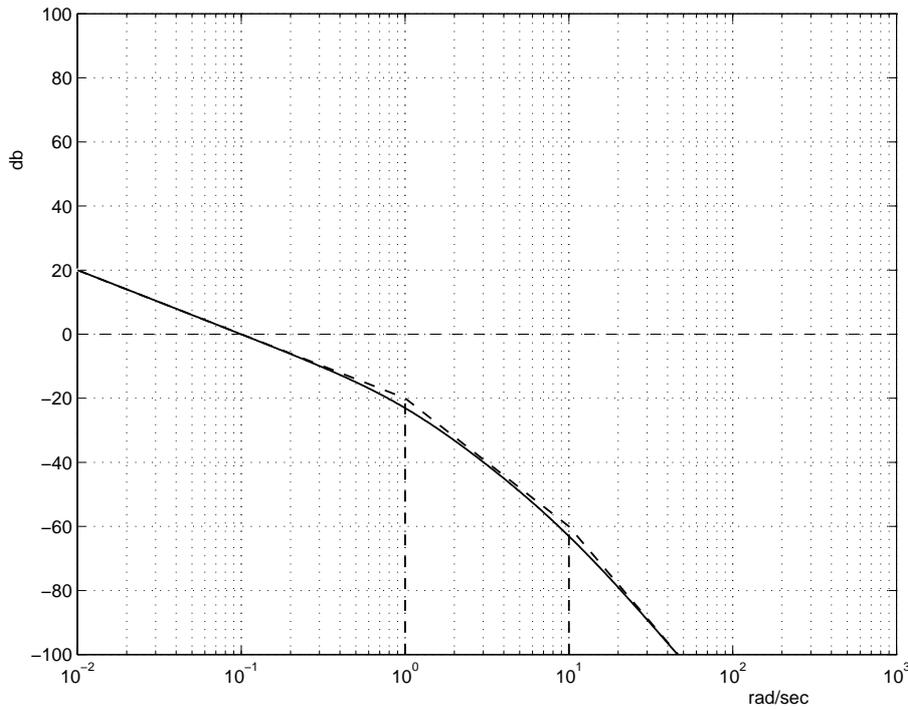


Fig. 8: Diagramma di Bode delle ampiezze di $G_2(j\omega)$.

delle ampiezze di $G_2(j\omega)$. Le pulsazioni alle quali si verifica una variazione di pendenza del diagramma sono $\omega_1 = 1 \text{ rad/sec}$ e $\omega_2 = 10 \text{ rad/sec}$. Per il posizionamento verticale del diagramma, si può calcolare

$$\alpha = \left| \frac{sG_2(s)}{\omega^h} \right|_{s=0} = 0.1 = -20 \text{ db}.$$

Dal diagramma di Bode asintotico si vede che $|G_2(j\omega)| \cong -60 \text{ db}$ per $\omega \cong 10 \text{ rad/sec}$. Infatti, per via analitica, si trova

$$\begin{aligned} G_2(10j) &= \frac{0.1}{10j(1+10j)(1+j)} \\ &= \frac{0.1}{10e^{j\frac{\pi}{2}} \cdot 10.0499e^{j1.4711} \cdot 1.4142e^{j0.7854}} \\ &= 0.0007e^{-j3.8273}, \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} |G_2(10j)| &= 0.0007 = -63.0980 \text{ db}, \\ \angle G_2(10j) &= -3.8273 = -219.2881^\circ. \end{aligned}$$

Dunque, alla pulsazione $\omega = 10 \text{ rad/sec}$, la rete deve introdurre l'anticipo di fase

$$\varphi = -180^\circ + 219.2881^\circ = 39.2881^\circ = 0.6857 \text{ rad}.$$

L'amplificazione introdotta dalla rete deve essere scelta uguale a 10. Tale valore rende soddisfatta la condizione di realizzabilità fisica della rete. Infatti deve essere:

$$M > \frac{1}{\cos \varphi} = \frac{1}{\cos 0.6857} = 1.2920.$$

Per i parametri α e τ della rete si ottiene dunque:

$$\alpha = \frac{M \cos \varphi - 1}{M(M - \cos \varphi)} = \frac{10 \cos 0.6857 - 1}{10(10 - \cos 0.6857)} = 0.0731,$$

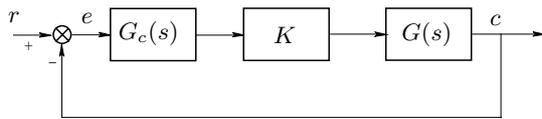
$$\tau = \frac{M - \cos \varphi}{\sin \varphi} = \frac{10 - \cos 0.6857}{10 \sin 0.6857} = 1.4570.$$

Quindi, la funzione di trasferimento della rete anticipatrice è

$$G_1(s) = \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s} = \frac{1 + 1.4570 s}{1 + 0.1065 s}.$$

Prova scritta di Controlli Automatici # 10

Si consideri il sistema in retroazione rappresentato dal diagramma a blocchi di Fig.1.



$$G(s) = \frac{1000}{(s+100)(s^2+2s+10)}.$$

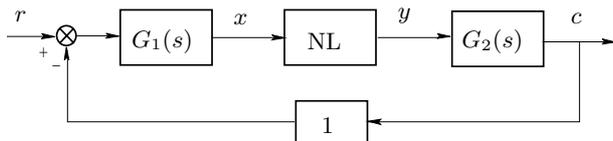
Fig. 1: Sistema in retroazione.

- a) Assumendo $G_c(s) = 1$, si determini il luogo delle radici del sistema in retroazione al variare di $K > 0$.
- b) Assumendo $G_c(s) = 1$, si determini l'intervallo di valori di K per i quali il sistema in retroazione è stabile asintoticamente.
- c) Assumendo $G_c(s) = 1$ e $K = 1$, si traccino i diagrammi asintotici di Bode (delle ampiezze e delle fasi) della funzione guadagno d'anello del sistema.
- d) Assumendo $K = 1$, si progetti il compensatore $G_c(s)$ in modo tale che il sistema ad anello chiuso soddisfi le seguenti specifiche: *i*) risposta al gradino unitario caratterizzata da transitorio di tipo non oscillatorio e da errore a regime nullo; *ii*) risposta alla rampa unitaria caratterizzata da errore a regime costante e uguale a 0.05. A questo scopo, si suggerisce di impiegare un regolatore PID progettato effettuando opportune cancellazioni polo-zero e scegliendo la costante di guadagno proporzionale in modo da rendere soddisfatta la specifica sull'errore a regime nella risposta alla rampa.
- e) Con riferimento al sistema introdotto al punto a), in cui si assume $K = 2000$ e

$$G(s) = \frac{1}{s(s+100)},$$

si progetti la rete ritardatrice che assegna al sistema compensato margine di fase uguale a 60° alla pulsazione $\omega = 10$ rad/sec. A questo scopo si suggerisce di utilizzare le formule di inversione¹.

- f) Si consideri il sistema in retroazione non lineare rappresentato dal diagramma a blocchi in Fig.2. Assumendo che il blocco $G_2(s)$ sia un guadagno unitario e che il blocco NL (di tipo algebrico) sia descritto dalla caratteristica ingresso-uscita riportata in Fig.3, si applichi il criterio di Popov per analizzare la stabilità asintotica globale del punto di equilibrio del sistema con $r = 1$. A questo scopo, si tenga conto del fatto che il diagramma di Popov della $G_1(s)$ è convesso.



$$G_1(s) = \frac{10}{s(s+2)^2}.$$

Fig. 2: Sistema non lineare in retroazione.

- g) Con riferimento al sistema non lineare introdotto al punto e) e nel quale però si considera la non linearità costituita da un relé ideale di ampiezza $Y_1 = 5$, si analizzi la possibilità di innesco di oscillazioni autosostenute in presenza del riferimento costante $r = 0$. Nel caso in cui esista un ciclo limite stabile, si determinino pulsazione e ampiezza dell'oscillazione all'uscita del sistema ad anello chiuso.

¹Si ricorda che le formule di inversione per la rete anticipatrice,

$$\alpha = \frac{M \cos \varphi - 1}{M(M - \cos \varphi)}, \quad \omega \tau = \frac{M - \cos \varphi}{\sin \varphi},$$

valgono anche per la rete ritardatrice purché si considerino l'inverso di M e l'opposto di φ .

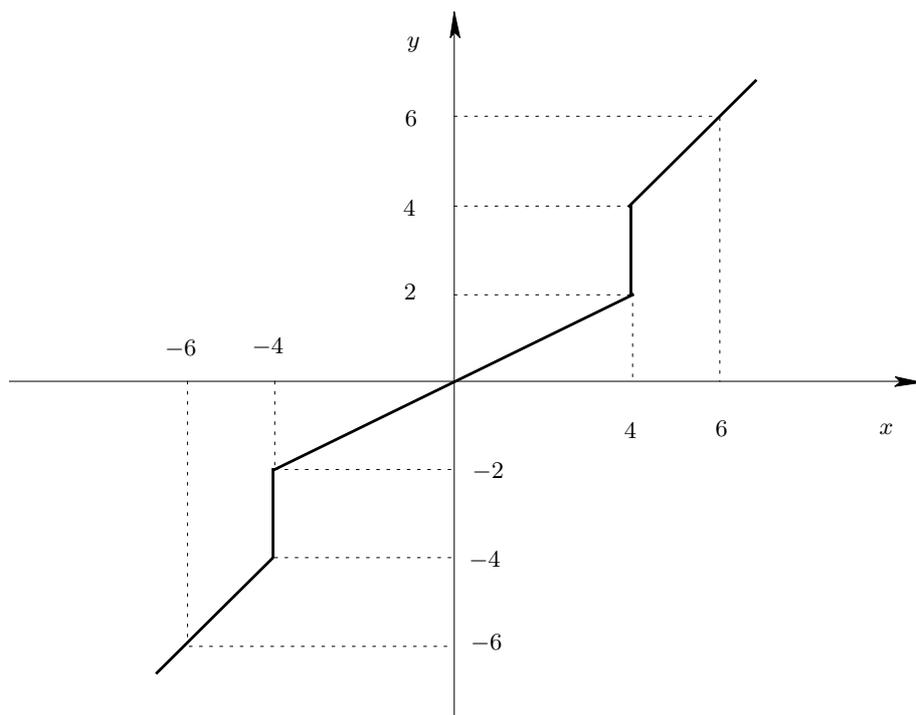


Fig. 3: Caratteristica dell'elemento non lineare.

Soluzione

a) Poli:

$$p_1 = -100, p_{2,3} = -1 \pm 3j, \Rightarrow n = 3 \text{ rami e } n = 3 \text{ asintoti.}$$

Punti dell'asse reale che appartengono al luogo:

$$[-\infty \quad -100].$$

Centro stella degli asintoti:

$$\sigma_a = \frac{1}{3}(-100 - 1 \cdot 2) = -34.$$

Angoli formati dagli asintoti con l'asse reale:

$$\vartheta_{a,\nu} = \frac{(2\nu + 1)\pi}{n - m} \text{ con } \nu = 0, 1, 2,$$

quindi:

$$\vartheta_{a,0} = \frac{\pi}{3}, \quad \vartheta_{a,1} = \pi, \quad \vartheta_{a,2} = \frac{5\pi}{3},$$

Il luogo delle radici è rappresentato in Fig.4.

b) Equazione caratteristica:

$$1 + \frac{1000K}{(s + 100)(s^2 + 2s + 10)} = 0 \quad \Rightarrow \quad s^3 + 102s^2 + 210s + 1000(K + 1) = 0.$$

Tabella di Routh:

3	1	210
2	102	1000(K + 1)
1	20420 - 1000K	0
0	1000(K + 1)(20420 - 1000K)	

Condizioni ricavate dalla tabella di Routh:

$$(K < 20.42 \text{ e } K > -1) \quad \Rightarrow \quad -1 < K < 20.42.$$

c) Funzione guadagno d'anello (in forma fattorizzata):

$$G(s) = \frac{1000}{(s + 100)(s^2 + 2s + 10)}.$$

Funzione guadagno d'anello (in forma con costanti di tempo):

$$G(s) = \frac{1}{(1 + 0.01s) \left(1 + 2 \cdot 0.3162 \cdot \frac{s}{3.1623} + \left(\frac{s}{3.1623} \right)^2 \right)}.$$

Pulsazioni alle quali si ha una variazione di pendenza del diagramma asintotico delle ampiezze:

$$\omega_1 = 3.1623, \quad \omega_2 = 100.$$

Posizionamento verticale del diagramma asintotico delle ampiezze:

$$|G(0)| = 1 = 0 \text{ db.}$$

Fase iniziale:

$$\varphi_0 = 0.$$

Fase finale:

$$\varphi_f = -\frac{3\pi}{2}.$$

I diagrammi di Bode sono riportati in Fig.5 e in Fig.6.

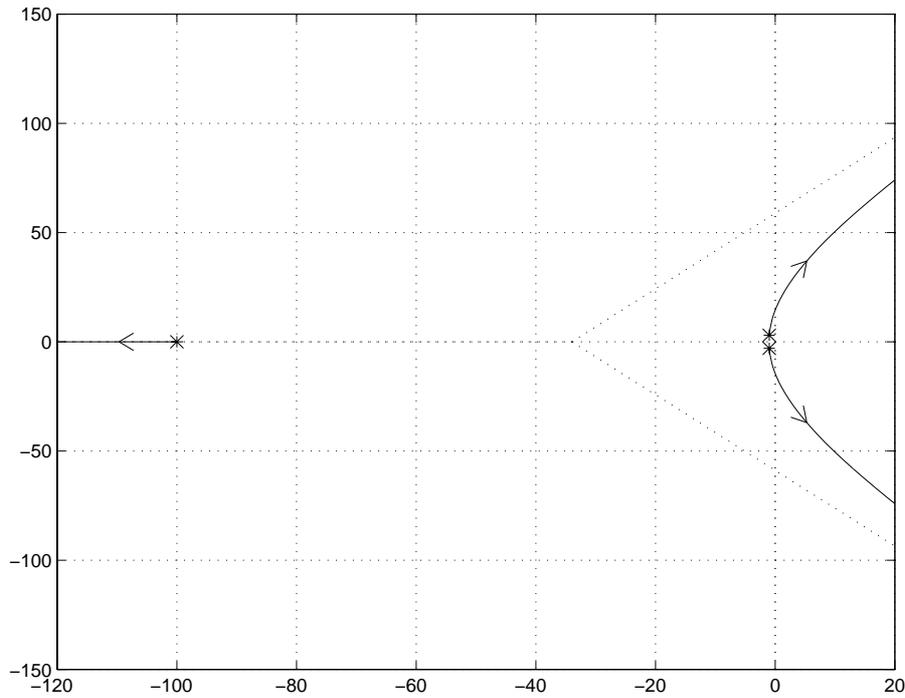


Fig. 4: Luogo delle radici.

d) La funzione di trasferimento di un regolatore PID si può anche scrivere nella forma

$$G_c(s) = \frac{K_p}{T_i s} (T_i T_d s^2 + T_i s + 1) .$$

Gli zeri del regolatore vengono scelti in modo tale da cancellare i poli complessi coniugati dell'impianto. Dunque si impone l'uguaglianza dei polinomi:

$$\frac{K_p}{T_i} (T_i T_d s^2 + T_i s + 1) = K_c (s^2 + 2s + 10) ,$$

dove K_c è una generica costante di proporzionalità. Imponendo l'uguaglianza dei coefficienti dei termini omologhi si ha:

$$\begin{cases} K_p T_d = K_c, \\ K_p = 2K_c, \\ \frac{K_p}{T_i} = 10K_c, \end{cases} \implies \begin{cases} T_d = \frac{1}{2}, \\ K_p = 2K_c, \\ T_i = \frac{1}{5}, \end{cases}$$

Dunque, la funzione di trasferimento del PID, definita a meno della costante di guadagno proporzionale K_c , è

$$G_c(s) = K_c \frac{s^2 + 2s + 10}{s} .$$

Di conseguenza, la funzione guadagno d'anello risulta:

$$G_a(s) = G_c(s)G(s) = \frac{K_c(s^2 + 2s + 10)}{s} \cdot \frac{1000}{(s + 100)(s^2 + 2s + 10)} = \frac{1000K_c}{s(s + 100)} ,$$

e quindi, la funzione di trasferimento del sistema ad anello chiuso è

$$G_0(s) = \frac{G_a(s)}{1 + G_a(s)} = \frac{1000K_c}{s^2 + 100s + 1000K_c} .$$

Affinché il sistema ad anello chiuso presenti un transitorio di tipo non oscillatorio, è necessario che esso non abbia poli complessi. Dunque, da

$$p_{1,2} = -50 \pm \sqrt{2500 - 1000K_c}$$

si ricava la condizione:

$$K_c < 2.5.$$

L'errore a regime nella risposta alla rampa ha l'espressione

$$e_r = \frac{1}{K_v} \quad \text{con} \quad K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG_a(s).$$

Nel caso specifico è

$$K_v = 10K_c.$$

da cui

$$e_r = \frac{1}{10K_c} = 0.05 \quad \Rightarrow \quad K_c = \frac{1}{0.05 \cdot 10} = 2 < 2.5.$$

Quindi, la funzione di trasferimento del PID risulta

$$G_c(s) = \frac{2(s^2 + 2s + 10)}{s}.$$

e) La funzione guadagno d'anello del sistema è

$$G_a(s) = \frac{2000}{s(s + 100)},$$

quindi

$$G_a(j\omega) = \frac{2000}{j\omega(j\omega + 100)}.$$

In particolare,

$$G_a(10j) = \frac{2000}{10j(10j + 100)} = 1.9901e^{-j1.6705},$$

per cui

$$|G_a(10j)| = 1.9901, \quad \angle G_a(10j) = -1.6705 \text{ rad} = -95.7126^\circ.$$

Alla pulsazione $\omega = 10 \text{ rad/sec}$, la rete ritardatrice deve introdurre il ritardo di fase

$$\varphi = -95.7126^\circ + 120^\circ = 24.2874^\circ = 0.4239 \text{ rad}$$

e l'attenuazione

$$\frac{1}{M} = \frac{1}{1.9901} = 0.5025 \quad \Rightarrow \quad M = 1.9901.$$

Tali valori di M e φ rendono soddisfatta la condizione di realizzabilità fisica della rete. Infatti,

$$M > \frac{1}{\cos \varphi} = \frac{1}{\cos 0.4239} = 1.0971.$$

Per i parametri α e τ della rete si ottiene dunque:

$$\alpha = \frac{M \cos \varphi - 1}{M(M - \cos \varphi)} = \frac{1.9901 \cos 0.4239 - 1}{1.9901(1.9901 - \cos 0.4239)} = 0.3792,$$

$$\tau = \frac{M - \cos \varphi}{\omega \sin \varphi} = \frac{1.9901 - \cos 0.4239}{10 \sin 0.4239} = 0.2622.$$

Quindi, la funzione di trasferimento della rete ritardatrice è

$$G_c(s) = \frac{1 + \alpha \tau s}{1 + \tau s} = \frac{1 + 0.0994 s}{1 + 0.2622 s}.$$

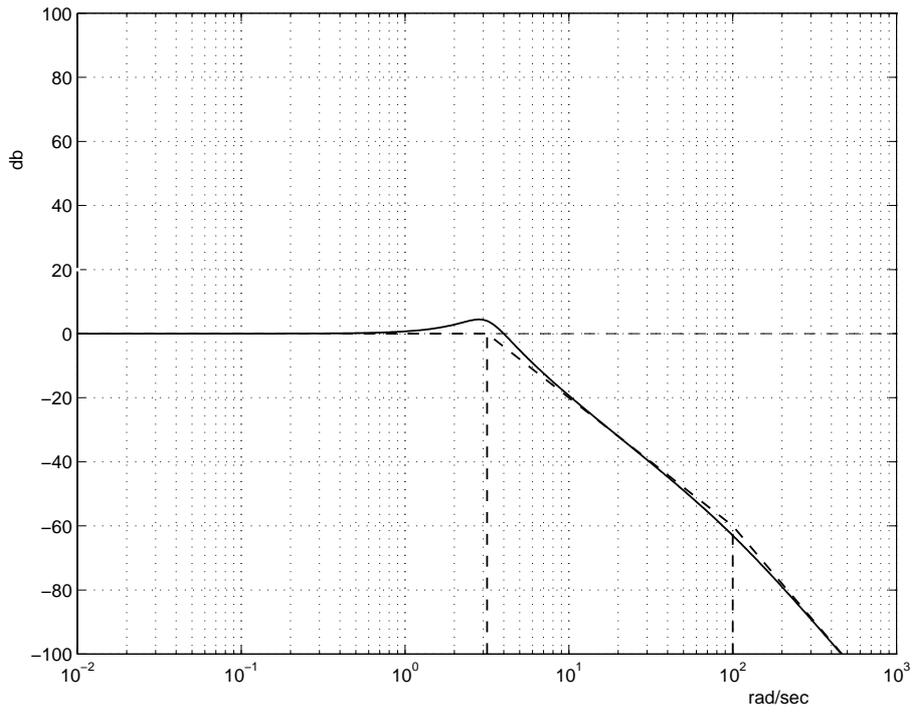


Fig. 5: Diagramma di Bode delle ampiezze della funzione guadagno d'anello.

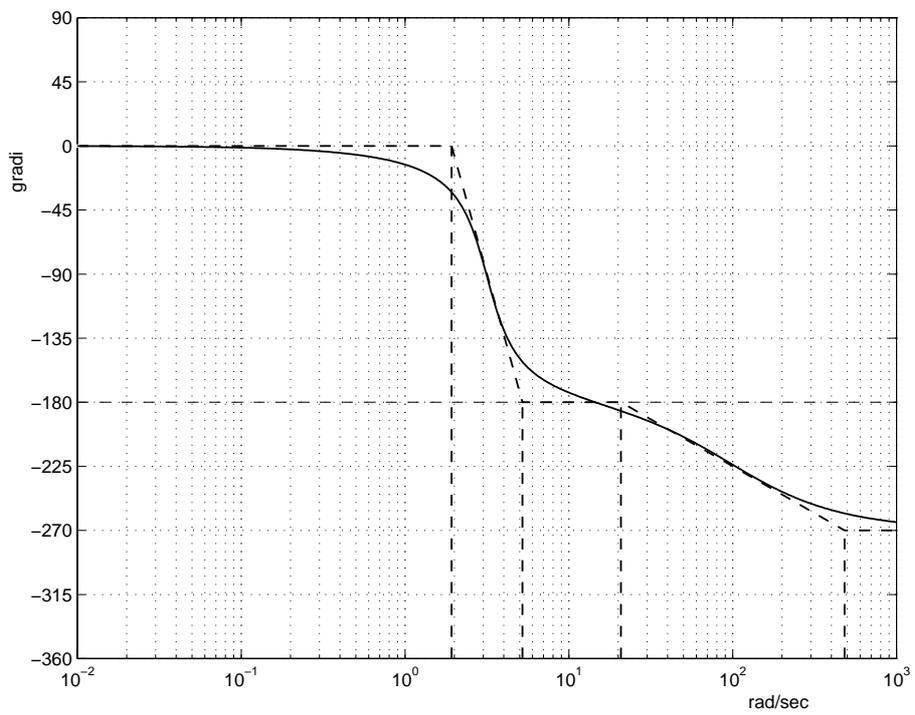


Fig. 6: Diagramma di Bode delle fasi della funzione guadagno d'anello.

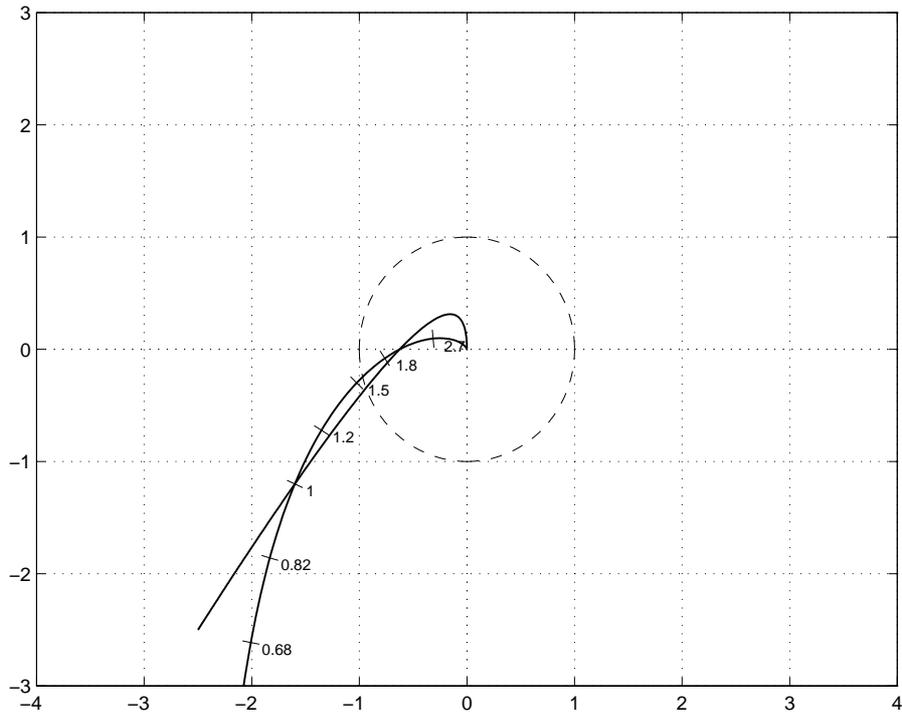


Fig. 7: Diagramma di Popov di $G_1(j\omega)$.

f) Il punto di lavoro del sistema si trova intersecando la retta $y = 1$ con la caratteristica dell'elemento non lineare e coincide perciò con il punto $(2, 1)$. Tutta la caratteristica dell'elemento non lineare è contenuta nel settore centrato nel punto $(2, 1)$ e delimitato dalla retta con pendenza $\beta = 3/2$. L'intersezione del diagramma polare della funzione di risposta armonica $G_1(j\omega)$ della parte lineare del sistema con il semiasse reale negativo (e quindi anche quella del diagramma di Popov) avviene in corrispondenza dell'ascissa $\sigma_0 = -0.625$, che si calcola costruendo la tabella di Routh. Equazione caratteristica:

$$1 + \frac{10K}{s(s+2)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad s^3 + 4s^2 + 4s + 10K = 0.$$

Tabella di Routh:

3	1	4
2	4	$10K$
1	$16 - 10K$	0
0	$10K(16 - 10K)$	

Condizioni ricavate dalla tabella di Routh:

$$K > 0 \quad \text{and} \quad K < 1.6.$$

Dunque

$$\sigma_0 = -\frac{1}{K^*} = -\frac{1}{1.6} = -0.625.$$

Esiste pertanto una retta per il punto $-1/\beta = -2/3 = -0.6667$ che non interseca nè tocca il diagramma di Popov di $G_1(j\omega)$. Di conseguenza il punto di lavoro $(2, 1)$ è globalmente asintoticamente stabile.

g) Come è stato determinato al punto f), l'intersezione fra il diagramma di Nyquist della $G_1(j\omega)$ e il semiasse reale negativo avviene in corrispondenza del punto di ascissa $\sigma_0 = -0.625$. Tale punto corrisponde a un ciclo limite stabile. La pulsazione di oscillazione si calcola risolvendo l'equazione ausiliaria

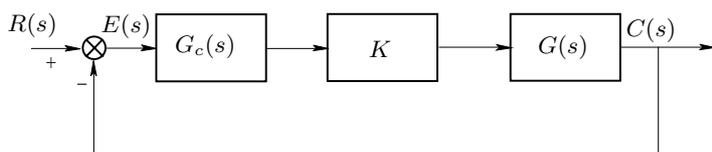
$$4s^2 + 16 = 0 \quad \Rightarrow \quad s = \pm 2j \quad \Rightarrow \quad \omega = 2 \text{ rad/sec.}$$

L'ampiezza dell'oscillazione all'uscita del sistema ad anello chiuso è

$$\frac{4Y_1}{\pi} = \frac{4 \cdot 5}{\pi} = 6.3662.$$

Prova scritta di Controlli Automatici # 11

Si consideri il sistema in retroazione rappresentato dal diagramma a blocchi di Fig. 1.



$$G(s) = \frac{400}{(s+10)(s+20)}.$$

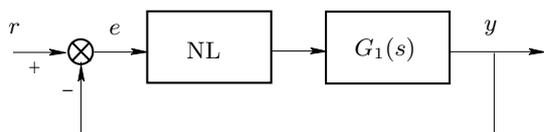
Fig. 1: Sistema in retroazione.

- a) Assumendo $G_c(s) = 1$ e $K = 1$, si traccino i diagrammi asintotici di Bode (delle ampiezze e delle fasi) della funzione guadagno d'anello $G_a(j\omega)$ del sistema.
- b) Assumendo $G_c(s) = 1$ e $K = 1$, si determini il tempo di ritardo nella risposta al gradino del sistema ad anello chiuso. A questo scopo si suggerisce di utilizzare i grafici riportati in Fig.3.
- c) Assumendo $K = 1$, si progetti il regolatore $G_c(s)$ in modo tale che il sistema compensato presenti errore a regime nullo nella risposta al gradino unitario ed errore a regime nella risposta alla rampa unitaria uguale a 0.01. A questo scopo si suggerisce di impiegare un regolatore di tipo proporzionale integrale progettato operando un'opportuna cancellazione polo-zero. Si traccino i diagrammi asintotici di Bode (delle ampiezze e delle fasi) della funzione di risposta armonica ad anello aperto del sistema così compensato.
- d) Assumendo $K = 1$, si progetti la rete correttiva $G_c(s)$ che assegna al sistema compensato margine di fase uguale a 60° alla pulsazione $\omega = 40$ rad/sec. A questo scopo si suggerisce di utilizzare le formule di inversione¹.
- e) Assumendo

$$G_c(s) = \frac{5(s+4)}{s+18},$$

si tracci il luogo delle radici del sistema in retroazione al variare del parametro $K > 0$. Si determini l'intervallo di valori di K per i quali il sistema in retroazione è stabile asintoticamente.

- f) Si consideri il sistema non lineare in retroazione rappresentato dal diagramma a blocchi di Fig.2. Assumendo che il blocco NL sia costituito da un relé con soglia il cui comportamento ingresso-uscita sia definito in termini quantitativi dalla funzione descrittiva riportata in Fig.4, si determini il massimo valore di $K > 0$ per il quale nel sistema non si ha innesco di oscillazioni autosostenute.



$$G_1(s) = \frac{K}{s(s+10)(s+20)}.$$

Fig. 2: Sistema non lineare in retroazione.

- g) Nell'ipotesi che il sistema introdotto al punto f) non presenti oscillazioni autosostenute, si determini il valore massimo dell'errore con il quale il sistema è in grado di inseguire un gradino di ampiezza uguale a 10 applicato all'ingresso.

¹Si ricordano le formule di inversione per la rete anticipatrice,

$$\alpha = \frac{M \cos \varphi - 1}{M(M - \cos \varphi)}, \quad \omega\tau = \frac{M - \cos \varphi}{\sin \varphi}.$$

Si ricorda inoltre che esse valgono anche per la rete ritardatrice purché si considerino l'inverso di M e l'opposto di φ .

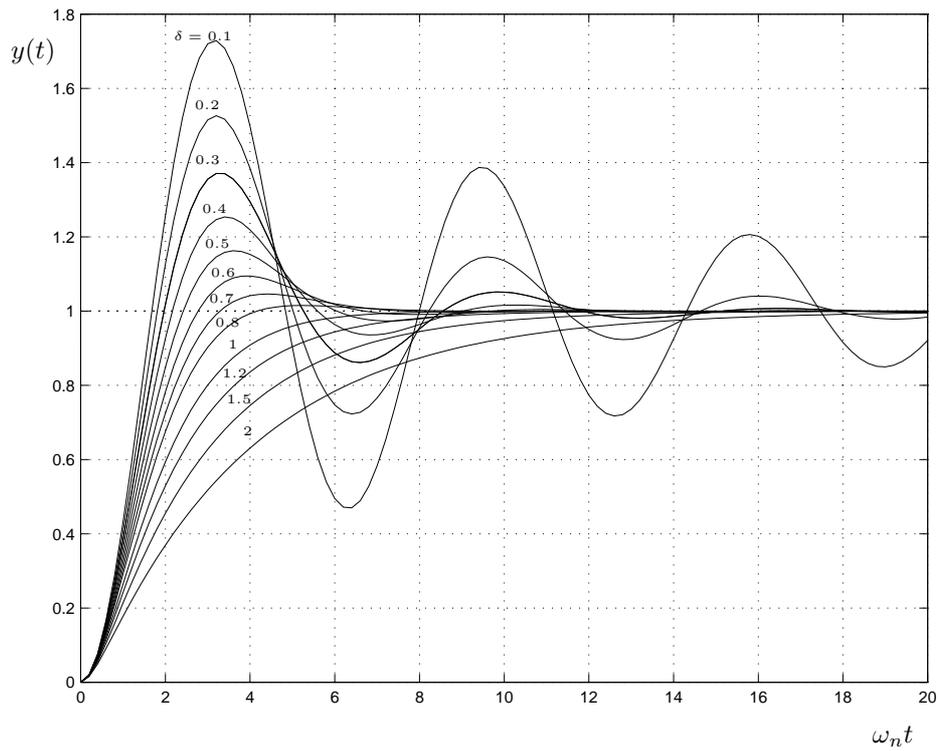


Fig. 3: Grafici della risposta al gradino di un sistema del secondo ordine.

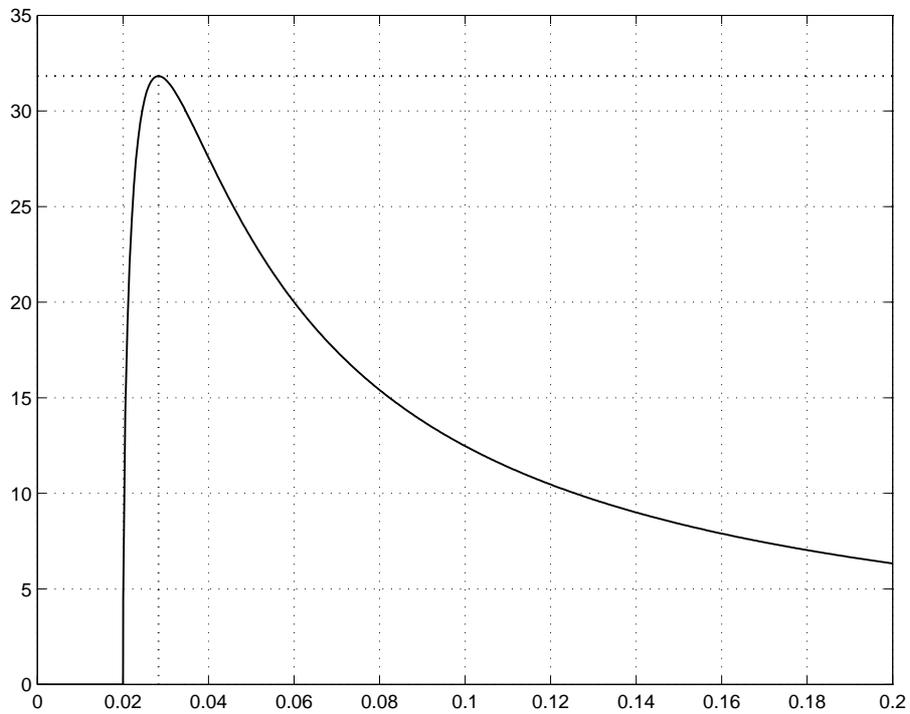


Fig. 4: Funzione descrittiva del relé con soglia inserito nel sistema non lineare in retroazione.

Soluzione

a) La funzione guadagno d'anello $G_a(s)$ del sistema è

$$G_a(s) = G(s) = \frac{400}{(s+10)(s+20)}.$$

Sono presenti due poli reali stabili, $p_1 = -10$ e $p_2 = -20$, quindi le pulsazioni alle quali si ha variazione di pendenza del diagramma delle ampiezze asintotico sono rispettivamente $\omega_1 = 10$ e $\omega_2 = 20$. La funzione $G_a(s)$ è di tipo 0, quindi per il posizionamento verticale del diagramma delle ampiezze asintotico si calcola

$$G_a(0) = 2 = 6.021 \text{ db}.$$

Per il tracciamento del diagramma delle fasi asintotico, si osserva che la fase iniziale è $\varphi_i = 0$, essendo $G_a(s)$ di tipo 0, mentre la fase finale è $\varphi_f = -\pi$, poiché ogni polo, reale e stabile, introduce uno sfasamento complessivo uguale a $-\pi/2$. I diagrammi di Bode sono riportati in Fig.5 e in Fig.6.

b) La funzione di trasferimento del sistema ad anello chiuso è

$$G_0(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{400}{s^2 + 30s + 600} = \frac{\frac{2}{3}}{1 + \frac{1}{20}s + \frac{1}{600}s^2}.$$

La $G_0(s)$ si può anche riscrivere nella forma

$$G_0(s) = \frac{\frac{2}{3}}{1 + 2\delta\frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}},$$

avendo posto

$$\omega_n = \sqrt{600} = 24.4949, \quad \delta = \frac{1}{2 \cdot 20} \omega_n = 0.6124.$$

Dal grafico delle risposte al gradino normalizzate di un sistema del secondo ordine si legge, per $\delta \cong 0.6$,

$$\omega_n t_r = 1.36,$$

da cui si ricava il valore del tempo di ritardo nella risposta al gradino del sistema ad anello chiuso:

$$t_r = \frac{1.36}{\omega_n} = 0.05578.$$

c) La funzione di trasferimento del regolatore è

$$G_c(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right) = K_p \frac{1 + T_i s}{T_i s}.$$

Lo zero del regolatore viene assegnato in modo da cancellare il polo del sistema più vicino all'asse immaginario, cioè il polo in -10 . Dunque deve essere

$$\frac{K_p}{T_i} (1 + T_i s) = K_c (10 + s),$$

dove K_c è una costante di proporzionalità arbitraria. Imponendo l'uguaglianza dei coefficienti dei termini omologhi si ottiene

$$\begin{cases} \frac{K_p}{T_i} = 10K_c, \\ K_p = K_c, \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} T_i = \frac{1}{10}, \\ K_p = K_c, \end{cases}$$

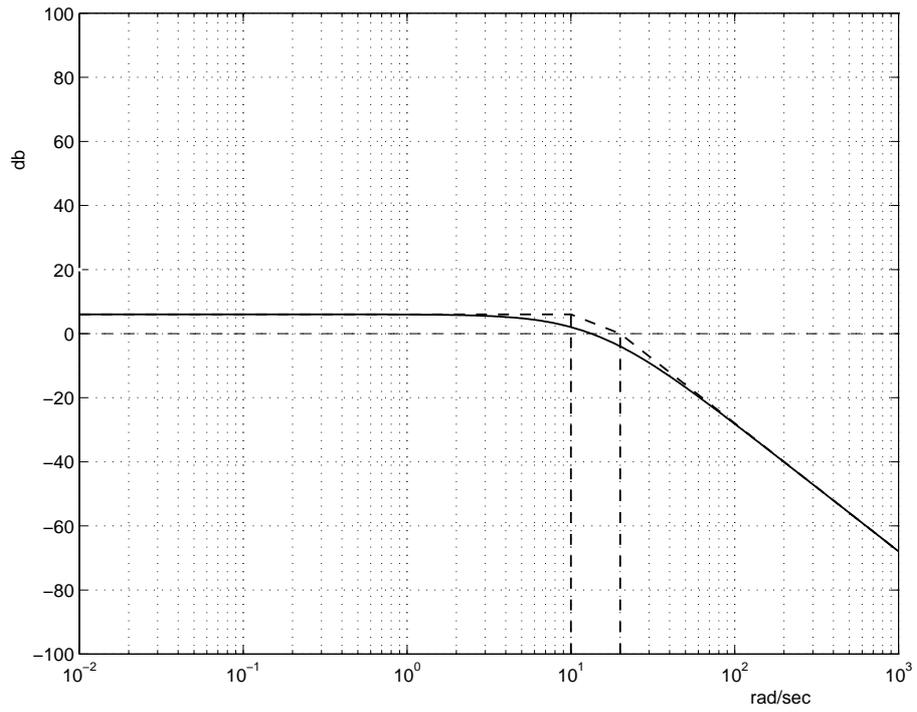


Fig. 5: Diagramma di Bode delle ampiezze della funzione guadagno d'anello.

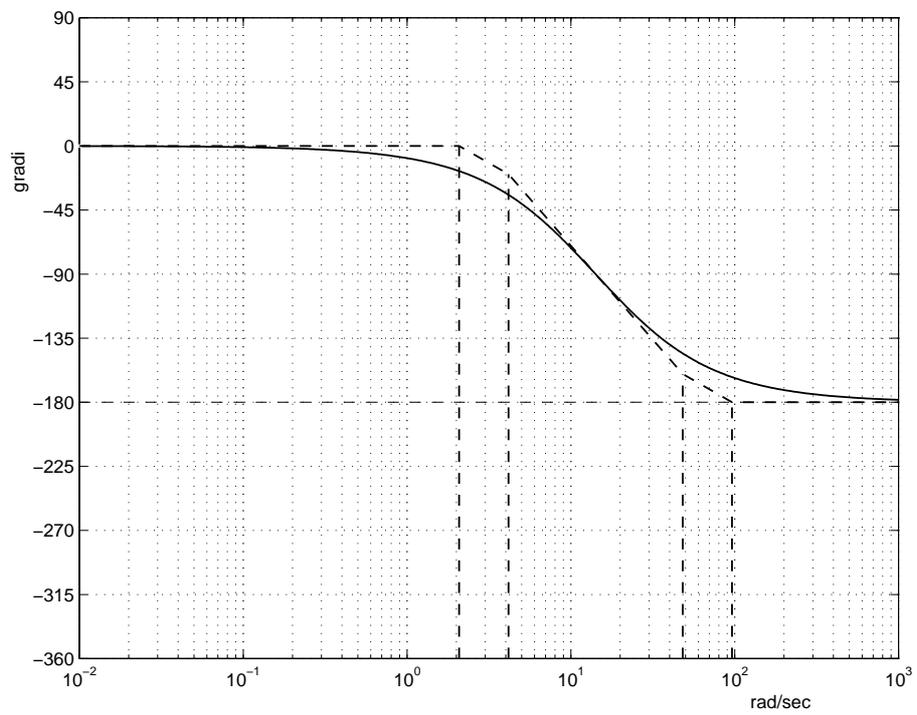


Fig. 6: Diagramma di Bode delle fasi della funzione guadagno d'anello.

Dunque, la funzione di trasferimento del regolatore PI, definita a meno della sensibilità proporzionale K_p , è

$$G_c(s) = K_p \left(1 + \frac{10}{s} \right) = K_p \frac{s + 10}{s}.$$

Il valore della sensibilità proporzionale si calcola imponendo la specifica sull'errore a regime nella risposta alla rampa unitaria. Con il regolatore, progettato a meno di K_p , la funzione guadagno d'anello ha l'espressione

$$G_a(s) = G_c(s)G(s) = K_p \frac{s + 10}{s} \cdot \frac{400}{(s + 10)(s + 20)} = \frac{400K_p}{s(s + 20)}.$$

La costante di velocità K_v è data da

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG_a(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{400K_p}{s(s + 20)} = 20K_p.$$

Imponendo

$$20K_p = K_v = \frac{1}{e_r} = 100,$$

si ottiene

$$K_p = 5.$$

Quindi la funzione di trasferimento del regolatore è

$$G_c(s) = \frac{5(s + 10)}{s}.$$

I diagrammi di Bode della funzione di risposta armonica d'anello del sistema così compensato sono riportati in Fig.7 e in Fig.8.

d) La funzione di risposta armonica d'anello del sistema non compensato è

$$G(j\omega) = \frac{400}{(10 + j\omega)(20 + j\omega)}.$$

Si calcolano modulo e fase della funzione di risposta armonica d'anello del sistema non compensato alla pulsazione $\omega = 40$ rad/sec:

$$G(j40) = \frac{400}{(10 + j40)(20 + j40)} = \frac{400}{\sqrt{100 + 1600} e^{j \arctan\left(\frac{40}{10}\right)} \sqrt{400 + 1600} e^{j \arctan\left(\frac{40}{20}\right)}} = 0.2169 e^{-j2.433}$$

Dunque,

$$|G(j40)| = 0.2169 = -13.27 \text{ db},$$

$$\angle G(j40) = -2.433 \text{ rad} = -139.4^\circ.$$

La rete deve introdurre un'amplificazione M e un anticipo φ dati da

$$M = \frac{1}{0.2169} = 4.6104,$$

$$\varphi = -120^\circ + 139.4^\circ = 19.4^\circ = 0.3386 \text{ rad}.$$

La condizione di realizzabilità fisica della rete è soddisfatta in quanto

$$4.6104 = M > \frac{1}{\cos \varphi} = 1.0602.$$

Dunque, sostituendo i valori di M , φ ed ω nelle formule di inversione, si ottiene

$$\alpha = 0.1981, \quad \tau = 0.2760.$$

Infine, la funzione di trasferimento della rete anticipatrice risulta

$$G_c(s) = \frac{1 + 0.2760s}{1 + 0.0547s}.$$

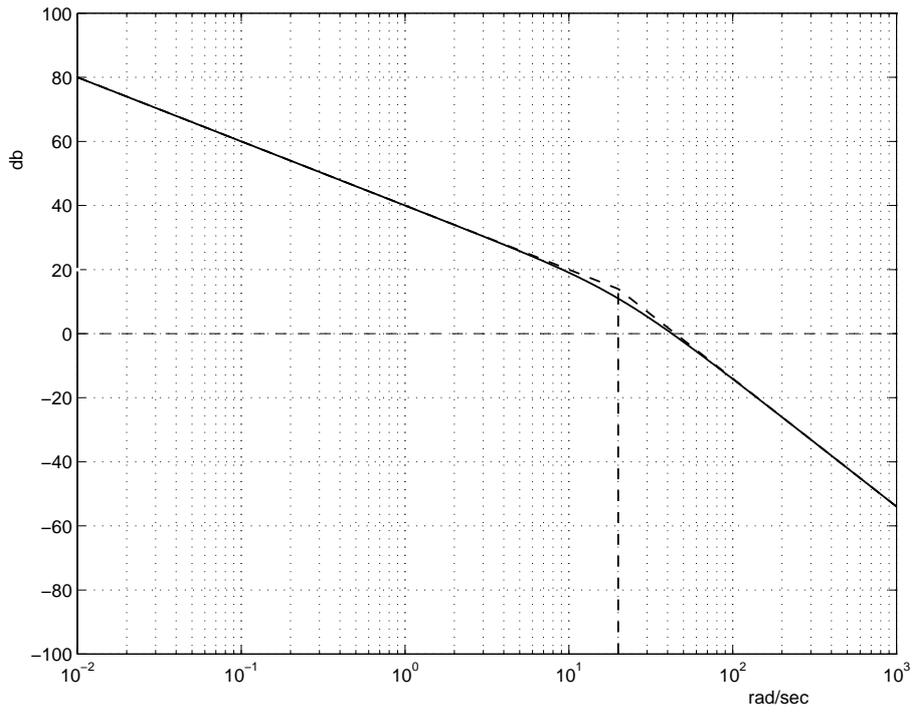


Fig. 7: Diagramma di Bode delle ampiezze della funzione guadagno d'anello.

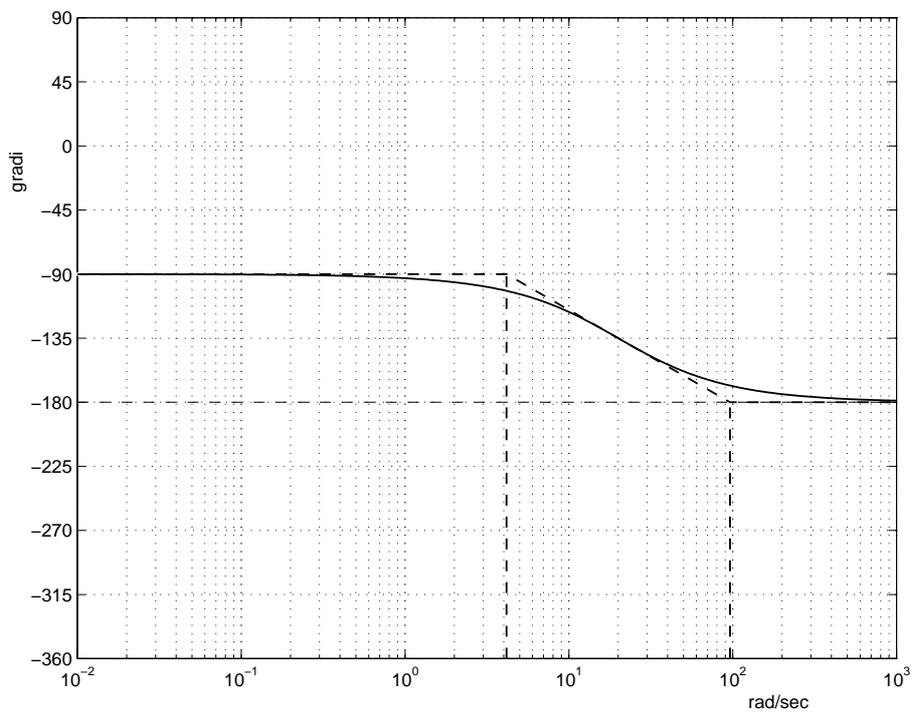


Fig. 8: Diagramma di Bode delle fasi della funzione guadagno d'anello.

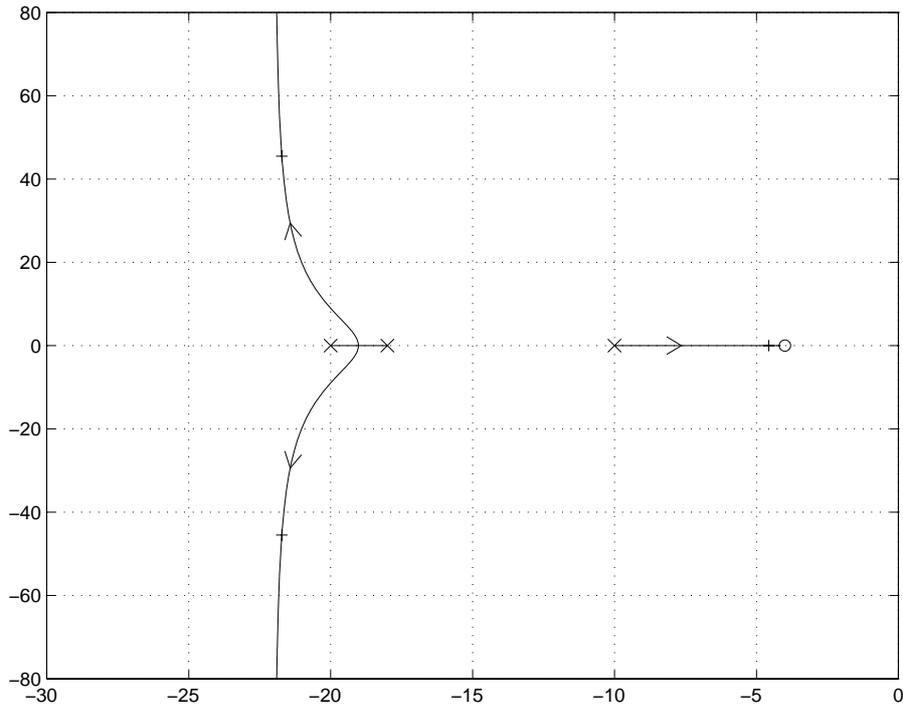


Fig. 9: Luogo delle radici.

e) Funzione di trasferimento della catena diretta:

$$G_l(s) = G_c(s)G(s) = \frac{2000(s+4)}{(s+10)(s+18)(s+20)}.$$

Poli e zeri:

$$p_1 = -10, p_2 = -18, p_3 = -20, z_1 = -4, \Rightarrow n = 3 \text{ rami e } n - m = 2 \text{ asintoti.}$$

Punti dell'asse reale che appartengono al luogo:

$$[-20 \quad -18] \cup [-10 \quad -4].$$

Centro stella degli asintoti:

$$\sigma_a = \frac{1}{2}(-20 - 18 - 10 + 4) = -22.$$

Angoli formati dagli asintoti con l'asse reale:

$$\vartheta_{a,0} = \frac{\pi}{2}, \quad \vartheta_{a,1} = \frac{3\pi}{2}.$$

Il luogo delle radici è rappresentato in Fig.9. Il sistema in retroazione è stabile per tutti i valori di $K > 0$.

f) Il grafico di $-1/F(X)$ coincide con la porzione del semiasse reale negativo individuata da $[-\infty, -0.0313]$. Infatti, dal grafico di $F(X)$ si legge che il valore massimo di $F(X)$ è circa uguale a 32, per cui $-1/F(X) = -0.0313$. L'ascissa dell'intersezione del diagramma polare della parte lineare del sistema con il semiasse reale negativo è funzione del parametro K . Mediante il criterio di Routh si calcolano i valori di K e di ω per i quali il diagramma polare della parte lineare del sistema interseca il semiasse reale negativo in -1 . Risulta $K = 6000$ e $\omega = 14.14$ rad/sec. Riducendo il valore di K , l'intersezione con il semiasse reale negativo si sposta verso destra, pur continuando ad avvenire in corrispondenza dello stesso valore di ω . In particolare, per $\omega = 14.14$ rad/sec, la funzione di risposta armonica della parte lineare del sistema, a meno del fattore K vale $-1.667 \cdot 10^{-4}$. Imponendo

$$-1.667 \cdot 10^{-4}K = -0.0313,$$

si ricava

$$K = 187.7624.$$

g) Affinché l'uscita y del sistema abbia un valore costante, l'ingresso del blocco $G_1(s)$ deve essere uguale a zero. Affinché l'uscita del blocco non lineare sia uguale a zero, il segnale e deve avere un valore compreso nell'intervallo $[-0.02, 0.02]$. D'altra parte è

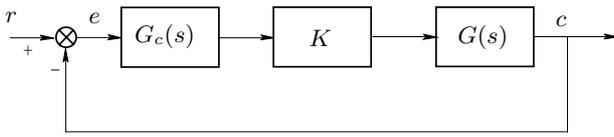
$$e = r - y,$$

da cui

$$y = r \pm 0.02.$$

Prova scritta di Controlli Automatici # 12

Si consideri il sistema in retroazione rappresentato dal diagramma a blocchi di Fig.1.



$$G(s) = \frac{40000}{(s+1)(s+2)(s+10)(s+20)}.$$

Fig. 1: Sistema in retroazione.

- a) Assumendo $G_c(s) = 1$ e $K = 1$, si traccino i diagrammi asintotici di Bode (delle ampiezze e delle fasi) della funzione guadagno d'anello $G_a(j\omega)$ del sistema.
- b) Assumendo $G_c(s) = 1$ e $K = 1$, si determini la pulsazione ω_0 in corrispondenza della quale la funzione guadagno d'anello $G_a(j\omega)$ del sistema presenta fase uguale a -120° . A questo scopo si suggerisce di verificare per via analitica la correttezza del valore dedotto dal diagramma di Bode.
- c) Assumendo $K = 1$, si progetti il regolatore $G_c(s)$ in modo tale il sistema compensato presenti errore a regime nullo nella risposta al gradino e margine di fase $M_\varphi = 60^\circ$. A questo scopo si suggerisce di impiegare un regolatore di tipo proporzionale-integrale-derivativo progettato assumendo come pulsazione di centro banda ω_0 la pulsazione alla quale il sistema non compensato presenta fase uguale a -120° e come rapporto fra le costanti di tempo delle azioni integrale e derivativa il valore $\rho = T_i/T_d = 10$. Si ricorda che la relazione fra la pulsazione di centro banda e le costanti di tempo delle azioni integrale e derivativa è $\omega_0 = 1/\sqrt{T_i T_d}$.
- d) Assumendo $G_c(s) = 1$, si determini l'intervallo di valori del parametro $K > 0$ per i quali il sistema in retroazione risulta essere stabile.
- e) Assumendo

$$G_c(s) = \frac{(s+1)}{s(s+10)},$$

si tracci il luogo delle radici del sistema in retroazione al variare del parametro $K > 0$.

- f) Si consideri il sistema non lineare in retroazione rappresentato dal diagramma a blocchi di Fig.2. Si determini il punto di lavoro (x_0, y_0) corrispondente all'ingresso costante $r = 4$ e si determini il corrispondente valore c_0 dell'uscita.

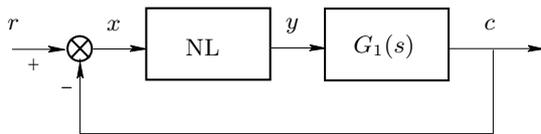


Fig. 2: Sistema non lineare in retroazione.

$$G_1(s) = \frac{e^{-1.8s}}{s(1+\tau s)}, \quad \tau \ll 1.8.$$

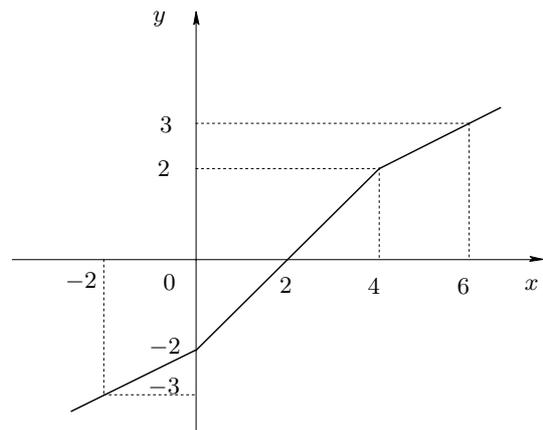


Fig. 3: Caratteristica dell'elemento non lineare.

- g) Con riferimento al sistema introdotto al punto f), si verifichi l'esistenza di oscillazioni autosostenute.

Soluzione

a) La funzione guadagno d'anello $G_a(j\omega)$ del sistema è data da

$$G_a(j\omega) = G(j\omega) = \frac{40000}{(1+j\omega)(2+j\omega)(10+j\omega)(20+j\omega)}.$$

I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi sono riportati in Fig.4 e in Fig.5, rispettivamente.

b) Dal diagramma di Bode delle fasi si deduce il valore $\omega_0 = 1.8 \text{ rad/sec}$. Per via analitica si trova

$$\angle G_a(j\omega_0) = \angle G_a(1.8j) = -118.3^\circ,$$

per cui $\omega_0 = 1.8 \text{ rad/sec}$ si può considerare un'approssimazione accettabile della pulsazione cercata.

c) Il valore della pulsazione ω_0 alla quale il sistema non compensato presenta fase uguale a -120° è stata determinata al punto b) ed è data da $\omega_0 = 1.8 \text{ rad/sec}$. Poichè in corrispondenza della pulsazione di centro banda, il PID non sfasa e attenua di K_c , dove K_c rappresenta la sensibilità proporzionale, si può assumere tale pulsazione ω_0 come pulsazione di centro banda e imporre che K_c sia uguale all'inverso del modulo della funzione di trasferimento del sistema non compensato a tale pulsazione. Si pone cioè

$$K_c = \frac{1}{|G_a(j\omega_0)|} = \frac{1}{|G_a(1.8j)|} = \frac{1}{35.38} = 0.0283.$$

Tenendo conto della relazione che sussiste fra la pulsazione di centro banda e le costanti di tempo delle azioni integrale e derivativa ed assumendo come rapporto fra le costanti di tempo delle azioni integrale e derivativa $\rho = 10$, si ha

$$\frac{1}{\sqrt{T_i T_d}} = \frac{1}{\sqrt{10 T_d^2}} = \omega_0 = 1.8,$$

da cui

$$T_d = \sqrt{\frac{1}{10 \omega_0^2}} = 0.1757,$$

$$T_i = 10 T_d = 1.757.$$

Dunque, la funzione di trasferimento del PID risulta

$$G_c(s) = K_c \left(1 + T_d s + \frac{1}{T_i s} \right) = 0.0283 \left(1 + 0.1757s + \frac{1}{1.757s} \right).$$

d) Equazione caratteristica:

$$1 + \frac{40000K}{(s+1)(s+2)(s+10)(s+20)} = 0 \quad \Rightarrow \quad s^4 + 33s^3 + 292s^2 + 660s + 400(1+100K) = 0.$$

Tabella di Routh:

4	1	292	400(1+100K)
3	33	660	
2	272	400(1+100K)	
1	166320 - 1320000K		
0	400(1+100K)(166320 - 1320000K)		

Condizioni ricavate dalla tabella di Routh:

$$\left(K < \frac{166320}{1320000} \text{ e } K > -\frac{1}{100} \right) \quad \Rightarrow \quad -0.01 < K < 0.126.$$

Infine, tenendo conto del vincolo $K > 0$, si ha

$$0 < K < 0.126.$$

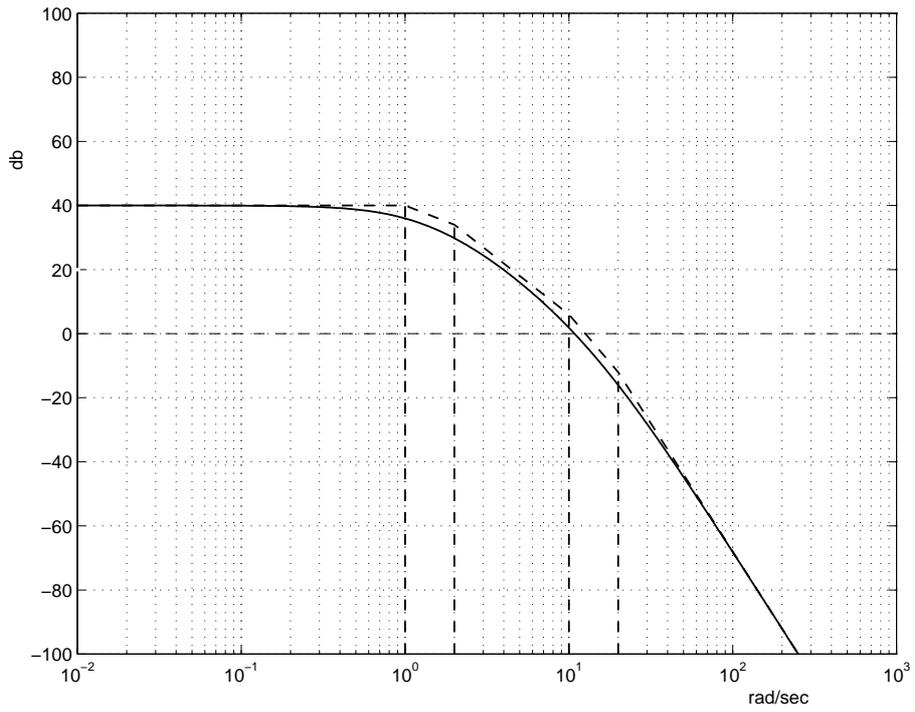


Fig. 4: Diagramma di Bode delle ampiezze della funzione guadagno d'anello.

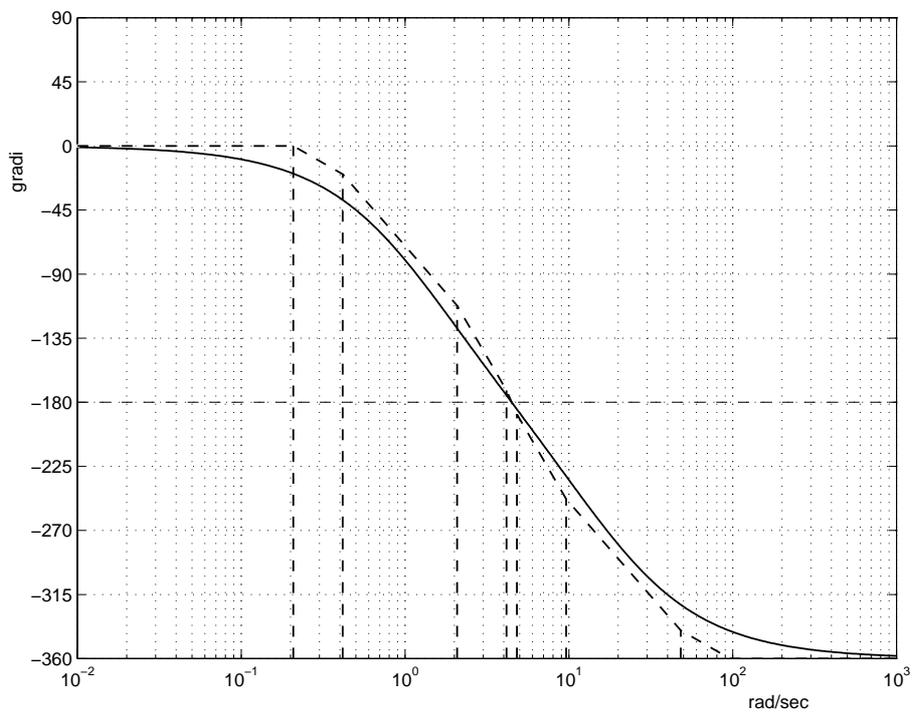


Fig. 5: Diagramma di Bode delle fasi della funzione guadagno d'anello.

e) La funzione guadagno d'anello $G_l(s)$ è data da

$$G_l(s) = KG_c(s)G(s) = K \frac{40000}{s(s+2)(s+10)^2(s+20)}.$$

Poli e zeri:

$$p_1 = 0, p_2 = -2, p_{3,4} = -10, p_5 = -20, \Rightarrow n = 5 \text{ rami e } n - m = 5 \text{ asintoti.}$$

Punti dell'asse reale che appartengono al luogo:

$$[-\infty, -20] \cup [-2, 0].$$

Angoli formati dagli asintoti con l'asse reale:

$$\vartheta_{a,\nu} = \frac{(2\nu + 1)\pi}{5} = \pi \text{ con } \nu = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Il luogo delle radici è rappresentato in Fig. 6.

f) La relazione imposta dalla parte lineare del sistema è

$$y = 0,$$

in quanto $G_1(s)$ presenta un polo nell'origine. Il punto di lavoro si trova come intersezione fra la relazione imposta dalla parte lineare del sistema e la caratteristica dell'elemento non lineare ed è dato da

$$(x_0, y_0) = (2, 0).$$

Il corrispondente valore dell'uscita è

$$c_0 = r - x_0 = 2.$$

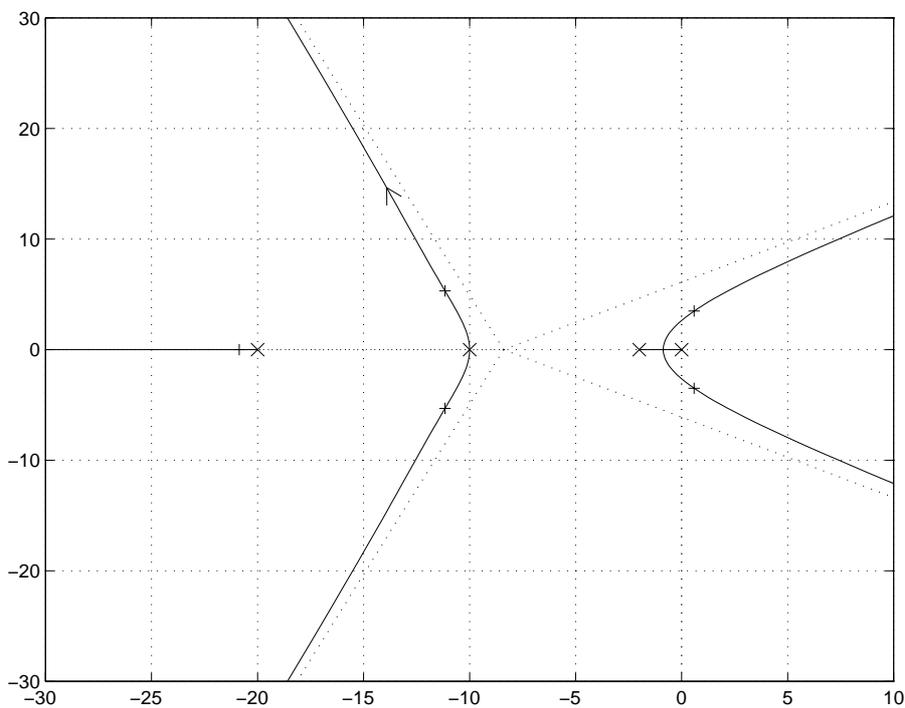


Fig. 6: Luogo delle radici.

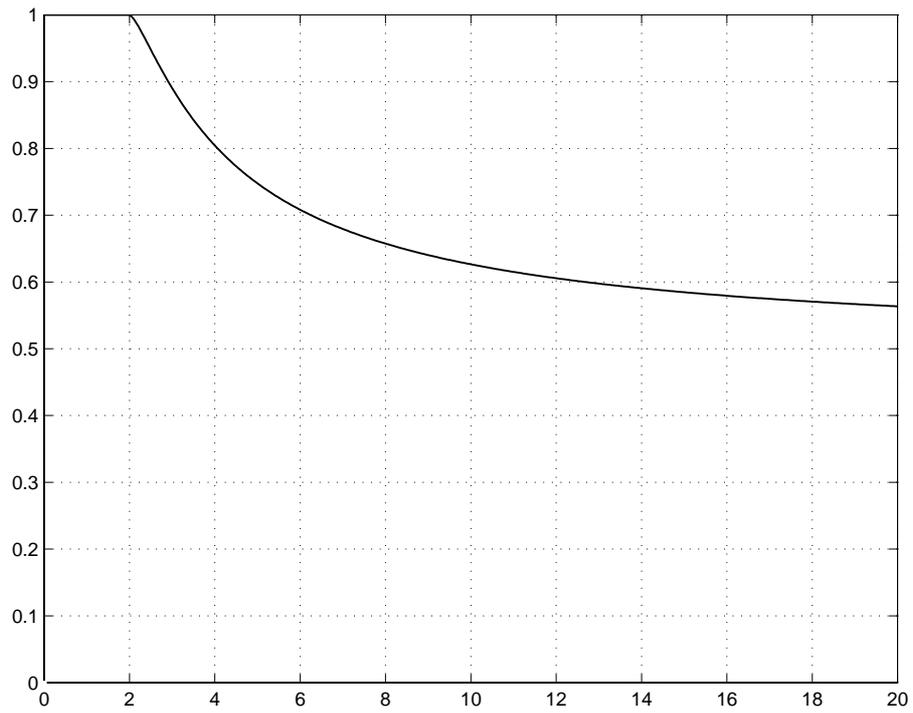


Fig. 7: Funzione descrittiva dell'elemento non lineare.

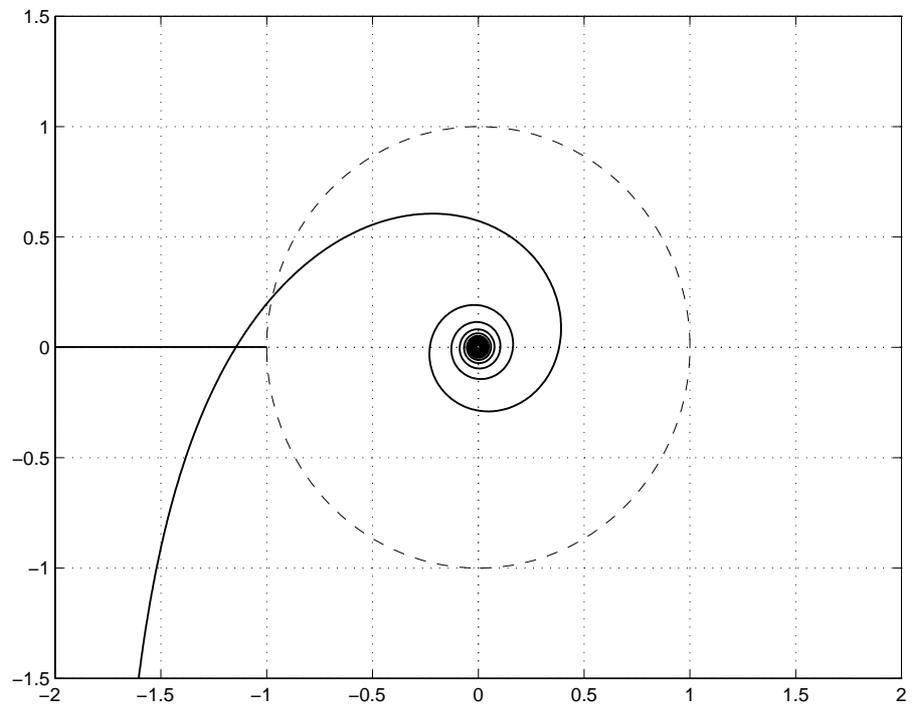


Fig. 8: Determinazione dell'esistenza di oscillazioni autosostenute.

g) L'andamento qualitativo della funzione descrittiva dell'elemento non lineare in corrispondenza del punto di lavoro individuato al punto f) è rappresentato in Fig.7. Il grafico di $-1/F(X)$ coincide con la porzione del semiasse reale negativo individuata dal segmento $[-2, -1]$. Essendo per ipotesi $\tau \ll 1.8$, si può considerare trascurabile l'effetto introdotto dal polo in $-1/\tau$ rispetto all'effetto del ritardo e quindi considerare, ai fini della determinazione di eventuali oscillazioni autosostenute, la funzione $\tilde{G}_1(s) = e^{-1.8s}/s$ come funzione di trasferimento della parte lineare del sistema. La pulsazione di intersezione del diagramma di Nyquist della parte lineare del sistema con il semiasse reale negativo si determina imponendo l'uguaglianza a $-\pi$ dell'argomento di $\tilde{G}_1(j\omega)$:

$$\angle \tilde{G}_1(j\omega) = -1.8\omega - \pi/2 = -\pi \quad \Rightarrow \quad \omega = \pi/3.6 = 0.8727 \text{ rad/sec.}$$

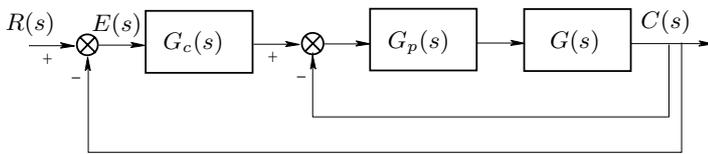
L'ascissa della intersezione risulta essere uguale all'opposto del modulo della $\tilde{G}_1(j\omega)$ per $\omega = 0.8727$ rad/sec:

$$\sigma_0 = - \left| \frac{e^{-1.8j\omega}}{j\omega} \right|_{\omega=0.8727} = - \frac{1}{\omega} \Big|_{\omega=0.8727} = -1.1459.$$

Dunque, poiché l'intersezione di $\tilde{G}_1(j\omega)$ con il semiasse reale negativo è compresa nel segmento $[-1, -2]$, esistono oscillazioni autosostenute.

Prova scritta di Controlli Automatici # 13

Si consideri il sistema in retroazione rappresentato dal diagramma a blocchi di Fig.1: l'anello di retroazione più interno ha lo scopo di prestabilizzare l'impianto $G(s)$, mentre quello più esterno ha lo scopo di garantire le prestazioni volute.



$$G(s) = -\frac{10(s+2)}{(s+1)(s-5)}.$$

Fig. 1: Sistema in retroazione.

- Si consideri il solo anello di retroazione più interno e si assuma $G_p(s) = K$. Utilizzando il criterio di Routh, si determini l'intervallo di valori di K per il quale il sistema in retroazione risulta essere stabile.
- Si consideri il solo anello di retroazione più interno e si assuma $G_p(s) = K$. Si tracci il luogo delle radici del sistema in retroazione al variare del parametro $K > 0$.
- Si consideri il solo anello di retroazione più interno. Si determinino i valori dei parametri $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ del regolatore

$$G_p(s) = -K \frac{s+\alpha}{s-\beta},$$

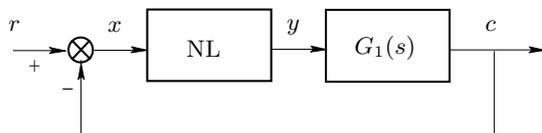
che cancella il polo stabile della $G(s)$ e che presenta un polo instabile in $+4$. Si tracci il luogo delle radici del sistema così compensato al variare del parametro $K > 0$. Si determini infine il valore di K per il quale il guadagno statico d'anello interno risulta essere uguale a 2.4.

- Si assuma che la funzione di trasferimento dell'anello di retroazione più interno abbia l'espressione

$$G_i(s) = \frac{G_p(s)G(s)}{1 + G_p(s)G(s)} = \frac{24(s+2)}{s^2 + 15s + 68}.$$

Si traccino i diagrammi asintotici di Bode (delle ampiezze e delle fasi) della corrispondente funzione di risposta armonica.

- Si assuma che la funzione di trasferimento $G_i(s)$ dell'anello di retroazione più interno abbia l'espressione introdotta al punto d). Si progetti per via analitica il regolatore $G_c(s)$ che garantisca una risposta al gradino caratterizzata da errore a regime nullo e non sovraelongata. A questo scopo si scelga come funzione di trasferimento campione quella di un filtro di Butterworth del minimo ordine possibile e con banda unitaria.
- Si consideri il sistema in retroazione rappresentato dal diagramma a blocchi di Fig.2. Si assuma che il blocco NL sia un guadagno unitario. Si determini il valore del parametro $K > 0$ che assegna al sistema in retroazione il margine di fase $M_f = \pi/3$. A questo scopo si considerino le costanti di tempo relative ai termini del primo ordine trascurabili rispetto all'entità del ritardo.



$$G_1(s) = \frac{K e^{-2s}}{s(1+0.01s)(1+0.02s)}.$$

Fig. 2: Sistema in retroazione unitaria.

- Con riferimento al sistema introdotto al punto f) e ancora nell'ipotesi che le costanti di tempo dei termini del primo ordine siano trascurabili rispetto al ritardo, si assuma che sia $K = 1$ e che il blocco NL sia costituito da un relé con soglia caratterizzato da $X_1 = 0.5$ e $Y_1 = 1$. Si verifichi l'esistenza di oscillazioni autosostenute. A questo scopo si utilizzi il grafico della funzione descrittiva dell'elemento non lineare rappresentato in Fig.4.

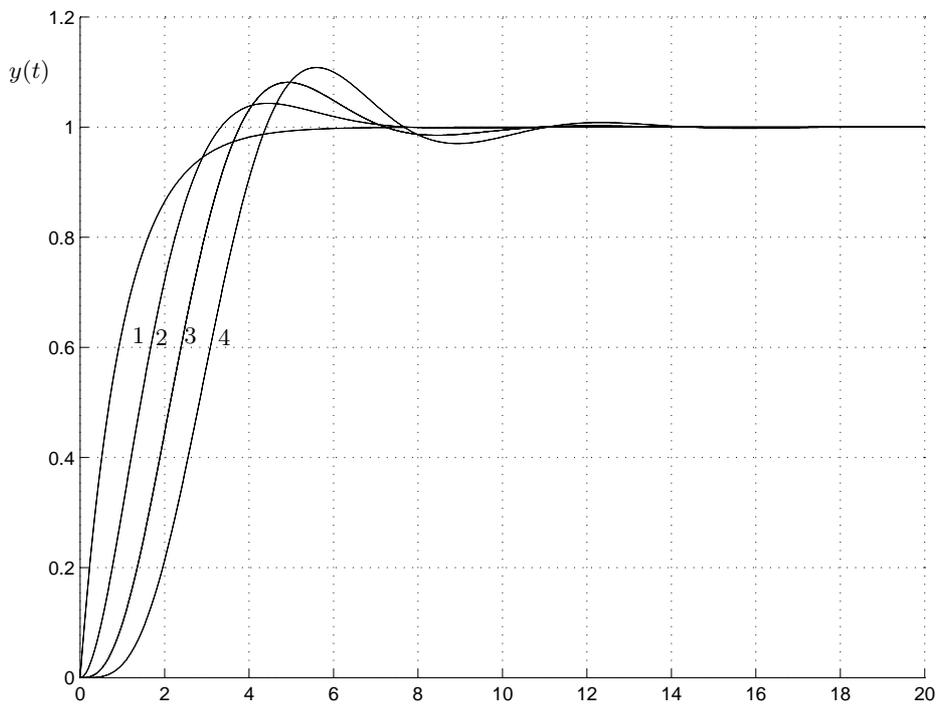


Fig. 3: Risposte al gradino dei filtri di Butterworth di ordine da 1 a 4.

ordine	α_4	α_3	α_2	α_1	α_0
1				1	1
2			1	1,414	1
3		1	2	2	1
4	1	2,613	3,414	2,613	1

Tab. 1: Tabella dei coefficienti dei filtri di Butterworth di ordine da 1 a 4.

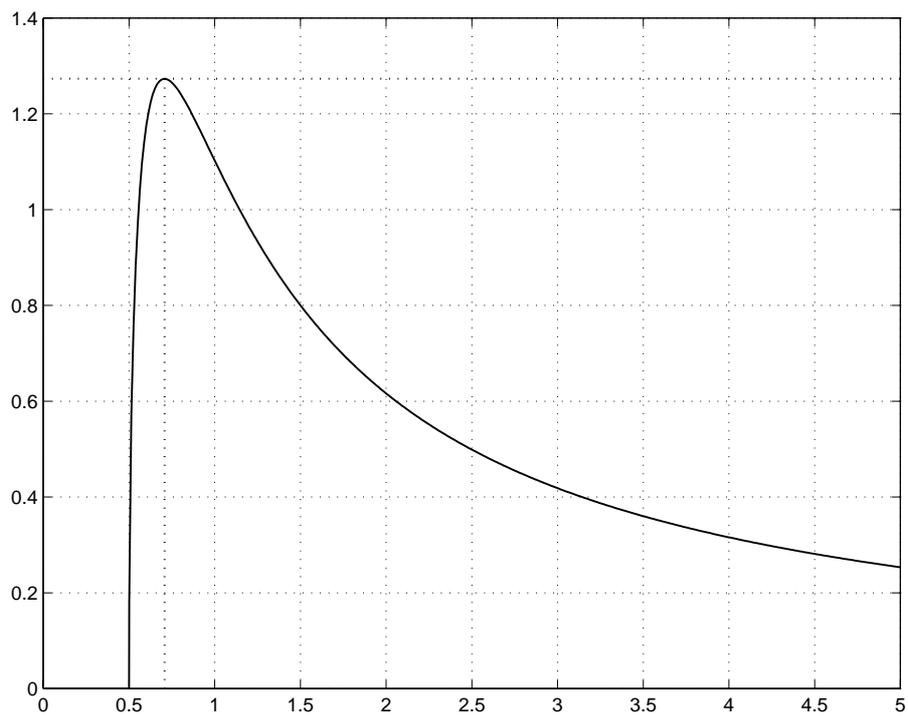


Fig. 4: Funzione descrittiva del relé con soglia assegnato al punto g).

Soluzione

a) Equazione caratteristica:

$$1 - \frac{10K(s+2)}{(s+1)(s-5)} = 0 \quad \Rightarrow \quad s^2 - 2(2+5K)s - 5(1+4K) = 0.$$

Tabella di Routh:

$$\begin{array}{c|cc} 2 & 1 & -5(1+4K) \\ 1 & -2(2+5K) & 0 \\ 0 & 10(2+5K)(1+4K) & \end{array}$$

Condizioni ricavate dalla tabella di Routh:

$$(2+5K < 0 \text{ e } 1+4K < 0) \quad \Rightarrow \quad (K < -2/5 = -0.4 \text{ e } K < -1/4 = 0.25).$$

Quindi il sistema in retroazione è stabile per K compreso tra $-\infty$ e -0.4 .

b) L'equazione alla quale fare riferimento per il tracciamento del luogo delle radici relativo all'anello più interno è

$$1 + K_1 G_1(s) = 0,$$

con

$$K_1 = -10K, \quad K > 0,$$

e

$$G_1(s) = \frac{s+2}{(s+1)(s-5)}.$$

Dunque, essendo $K_1 < 0$, i punti dell'asse reale che appartengono al luogo sono quelli che lasciano alla loro destra un numero totale pari di poli e zeri, e quindi sono dati dalla seguente unione di segmenti:

$$[-2 \ -1] \cup [5 \ \infty].$$

Il luogo presenta un solo asintoto che forma con l'asse reale l'angolo $\vartheta_a = 0$. Il luogo delle radici è rappresentato in Fig. 5.

c) La funzione di trasferimento del precompensatore $G_p(s)$ è data da

$$G_p(s) = -K \frac{s+1}{s-4}.$$

La funzione di trasferimento della catena diretta risulta essere

$$G_p(s)G(s) = 10K \frac{s+2}{(s-4)(s-5)}.$$

Il luogo delle radici relativo all'anello più interno con il precompensatore così progettato è rappresentato in Fig.6. Per garantire il guadagno statico d'anello desiderato si sceglie $K = 2.4$.

d) La funzione di trasferimento dell'anello di retroazione più interno, scritta in forma con costanti di tempo è

$$G_i(s) = 48 \frac{(1+0.5s)}{1 + 2 \cdot 0.9095 \left(\frac{s}{8.2462} \right) + \left(\frac{s}{8.2462} \right)^2}.$$

Dunque, le pulsazioni alle quali si hanno variazioni della pendenza del diagramma asintotico delle ampiezze sono $\omega_1 = 2$, corrispondente al polo reale stabile $p_1 = -2$, e $\omega_2 = 8.2462$, corrispondente alla pulsazione naturale della coppia di poli complessi coniugati stabili $p_{2,3} = -7.5 \pm 3.4278j$. Essendo $G_i(s)$ di tipo 0, per il posizionamento verticale del diagramma asintotico delle ampiezze si calcola semplicemente $G_i(0) = 0.7059 = -3.025$ db. Per quanto riguarda il diagramma asintotico delle fasi, essendo $G_i(s)$ di tipo 0, la fase iniziale è $\varphi_i = 0$, mentre la fase finale è $\varphi_f = -\pi/2$, poiché lo zero reale stabile introduce complessivamente un anticipo di $\pi/2$, mentre la coppia di poli complessi coniugati stabili introduce complessivamente un ritardo di π . Il rapporto fra le pulsazioni ω_a e ω_b alle quali il raccordo incontra gli asintoti e la pulsazione naturale ω_2 è dato da

$$\frac{\omega_2}{\omega_a} = \frac{\omega_b}{\omega_2} = 4.81^\delta = 4.81^{0.9095} = 4.1726.$$

I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi sono riportati in Fig.7 e in Fig.8, rispettivamente.

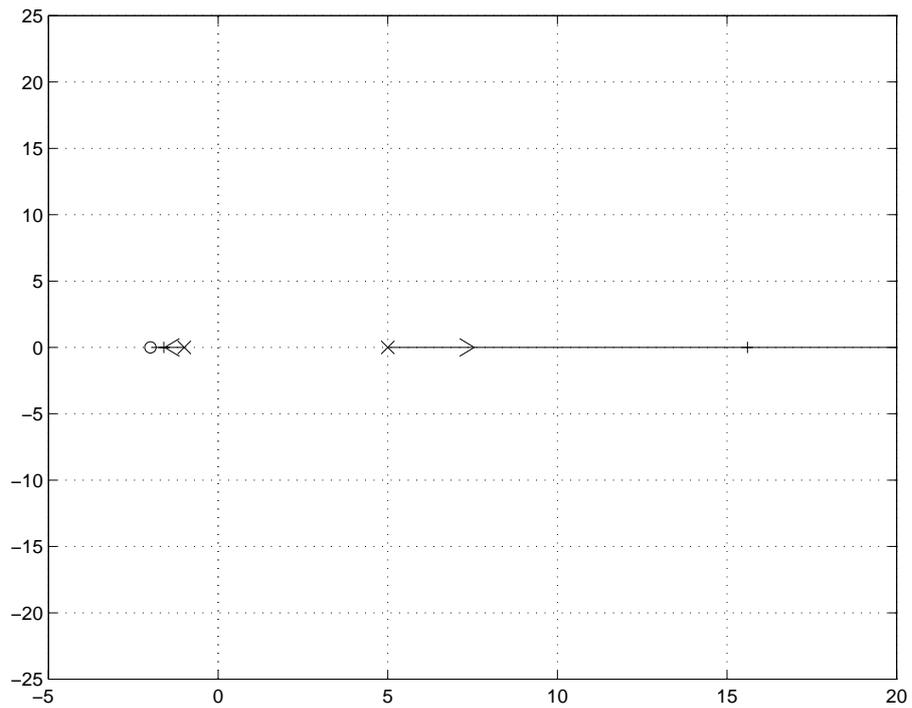


Fig. 5: Luogo delle radici.

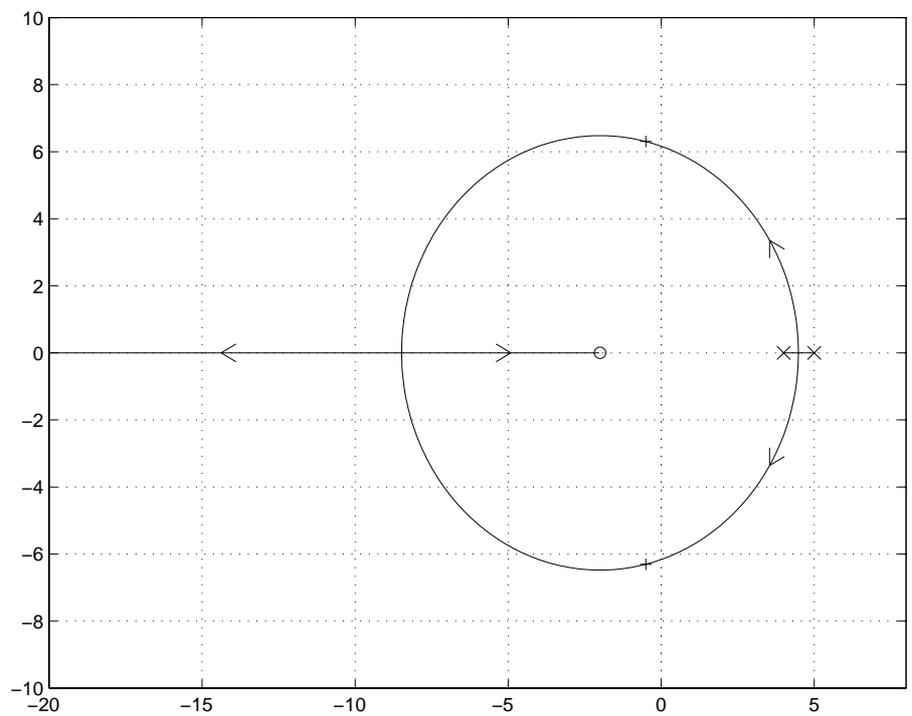


Fig. 6: Luogo delle radici del sistema compensato.

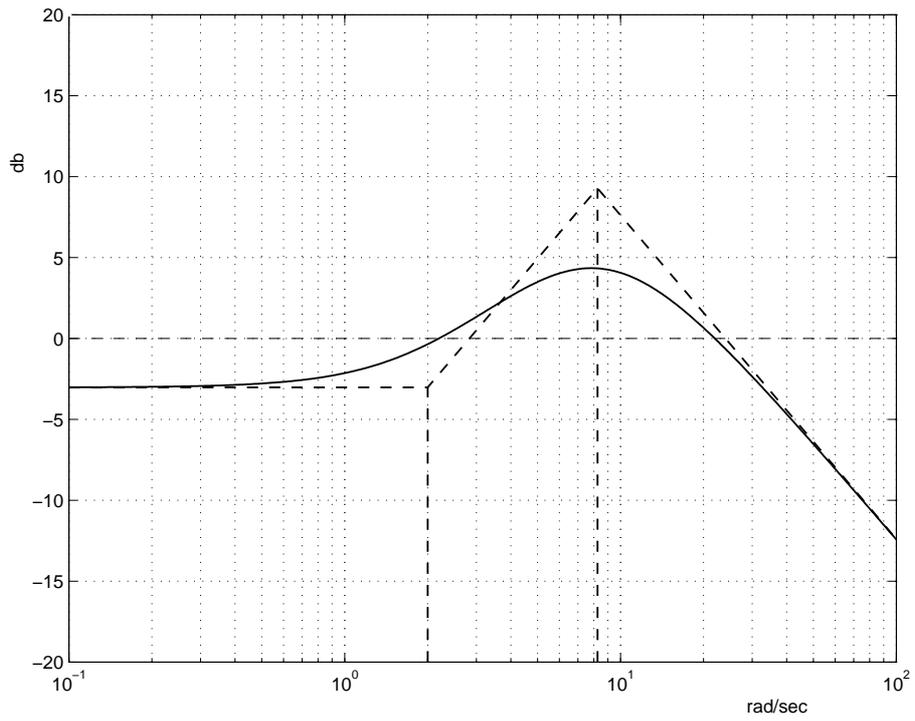


Fig. 7: Diagramma di Bode delle ampiezze.

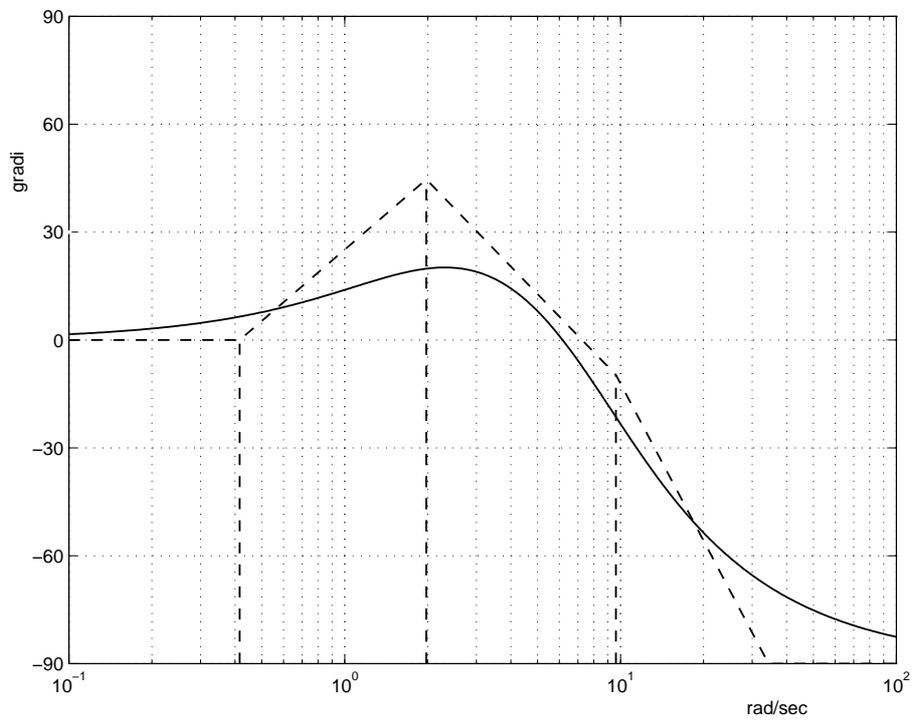


Fig. 8: Diagramma di Bode delle fasi.

e) Si sceglie come funzione di trasferimento campione la

$$G_0(s) = \frac{1}{s+1}.$$

Il regolatore risulta essere

$$G_c(s) = \frac{G_0(s)}{1 - G_0(s)} \frac{1}{G_i(s)} = \frac{0.04167(s^2 + 15s + 68)}{s(s+2)}.$$

f) Si indica con ω_1 la pulsazione di modulo unitario. Si ha:

$$|G_1(j\omega_1)| \cong \frac{K}{\omega_1} = 1 \implies \omega_1 = K,$$

e quindi

$$-2\omega_1 - \pi/2 - M_f = -\pi \implies \omega_1 = \pi/12 \implies K = \pi/12.$$

g) Il grafico di $-1/F(X)$ coincide con la porzione del semiasse reale negativo individuata da $[-\infty, -0.7854]$. L'ascissa dell'intersezione del diagramma di Nyquist della parte lineare del sistema con il semiasse reale negativo vale $\sigma_0 = -1.2732$. Dunque, esistono oscillazioni autosostenute.

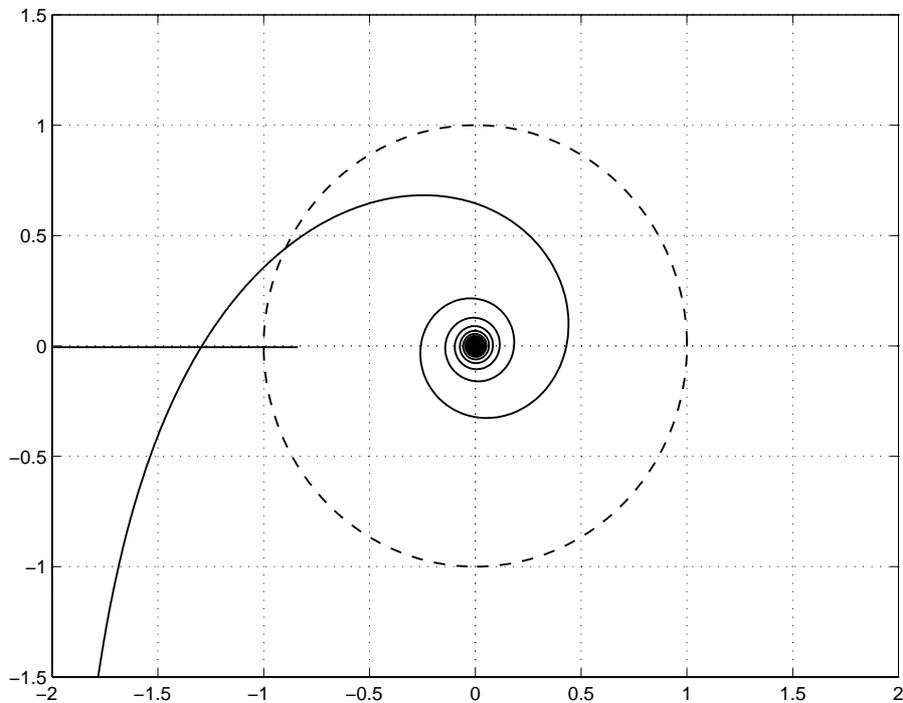
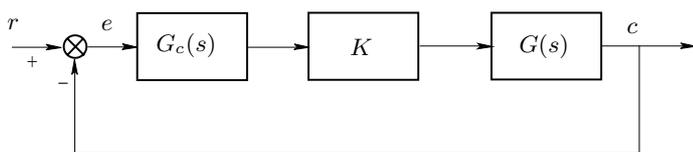


Fig. 9: Determinazione dell'esistenza di oscillazioni autosostenute.

Prova scritta di Controlli Automatici # 14

Si consideri il sistema in retroazione rappresentato dal diagramma a blocchi di Fig. 1.



$$G(s) = \frac{400}{s(s+4)(s+10)}.$$

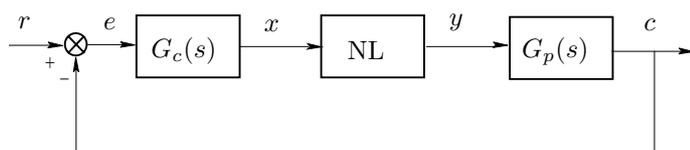
Fig. 1: Sistema in retroazione

- a) Assumendo $G_c(s) = 1$ e $K = 1$, si traccino i diagrammi asintotici di Bode (delle ampiezze e delle fasi) della funzione guadagno d'anello $G_a(j\omega) = KG_c(j\omega)G(j\omega)$ del sistema.
- b) Assumendo $G_c(s) = 1$ e $K = 1$, si determini la pulsazione ω_0 in corrispondenza della quale la funzione guadagno d'anello $G_a(j\omega) = KG_c(j\omega)G(j\omega)$ del sistema presenta fase uguale a -120° . A questo scopo si suggerisce di verificare per via analitica la correttezza del valore dedotto dal diagramma di Bode.
- c) Assumendo $K = 1$, si progetti il regolatore $G_c(s)$ in modo tale il sistema compensato presenti errore a regime nullo nella risposta al gradino e margine di fase $M_\varphi = 60^\circ$. A questo scopo si suggerisce di impiegare una rete a ritardo e anticipo¹ progettata assumendo come pulsazione di centro banda ω_0 la pulsazione alla quale la funzione guadagno d'anello del sistema non compensato presenta fase uguale a -120° e come rapporto fra le costanti di tempo il valore $\rho = \tau_2/\tau_1 = 10$. Si suggerisce infine di approssimare l'attenuazione introdotta dalla rete alla pulsazione ω_0 con il corrispondente valore sul diagramma asintotico.
- d) Si assuma che il regolatore $G_c(s)$ sia costituito da una rete ritardatrice avente funzione di trasferimento

$$G_c(s) = \frac{0.1(s+0.2)}{s+0.02}.$$

Si calcoli il valore dell'errore a regime nella risposta alla rampa unitaria del sistema ad anello chiuso, nell'ipotesi che sia $K = 1$.

- e) Si assuma che il regolatore $G_c(s)$ sia definito come al precedente punto d). Si calcoli il valore da assegnare al guadagno K in modo che l'errore a regime nella risposta alla rampa unitaria del sistema ad anello chiuso sia $e_r = 0.01$. Si verifichi che per tale valore di K il sistema ad anello chiuso è asintoticamente stabile.
- f) Si consideri il sistema in retroazione rappresentato in Fig.2, in cui l'elemento non lineare NL è definito dalla caratteristica statica ingresso-uscita rappresentata in Fig.3. Utilizzando il criterio di Popov, si determini il



$$G_c(s) = \frac{1}{s},$$

$$G_p(s) = \frac{55}{(s+1)(s+10)},$$

Fig. 2: Sistema in retroazione non lineare.

valore limite del parametro β che garantisce la stabilità assoluta del sistema in retroazione nel settore $[\varepsilon, \beta]$, con $\varepsilon > 0$. Si precisa che il diagramma di Popov della parte lineare del sistema è convesso.

- g) Con riferimento al sistema in retroazione non lineare introdotto al punto f) e ancora utilizzando il criterio di Popov, si determini l'intervallo di stabilità in r .

¹Si ricorda che la funzione di trasferimento della rete a ritardo e anticipo ha l'espressione

$$G_c(s) = \frac{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)}{(1 + \alpha \tau_1 s) \left(1 + \frac{\tau_2}{\alpha} s\right)}.$$

Si ricorda inoltre che la pulsazione di centro banda ω_0 è legata alle costanti di tempo τ_1 e τ_2 dalla relazione $\omega_0 = 1/\sqrt{\tau_1 \tau_2}$ e che α è il valore dell'approssimazione asintotica del diagramma di Bode delle ampiezze della rete in corrispondenza di ω_0 .

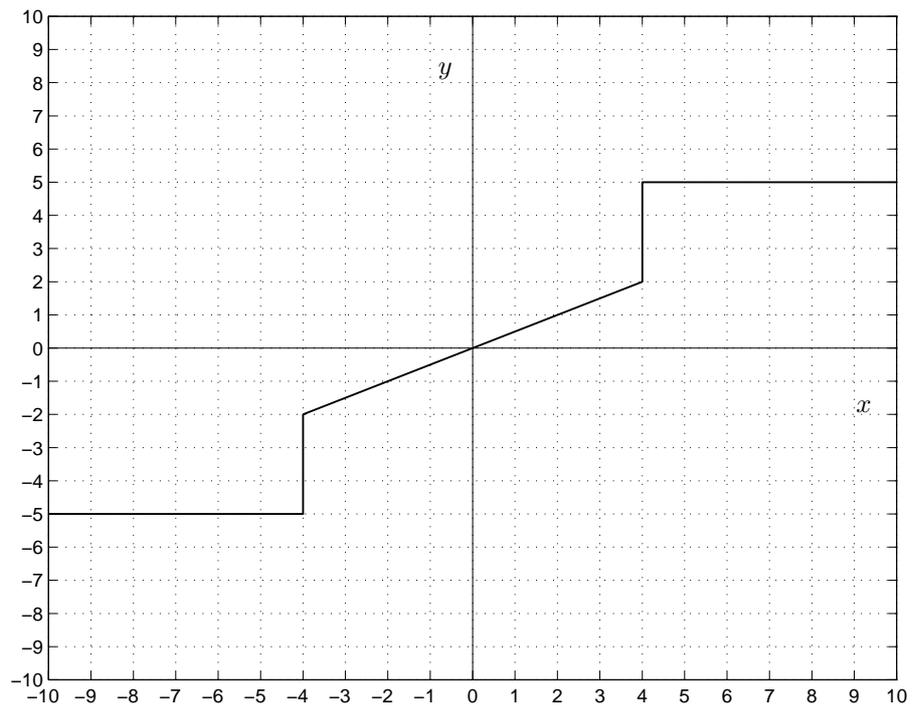


Fig. 3: Caratteristica dell'elemento non lineare.

Soluzione

a) La funzione guadagno d'anello $G_a(j\omega)$ del sistema è data da

$$G_a(j\omega) = G(j\omega) = \frac{10}{j\omega(1 + 0.25j\omega)(1 + 0.1j\omega)}.$$

I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi sono riportati in Fig.4 e in Fig.5, rispettivamente.

b) Dal diagramma di Bode delle fasi si deduce il valore $\omega_0 \cong 1.56$ rad/sec. Per via analitica si trova

$$G_a(j\omega_0) = \frac{10}{j\omega_0(1 + 0.25j\omega_0)(1 + 0.1j\omega_0)} = \frac{10}{1.56 \cdot 1.0734 \cdot 1.0121} e^{-j\left(\frac{\pi}{2} + 0.3719 + 0.1548\right)} = 5.9005 e^{-j2.0975}$$

da cui

$$|G_a(j\omega_0)| = 5.9005 = 15.4178 \text{ db},$$

$$\angle G_a(j\omega_0) = -2.0975 \text{ rad} = -120.1777^\circ.$$

c) Il valore della pulsazione alla quale la funzione guadagno d'anello del sistema non compensato presenta fase uguale a -120° , da assumersi come pulsazione di centro banda della rete a ritardo e anticipo, è stata determinata al precedente punto b) e vale $\omega_0 = 1.56$ rad/sec. Tenendo conto della relazione che sussiste fra quest'ultima e le costanti di tempo τ_1 e τ_2 e assumendo $\rho = \frac{\tau_2}{\tau_1} = 10$, si ha

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\tau_1 \tau_2}} = \frac{1}{\sqrt{10 \tau_1^2}} = 1.56,$$

da cui

$$\tau_1 = 0.2027, \quad \tau_2 = 2.027.$$

Al fine di imporre il margine di fase desiderato, l'attenuazione (approssimata con il relativo valore del diagramma delle ampiezze asintotico) introdotta dalla rete alla pulsazione ω_0 viene scelta uguale all'inverso del modulo della funzione guadagno d'anello del sistema non compensato alla pulsazione ω_0 , cioè

$$\alpha = \frac{1}{|G_a(j\omega_0)|} = \frac{1}{5.9005} = 0.1695.$$

Dunque, la funzione di trasferimento della rete a ritardo e anticipo risulta essere

$$G_c(s) = \frac{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)}{(1 + \alpha \tau_1 s)\left(1 + \frac{\tau_2}{\alpha} s\right)} = \frac{(1 + 0.2027s)(1 + 2.027s)}{(1 + 0.1695 \cdot 0.2027s)\left(1 + \frac{2.027}{0.1695} s\right)} = \frac{(1 + 0.2027s)(1 + 2.027s)}{(1 + 0.0344s)(1 + 11.9587s)}.$$

d) L'errore a regime nella risposta al gradino unitario si calcola con l'espressione

$$e_r = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + G_a(s)} \frac{1}{s^2} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} sG_a(s)} = \frac{1}{K_v},$$

dove K_v è dato da

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG_a(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sK \frac{40(s + 0.2)}{s(s + 0.02)(s + 4)(s + 10)} = 10K.$$

Di conseguenza,

$$e_r = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{10K},$$

e quindi

$$e_r = 0.1, \quad \text{per } K = 1.$$

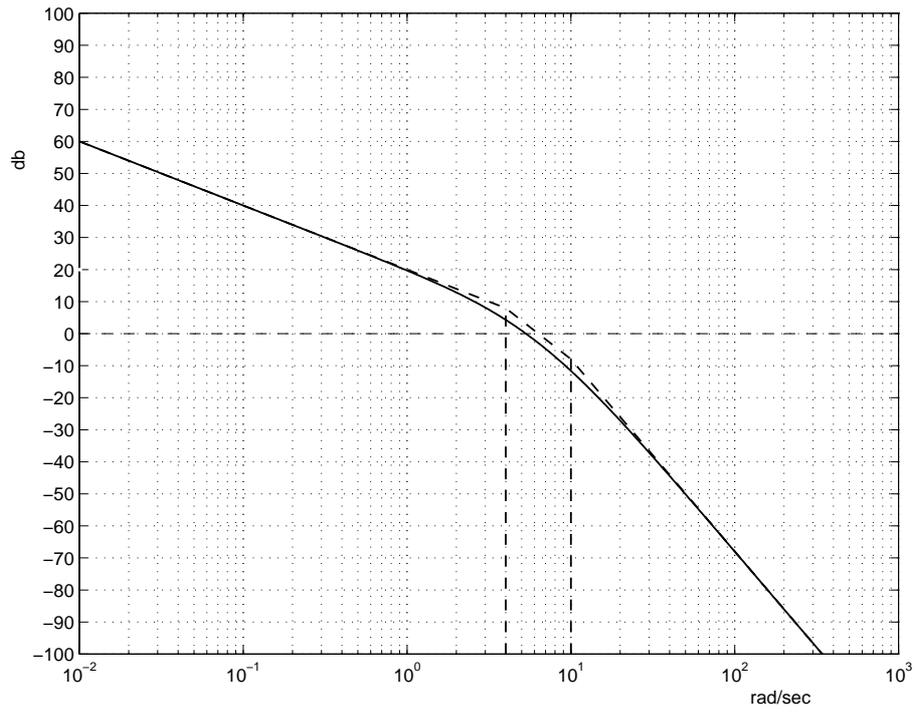


Fig. 4: Diagramma di Bode delle ampiezze della funzione guadagno d'anello.

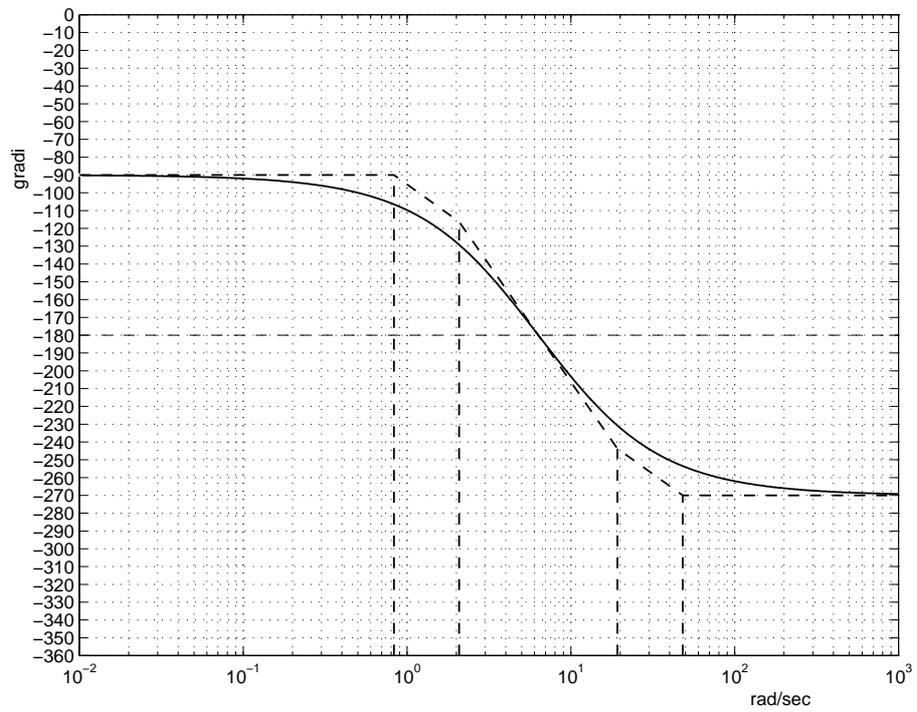


Fig. 5: Diagramma di Bode delle fasi della funzione guadagno d'anello.

e) Dall'espressione di e_r ricavata al precedente punto d), cioè

$$e_r = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{10K},$$

si ricava

$$e_r = 0.01, \quad \text{per } K = 10.$$

Il valore di K così determinato rientra nell'intervallo di valori per i quali il sistema ad anello chiuso è stabile, come si prova con il criterio di Routh. Per $K = 10$, l'equazione caratteristica è

$$1 + 10 \cdot \frac{0.1(s + 0.2)}{s + 0.02} \cdot \frac{400}{s(s + 4)(s + 10)} = 0,$$

che si può anche riscrivere nella forma

$$s^4 + 14.02s^3 + 40.28s^2 + 400.8s + 80 = 0.$$

La corrispondente tabella di Routh è

4	1	40.28	80
3	14.02	400.8	
2	12.2123	80	
1	308.9582		
0	80		

Poiché nella prima colonna della tabella non ci sono variazioni di segno, per $K = 10$ il sistema ad anello chiuso risulta stabile asintoticamente.

f) L'intersezione con il semiasse reale negativo del diagramma di Popov della parte lineare del sistema

$$G_l(s) = G_c(s)G_p(s) = \frac{55}{s(s + 1)(s + 10)}$$

coincide con quella del diagramma di Nyquist della stessa $G_l(s)$ e si può perciò ricavare a partire dal valore limite K^* del guadagno K che si ottiene costruendo la tabella di Routh relativa all'equazione caratteristica:

$$s(s + 1)(s + 10) + 55K = 0,$$

ossia

$$s^3 + 11s^2 + 10s + 55K = 0.$$

La tabella di Routh è

3	1	10
2	11	55K
1	$5(2 - K)$	
0	$275K(2 - K)$	

da cui si ricava $K^* = 2$ e quindi l'ascissa dell'intersezione con il semiasse reale negativo è

$$\sigma_0 = -\frac{1}{K^*} = -\frac{1}{2}.$$

Di conseguenza, il valore limite del parametro è $\beta = 2$.

g) Considerando la traslazione dell'origine del settore $[\varepsilon, \beta]$ lungo la caratteristica dell'elemento non lineare a partire dall'origine, si deduce che la caratteristica dell'elemento non lineare risulta non essere più contenuta nel settore $[\varepsilon, \beta]$ quando l'origine di quest'ultimo coincide con il punto di coordinate $x = 2$ e $y = 1$. Poiché le variabili r ed y , in condizioni statiche, sono legate dalla relazione

$$r = G_p(0)y,$$

ossia

$$r = 5.5y,$$

in corrispondenza del valore limite $y = 1$, si ha il valore limite $r = 5.5$, per cui l'intervallo di stabilità in r risulta essere, per simmetria,

$$-5.5 \leq r \leq 5.5.$$

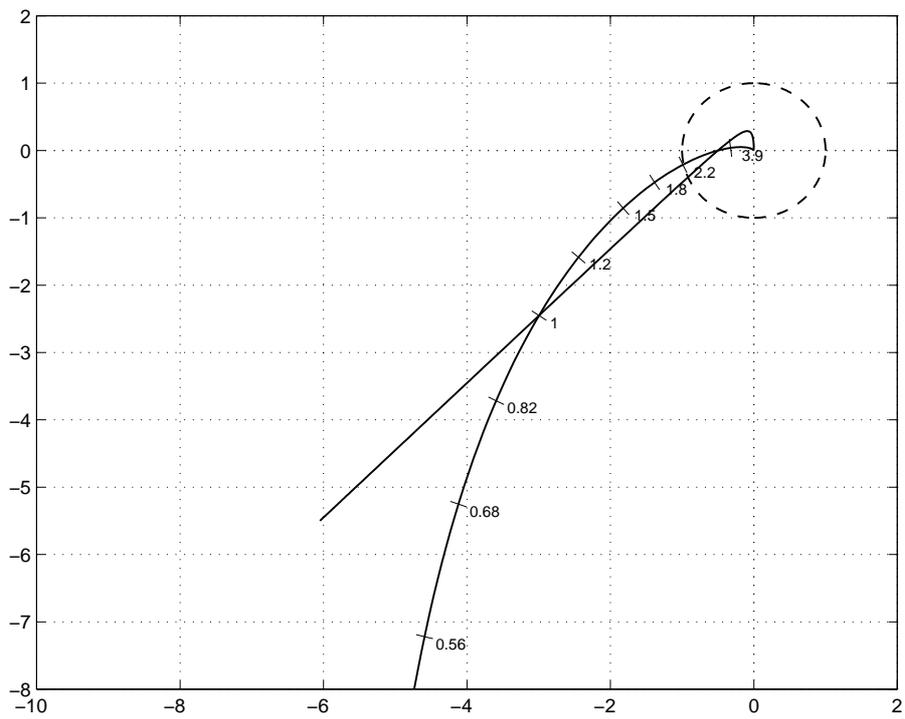
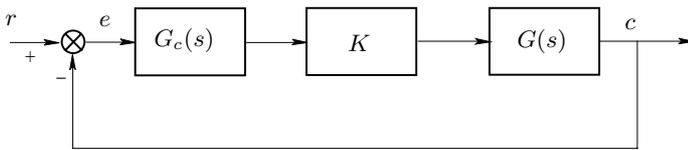


Fig. 6: Diagrammi di Popov e di Nyquist della parte lineare del sistema.

Prova scritta di Controlli Automatici # 15

Si consideri il sistema in retroazione rappresentato dal diagramma a blocchi di Fig. 1.



$$G(s) = \frac{1000}{s(s+1)(s^2+20s+200)}.$$

Fig. 1: Sistema in retroazione.

- a) Assumendo $G_c(s) = 1$, si determini l'intervallo dei valori di K per i quali il sistema è stabile.
- b) Assumendo $G_c(s) = 1$ e $K = 1$, si traccino i diagrammi asintotici di Bode (delle ampiezze e delle fasi) della funzione guadagno d'anello $G_a(j\omega) = KG_c(j\omega)G(j\omega)$ del sistema.
- c) Assumendo $G_c(s) = 1$ e $K = 1$, si determinino il margine di ampiezza e il margine di fase del sistema e le rispettive pulsazioni. A questo scopo si suggerisce di utilizzare i diagrammi di Bode e di verificare analiticamente i risultati ottenuti.
- d) Assumendo $K = 1$, si dica se è possibile assegnare al sistema margine di fase $M_F = 45^\circ$ mediante, rispettivamente, una rete ritardatrice o una rete anticipatrice inserite nell'anello al posto del blocco genericamente indicato con $G_c(s)$.
- e) Si determini la funzione di trasferimento $G_c(s)$ della rete correttiva che assegna al sistema margine di fase $M_F = 45^\circ$ alla pulsazione $\omega = 4.59$ rad/sec. A questo scopo si suggerisce di utilizzare le formule di inversione¹.
- f) Si consideri il sistema in retroazione rappresentato in Fig.1, in cui si assume $G_c(s) = 1$ e in cui il blocco K è sostituito da una saturazione il cui intervallo di linearità è definito dalla coppia di valori $X_1 = 4$, $Y_1 = 16$. Si analizzi la possibilità che nel sistema si inneschino oscillazioni autosostenute e, in caso affermativo, si determinino pulsazione e ampiezza dell'oscillazione all'uscita del sistema in retroazione.
- g) Si calcoli la massima pendenza di un ingresso a rampa R/s^2 che, in condizioni di regime, può essere inseguito con errore costante dal sistema in retroazione. A questo scopo si osservi che la saturazione deve operare al limite della zona di linearità, cioè con $X = X_1 = 4$.

¹Si ricorda che le formule di inversione per la rete anticipatrice sono

$$\alpha = \frac{M \cos \varphi - 1}{M(M - \cos \varphi)}, \quad \omega\tau = \frac{M - \cos \varphi}{\sin \varphi},$$

e che le stesse valgono anche per la rete ritardatrice invertendo M e cambiando di segno φ .

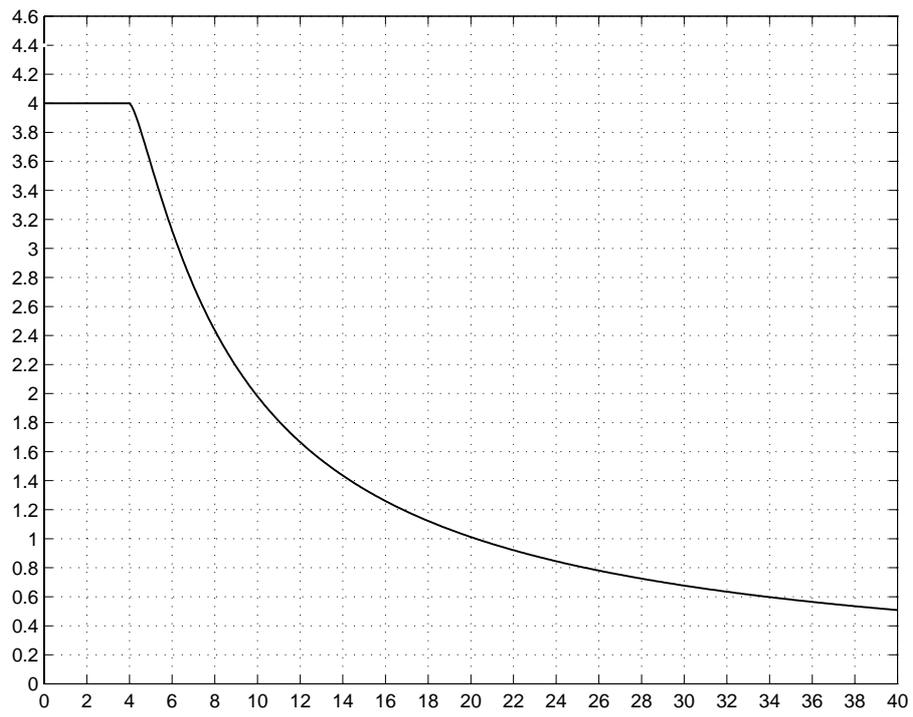


Fig. 2: Funzione descrittiva della saturazione con $X_1 = 4$ e $Y_1 = 16$.

Soluzione

a) L'intervallo dei valori di K per i quali il sistema è stabile si determina con il criterio di Routh. L'equazione caratteristica è

$$s^4 + 21s^3 + 220s^2 + 200s + 1000K = 0.$$

La tabella di Routh è

4	1	220	1000K
3	21	200	0
2	4420	21000K	0
1	1000(441K - 884)	0	
0	21000000K(441K - 884)		

da cui si ricava $0 < K < K^* = 2.0045$.

b) La funzione guadagno d'anello $G_a(j\omega)$ del sistema è data da

$$G_a(j\omega) = G(j\omega) = \frac{5}{j\omega(1+j\omega)(1-0.005\omega^2+0.1j\omega)}.$$

I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi sono riportati in Fig.3 e in Fig.4, rispettivamente.

c) *Determinazione del margine di ampiezza:* Dai diagrammi di Bode si deduce che alla pulsazione $\omega_\pi \cong 3$ rad/sec, alla quale la fase è circa uguale a -180° , il modulo della funzione guadagno d'anello è

$$|G(j\omega_\pi)| \cong -6 \text{ db} \cong 0.5012.$$

Quindi il margine di ampiezza è

$$M_A \cong 6 \text{ db} \cong 2.$$

La verifica per via analitica fornisce

$$\begin{aligned} |G(j\omega_\pi)| &= |G(3j)| = 0.5265 = -5.572 \text{ db}, \\ \angle G(j\omega_\pi) &= \angle G(3j) = -3.124 \text{ rad/sec} = -179^\circ. \end{aligned}$$

Determinazione del margine di fase: Dai diagrammi di Bode si deduce che alla pulsazione di incrocio $\omega_1 \cong 2.1$ rad/sec, la fase della funzione guadagno d'anello è

$$\angle G(j\omega_1) \cong -167^\circ.$$

Quindi il margine di fase è

$$M_\phi \cong -167^\circ + 180^\circ = 13^\circ.$$

La verifica per via analitica fornisce

$$\begin{aligned} |G(j\omega_1)| &= |G(2.1j)| = 1.023 = 0.2009 \text{ db}, \\ \angle G(j\omega_1) &= \angle G(2.1j) = -2.909 \text{ rad} = -166.7^\circ. \end{aligned}$$

d) La costruzione effettuata sui diagrammi di Bode del guadagno d'anello del sistema non compensato al fine di individuare il massimo anticipo/ritardo ottenibile con la rete correttiva in funzione dell'amplificazione/attenuazione fornito dalla rete alla medesima pulsazione, si vede che la specifica sul margine di fase può essere soddisfatta con una rete ritardatrice nell'intervallo di pulsazioni $[0, 0.8]$ rad/sec, e con una rete anticipatrice nell'intervallo di pulsazioni $[2.5, 7]$ rad/sec.

e) In base ai risultati del precedente punto e), si osserva che la pulsazione $\omega = 4.59$ rad/sec appartiene all'intervallo in corrispondenza del quale è possibile rendere soddisfatta la specifica sul margine di fase con una rete anticipatrice. In corrispondenza della pulsazione $\omega = 4.59$ rad/sec si ha

$$\begin{aligned} |G(j\omega)| &= 0.2306 = -12.74 \text{ db}, \\ \angle G(j\omega) &= -195^\circ. \end{aligned}$$

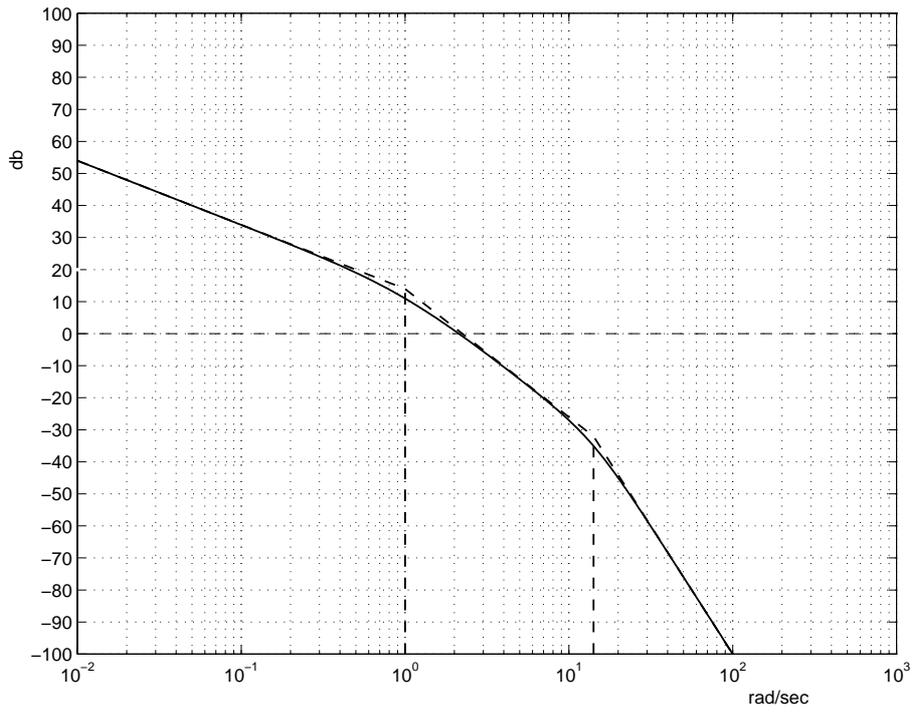


Fig. 3: Diagramma di Bode delle ampiezze della funzione guadagno d'anello.

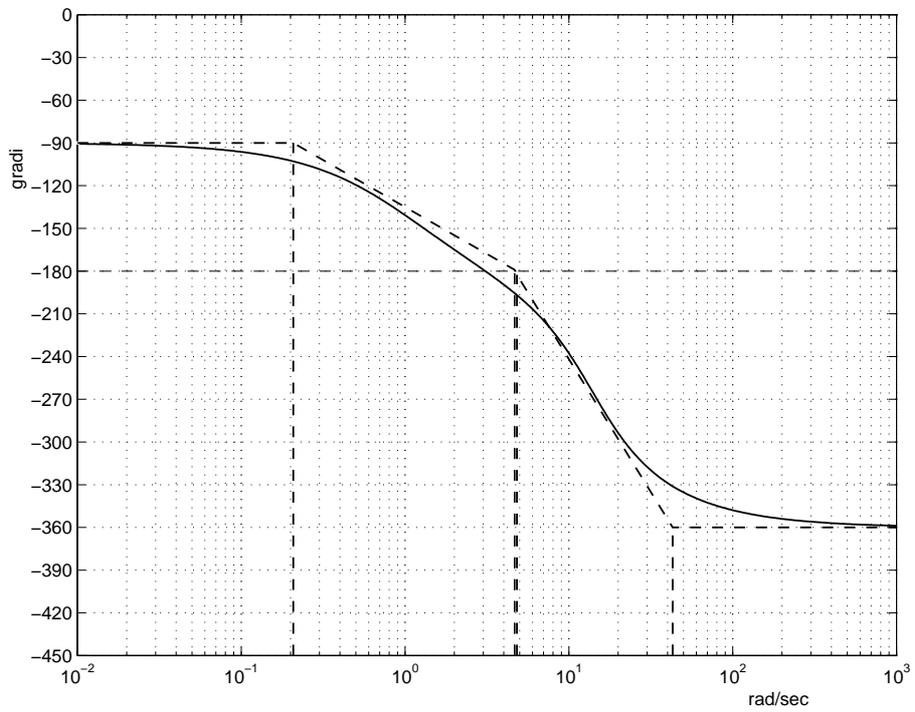


Fig. 4: Diagramma di Bode delle fasi della funzione guadagno d'anello.

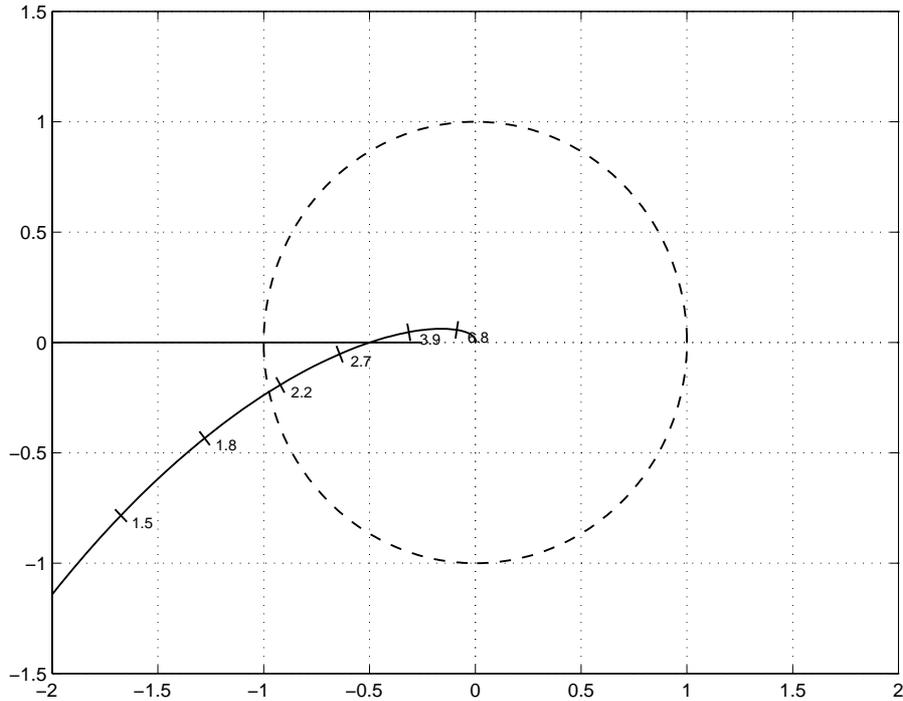


Fig. 5: Determinazione dei possibili cicli limite.

Di conseguenza, l'amplificazione e l'anticipo di fase che la rete deve fornire sono, rispettivamente,

$$M = \frac{1}{0.2306} = 4.3365,$$

$$\varphi = +195^\circ - 135^\circ = 60^\circ = 1.0472 \text{ rad}.$$

Applicando le formule di inversione si trovano i valori dei parametri della rete:

$$\alpha = 0.0702,$$

$$\tau = 0.9651.$$

La funzione di trasferimento risulta pertanto

$$G_c(s) = \frac{1 + 0.9651s}{1 + 0.0678s} = \frac{14.25(s + 1.036)}{s + 14.56}.$$

f) Il diagramma polare della parte lineare del sistema $G(j\omega)$ interseca il semiasse reale negativo in corrispondenza dell'ascissa il cui modulo è uguale all'inverso di K^* determinato al punto a), cioè

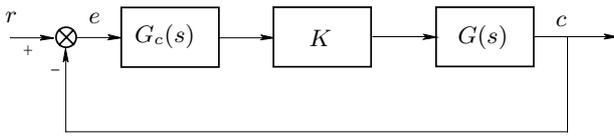
$$\sigma_0 = -\frac{1}{K^*} = -0.4988.$$

D'altra parte, dal diagramma della funzione descrittiva della saturazione si deduce che il valore massimo assunto da $F(X)$ è uguale a 4, di conseguenza si ha intersezione fra il diagramma polare di $G(j\omega)$ e il diagramma di $-1/F(X)$ in corrispondenza dell'ascissa σ_0 . Si veda anche il diagramma riportato in Fig.5. In corrispondenza dell'intersezione si ha $F(X) = K^* = 2.0045$. Dal diagramma della funzione descrittiva, si deduce il corrispondente valore dell'ampiezza dell'oscillazione all'ingresso della saturazione $X \cong 10 (= 9.875)$, questa, essendo la retroazione unitaria, coincide anche con l'ampiezza dell'oscillazione all'uscita del sistema.

g) In condizioni stazionarie, il sistema $G(s)$ si comporta come un semplice integratore con funzione di trasferimento $5/s$ e riceve in ingresso un segnale costante e uguale a 16. Di conseguenza l'espressione del segnale in uscita è $80/s^2$, il che significa che la massima pendenza della rampa che può essere inseguita con errore a regime costante è appunto uguale a 80.

Prova scritta di Controlli Automatici # 16

Si consideri il sistema in retroazione rappresentato dal diagramma a blocchi di Fig. 1.



$$G(s) = \frac{100(s+2)}{s^2(s+4)(s+10)}.$$

Fig. 1: Sistema in retroazione.

- a) Assumendo $G_c(s) = 1$, si determini l'intervallo dei valori di K per i quali il sistema è stabile.
- b) Assumendo $G_c(s) = 1$, si tracci il luogo delle radici del sistema in retroazione al variare del parametro $K > 0$.
- c) Assumendo $G_c(s) = 1$ e $K = 1$, si traccino i diagrammi asintotici di Bode (delle ampiezze e delle fasi) della funzione guadagno d'anello $G_a(j\omega) = KG_c(j\omega)G(j\omega)$ del sistema.
- d) Assumendo $K = 1$, si determini l'intervallo di valori della pulsazione ω per i quali, impiegando un'opportuna rete correttiva $G_c(s)$, è possibile assegnare al sistema compensato margine di fase $M_\varphi = 45^\circ$. A questo scopo, utilizzando il grafico riportato in Fig.2, si costruiscano sull'opportuno diagramma di Bode le curve corrispondenti al massimo ritardo e al massimo anticipo di fase ottenibili con le rispettive reti correttive.
- e) Assumendo $K = 1$, si determini la funzione di trasferimento $G_c(s)$ della rete correttiva che assegna al sistema margine di fase $M_\varphi = 45^\circ$ alla pulsazione $\omega = 6 \text{ rad/sec}$. A questo scopo si suggerisce di utilizzare le formule di inversione¹.
- f) Si consideri il sistema in retroazione rappresentato in Fig.1, in cui si assume

$$G_c(s) = 1, \quad G(s) = \frac{3.2 \cdot 10^4}{(s+4)(s+10)(s+20)(s+40)},$$

e in cui il blocco K è sostituito da un blocco non lineare la cui caratteristica è rappresentata in Fig.3. Si analizzi la possibilità che nel sistema si inneschino oscillazioni autosostenute e, in caso affermativo, si determinino pulsazione e ampiezza dell'oscillazione all'uscita del sistema in retroazione.

- g) Con riferimento al sistema introdotto al punto f), si determini la pulsazione alla quale l'ampiezza dell'oscillazione all'uscita del sistema in retroazione risulta attenuata di ulteriori 10 db e si progetti la rete correttiva $G_c(s)$ che consente di soddisfare questa specifica. A questo scopo si suggerisce di tracciare il diagramma di Bode delle ampiezze di $G(s)$.

¹Si ricorda che le formule di inversione per la rete anticipatrice sono

$$\alpha = \frac{M \cos \varphi - 1}{M(M - \cos \varphi)}, \quad \omega\tau = \frac{M - \cos \varphi}{\sin \varphi},$$

e che le stesse valgono anche per la rete ritardatrice invertendo M e cambiando di segno φ .

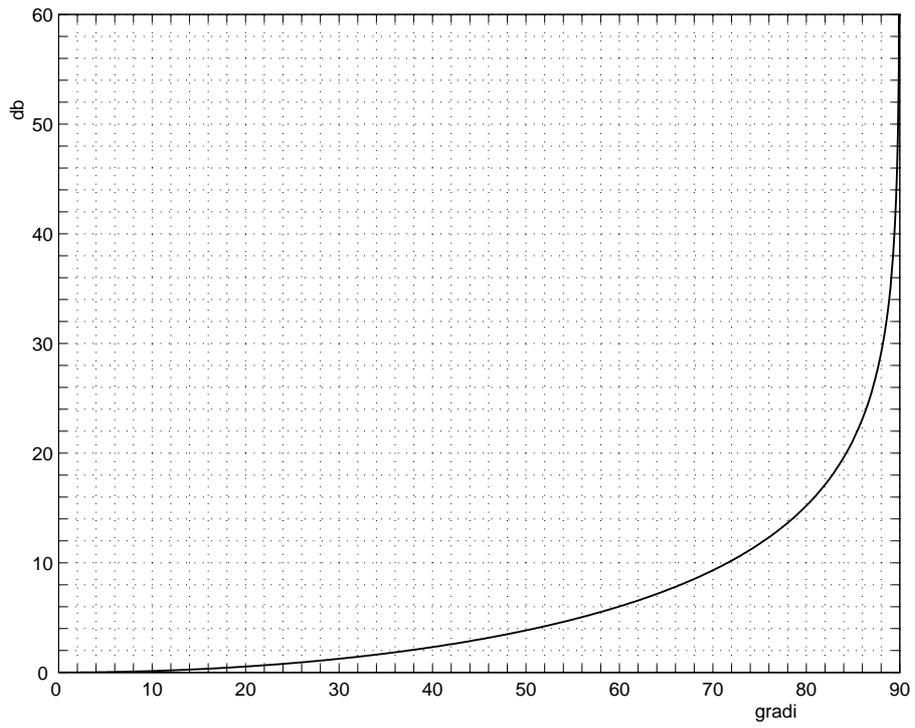


Fig. 2: Condizione di realizzabilità della rete correttiva (M vs. φ).

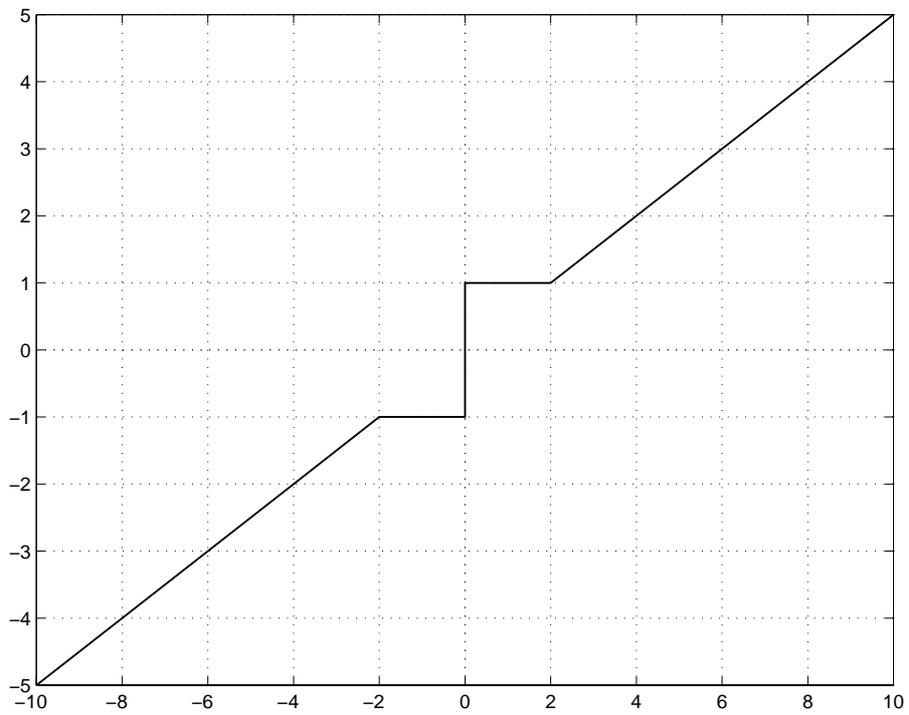


Fig. 3: Caratteristica dell'elemento non lineare.

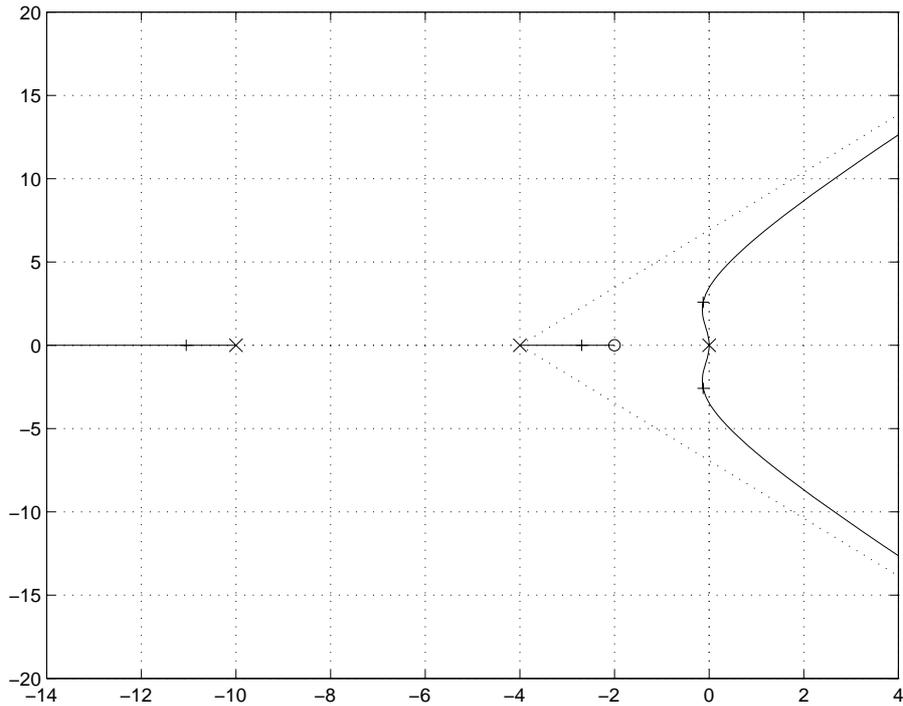


Fig. 4: Luogo delle radici.

Soluzione

a) L'intervallo dei valori di K per i quali il sistema è stabile si determina con il criterio di Routh. L'equazione caratteristica è

$$s^4 + 14s^3 + 40s^2 + 100Ks + 200K = 0.$$

La tabella di Routh è

4	1	40	200K
3	14	100K	0
2	$560 - 100K$	$2800K$	0
1	$100K(168 - 100K)$	0	
0	$2800K$		

da cui si ricava $0 < K < K^* = 1.6800$.

b) Poli e zeri:

$$p_{1,2} = 0, \quad p_3 = -4, \quad p_4 = -10 \quad z_1 = -2 \quad \Rightarrow \quad n = 4 \text{ rami e } n - m = 4 - 1 = 3 \text{ asintoti.}$$

Punti dell'asse reale che appartengono al luogo:

$$[-\infty \quad -10] \cup [-4 \quad -2].$$

Centro stella degli asintoti:

$$\sigma_a = \frac{1}{3}(-4 - 10 + 2) = -4$$

Angoli formati dagli asintoti con l'asse reale:

$$\theta_{a,\nu} = \frac{(2\nu + 1)\pi}{3}, \quad \text{con } \nu = 0, 1, 2,$$

quindi $\theta_0 = \pi/3, \theta_1 = \pi, \theta_2 = 5\pi/3$. Il luogo delle radici è rappresentato in Figura 4.

c) La funzione guadagno d'anello $G_a(j\omega)$ del sistema è data da

$$G_a(j\omega) = G(j\omega) = \frac{5(1 + 0.5j\omega)}{(j\omega)^2(1 + 0.1j\omega)(1 + 0.25j\omega)}.$$

I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi sono riportati in Fig.5 e in Fig.6, rispettivamente.

d) Dalla costruzione di Fig.7 risulta evidente che non è possibile assegnare al sistema compensato il margine di fase $M_\varphi = 45^\circ$ con una rete ritardatrice, mentre è possibile farlo con una rete anticipatrice per $3 < \omega < 12$.

e) In base ai risultati del precedente punto e), si osserva che la pulsazione $\omega = 6$ rad/sec appartiene all'intervallo in corrispondenza del quale è possibile rendere soddisfatta la specifica sul margine di fase con una rete anticipatrice. In corrispondenza della pulsazione $\omega = 6$ rad/sec si ha

$$\begin{aligned} |G(j\omega)| &= 0.2089 = -13.6 \text{ db}, \\ \angle G(j\omega) &= -195.7^\circ. \end{aligned}$$

Di conseguenza, l'amplificazione e l'anticipo di fase che la rete deve fornire sono, rispettivamente,

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{0.2089} = 4.7870, \\ \varphi &= +195.7^\circ - 135^\circ = 60.7^\circ = 1.0594 \text{ rad}. \end{aligned}$$

Applicando le formule di inversione si trovano i valori dei parametri della rete:

$$\begin{aligned} \alpha &= 0.0653, \\ \tau &= 0.8213. \end{aligned}$$

La funzione di trasferimento risulta pertanto

$$G_c(s) = \frac{1 + 0.8213s}{1 + 0.0536s} = \frac{15.31(s + 1.218)}{s + 18.65}.$$

f) Il diagramma polare della parte lineare del sistema, $G(j\omega)$, interseca il semiasse reale negativo in corrispondenza dell'ascissa il cui modulo è uguale all'inverso di $K^* = 7.593$, cioè

$$\sigma_0 = -\frac{1}{K^*} = -0.1316.$$

dove K^* si determina applicando il criterio di Routh, come indicato di seguito. L'equazione caratteristica è

$$s^4 + 74s^3 + 1680s^2 + 13600s + 32000(1 + K) = 0.$$

La tabella di Routh è

4	1	1680	32000(1 + K)
3	74	13600	0
2	1496.2	32000(1 + K)	
1	17981 - 2368K	0	
0	32000(1 + K)		

da cui si ricava $-1 < K < K^* = 7.593$. D'altra parte, il diagramma di $-1/F(X)$ coincide con il segmento $[-2 \ 0]$ del semiasse reale negativo. Dunque esiste un'intersezione, e quindi un ciclo limite, in particolare stabile in corrispondenza dell'ascissa $\sigma_0 = -0.1316$. La corrispondente pulsazione si ottiene risolvendo l'equazione ausiliaria

$$s^2 + 183.7873 = 0,$$

e vale $\omega = 13.5568$ rad/sec. Al fine di calcolare l'ampiezza dell'oscillazione all'uscita del sistema in retroazione, ampiezza che coincide anche con quella dell'oscillazione all'ingresso dell'elemento non lineare, si suppone che quest'ultimo operi come un relé ideale. In tal caso si ha $F(X) = 4Y_1/\pi X$ e quindi, in corrispondenza dell'intersezione si ha

$$-\frac{1}{F(X)} = -\frac{\pi X}{4Y_1} = -0.1316.$$

Da cui, essendo $Y_1 = 1$, si ricava $X = 0.1676$, che conferma la validità dell'ipotesi formulata. La costruzione per la determinazione dei possibili cicli limite è mostrata in Fig.8.

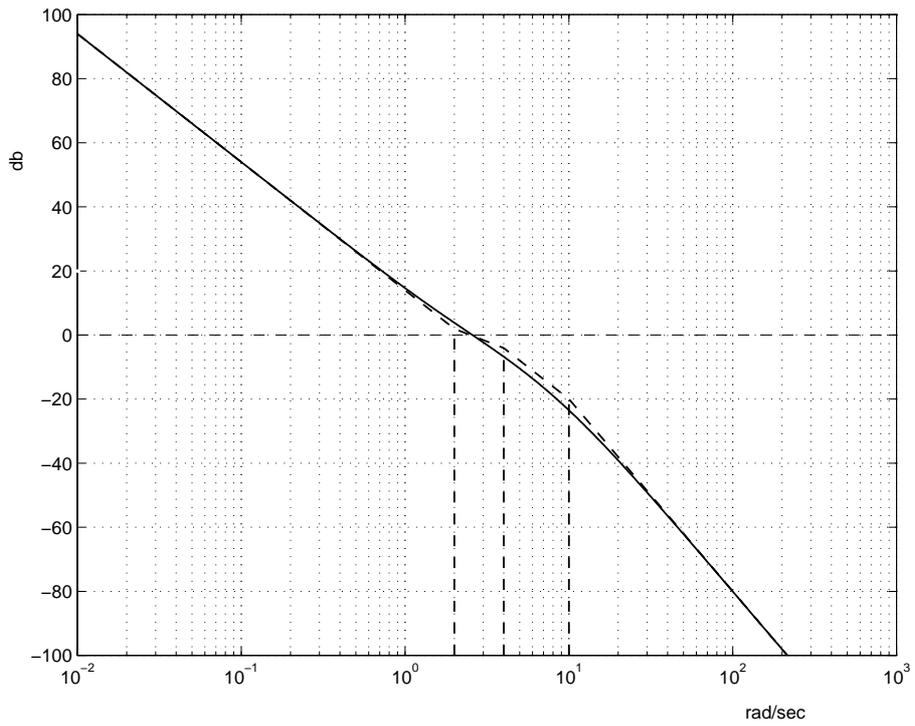


Fig. 5: Diagramma di Bode delle ampiezze della funzione guadagno d'anello.

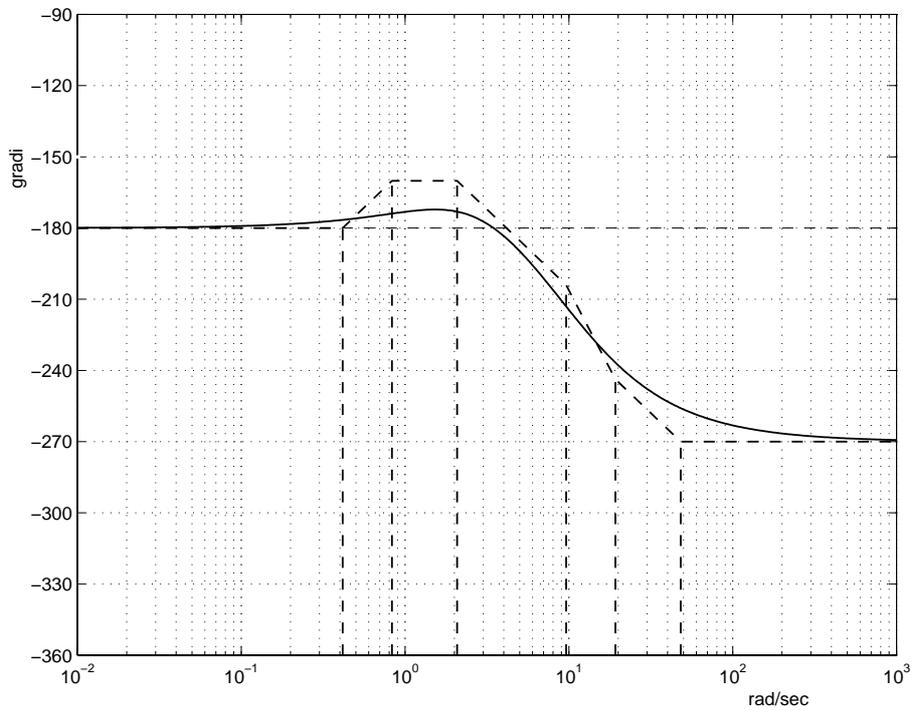


Fig. 6: Diagramma di Bode delle fasi della funzione guadagno d'anello.

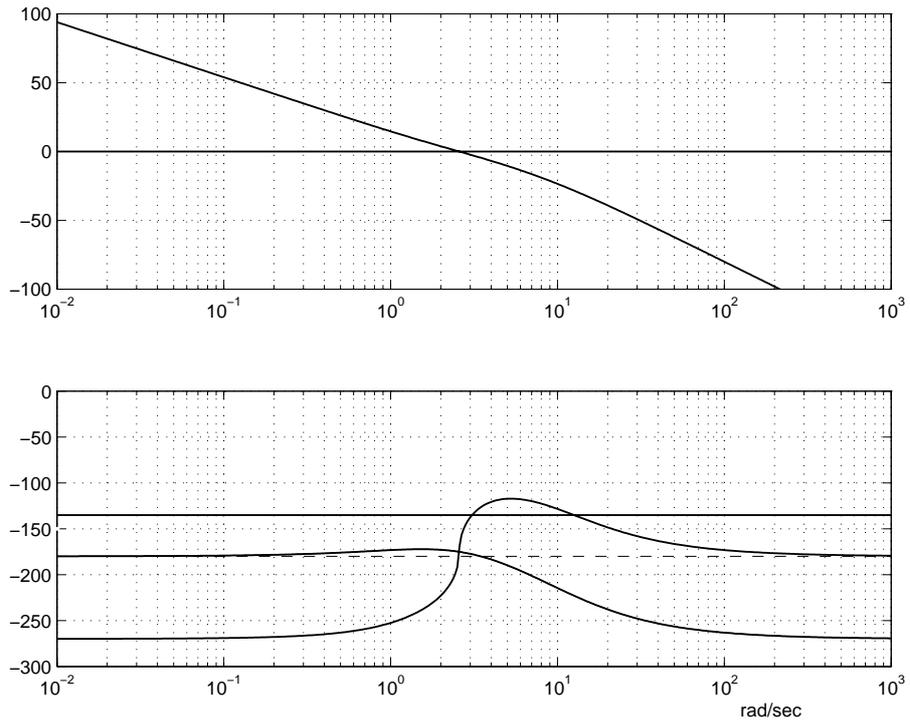


Fig. 7: Costruzione per il progetto della rete correttiva.

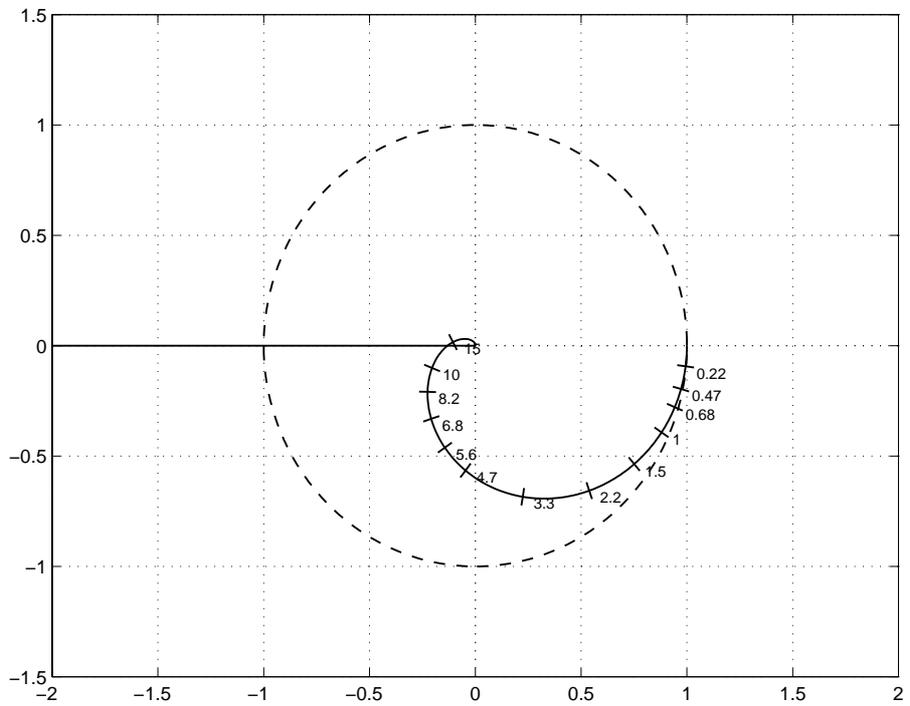


Fig. 8: Determinazione dei possibili cicli limite.

g) Alla pulsazione di oscillazione $\omega = 13.56$ rad/sec si ha $|G(j\omega)| = 0.1316 = -17.61$ db. Dalla Fig.9 si osserva che $|G(j\omega)| \cong -27.61$ db per $\omega \cong 22.3$ rad/sec. Essendo $\angle G(j\omega) = -223^\circ$ per $\omega_1 \cong 22.3$ rad/sec, si deve impiegare una rete anticipatrice che fornisca l'anticipo $\varphi = 43^\circ$ alla pulsazione $\omega_1 \cong 22.3$ rad/sec. Una possibile rete anticipatrice per la quale la funzione di trasferimento della parte lineare del sistema risulta avere fase $-\pi$ alla pulsazione $\omega_1 = 22.3$ rad/sec è

$$G_c(s) = \frac{10.74(s + 2.33)}{(s + 25.03)}.$$

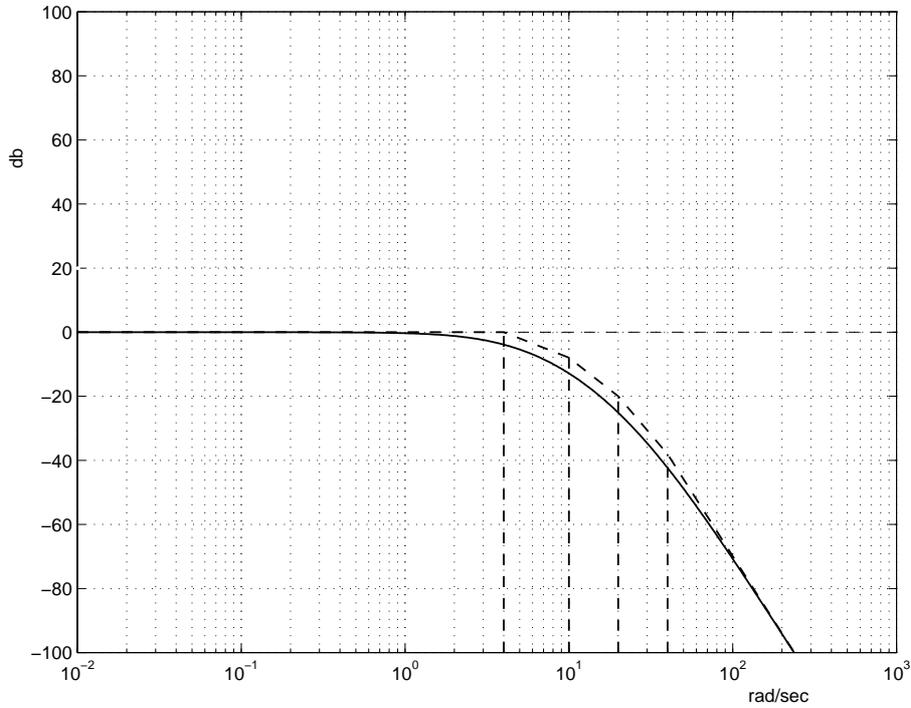


Fig. 9: Diagramma di Bode delle ampiezze della $G(j\omega)$ definita al punto f).

Prova scritta di Controlli Automatici # 17

Si consideri il sistema in retroazione rappresentato dal diagramma a blocchi di Fig. 1.

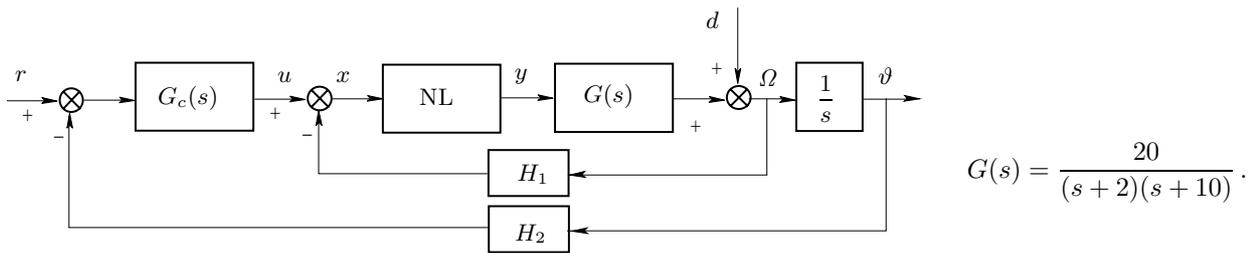


Fig. 1: Sistema in retroazione.

- a) Assumendo $G_c(s) = 0$, $H_2 = 0$ e il blocco NL costituito da un guadagno unitario, si determini per via analitica il valore della costante H_1 per il quale la reiezione del disturbo d alla pulsazione di 1 rad/sec è uguale a 20 db. Si verifichi se per tale valore di H_1 l'anello di retroazione è stabile.
- b) Assumendo $G_c(s) = 0$, $H_1 = 20$, $H_2 = 0$ e il blocco NL costituito da un guadagno unitario, si traccino i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione di trasferimento $G_{\vartheta d}(s)$ dal disturbo d all'uscita ϑ .
- c) Si assuma $G_c(s) = 0$, $H_1 = 10$, $H_2 = 0$ e il blocco NL costituito da una saturazione di livello $Y_1 = 10$ e guadagno unitario. Il disturbo d sia costituito da una sinusoide di ampiezza D e pulsazione uguale a 1 rad/sec. Si determini il valore massimo D_M dell'ampiezza del disturbo per il quale il sistema in retroazione opera in condizioni di linearità, cioè per il quale il segnale y applicato al sistema $G(s)$ rimane, in modulo, inferiore al valore 10.
- d) Assumendo $G_c(s) = 0$, $H_1 = 10$, $H_2 = 1$ e il blocco NL costituito da un guadagno unitario, si calcoli l'espressione della funzione di trasferimento $G_{\vartheta u}(s)$ dal segnale manipolabile u all'uscita ϑ e se ne tracci il diagramma di Bode delle fasi. Si determini per approssimazioni successive il valore della pulsazione $\bar{\omega}$ alla quale la fase di $G_{\vartheta u}(j\omega)$ è uguale a -120° .
- e) Assumendo $H_1 = 10$, $H_2 = 1$ e il blocco NL costituito da un guadagno unitario, si progetti il blocco $G_c(s)$ in modo da garantire errore a regime nullo nella risposta alla rampa e margine di fase $M_\varphi = 60^\circ$. A questo scopo si suggerisce di impiegare un regolatore PID progettato assumendo come pulsazione di centro banda la pulsazione alla quale il sistema non compensato presenta fase uguale a -120° e assumendo il rapporto T_i/T_d fra le costanti di tempo delle azioni integrale e derivativa uguale a 10.
- f) Assumendo $H_1 = 10$, $H_2 = 1$ e il blocco NL costituito da un guadagno unitario, si progetti il blocco $G_c(s)$ in modo da garantire errore a regime nullo nella risposta al gradino, massima sovraelongazione della risposta al gradino non superiore al 10% e tempo di ritardo non superiore a 1 sec. A questo scopo si suggerisce di procedere per via analitica, scegliendo come funzione di trasferimento campione quella di un filtro di Butterworth di ordine minimo e pulsazione di rottura opportuna.
- g) Si assuma $G_c(s) = 0$, $H_1 = H_1(s) = 40/(s+1)$, $H_2 = 0$ e il blocco NL costituito da una saturazione di livello $Y_1 = 10$ e guadagno unitario. Si determinino pulsazione ω e ampiezza X di eventuali oscillazioni autosostenute presenti nel sistema.

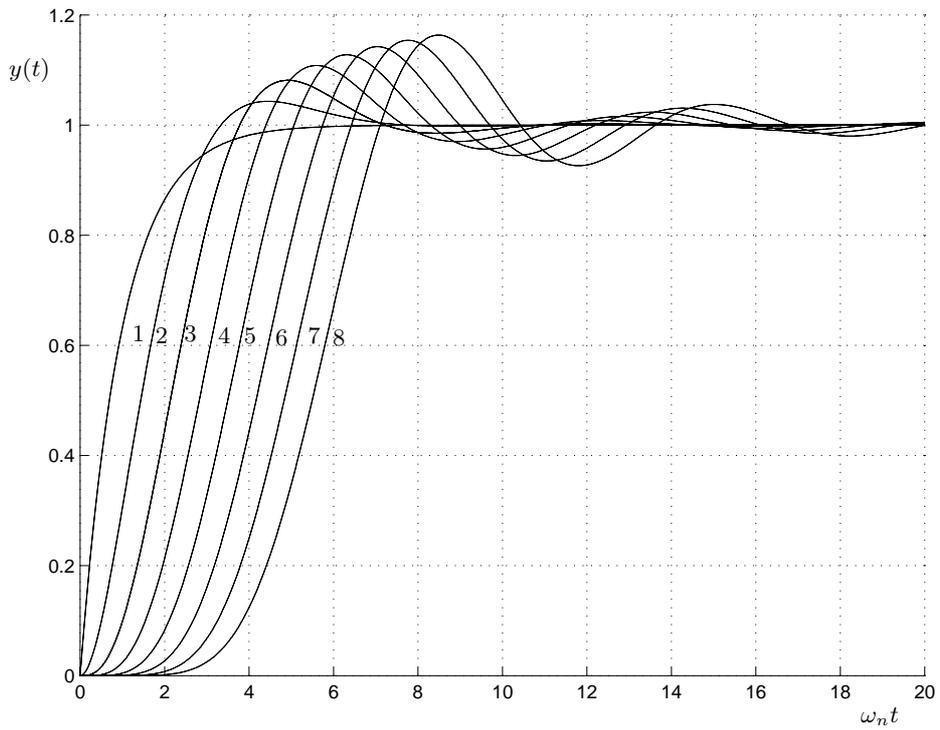


Fig. 2: Risposte al gradino dei filtri di Butterworth di ordine da 1 a 8.

ordine	α_8	α_7	α_6	α_5	α_4	α_3	α_2	α_1	α_0
1								1	1
2							1	1,414	1
3						1	2	2	1
4					1	2,613	3,414	2,613	1
5				1	3,236	5,236	5,236	3,236	1
6			1	3,864	7,464	9,142	7,464	3,864	1
7		1	4,494	10,10	14,60	14,60	10,10	4,494	1
8	1	5,126	13,14	21,85	25,69	21,85	13,14	5,126	1

Tab. 1: Tabella dei coefficienti dei filtri di Butterworth di ordine da 1 a 8.

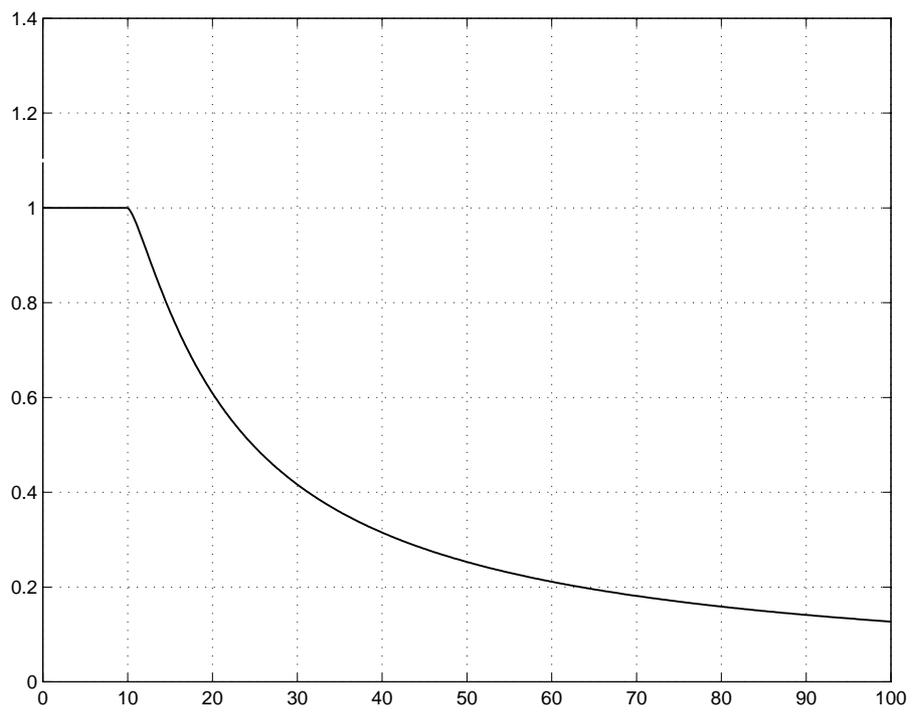


Fig. 3: Funzione descrittiva della saturazione.

Soluzione

a) La funzione di trasferimento dal disturbo d all'uscita ϑ ha l'espressione:

$$G_{\vartheta d}(s) = \frac{1}{s [1 + H_1 G(s)]}.$$

Alla pulsazione $\omega = 1$ rad/sec deve essere

$$|G_{\vartheta d}(j)| = \frac{1}{|j [1 + H_1 G(j)]|} = 0.1.$$

Sostituendo a $G(j)$ la relativa espressione, con semplici manipolazioni si ottiene

$$\left| 1 + \frac{20 H_1}{(2 + j)(10 + j)} \right| = 10,$$

da cui si ricava

$$400 H_1^2 + 760 H_1 - 49995 = 0,$$

e quindi $H_1 = 10.2701$ come unica soluzione positiva. Per tale valore di H_1 , l'equazione caratteristica del sistema in retroazione è

$$1 + 10.2701 \frac{20}{(s + 2)(s + 10)} = 0,$$

ossia

$$s^2 + 12 s + 225.4020 = 0.$$

Le sue soluzioni, $p_{1,2} = -6 \pm 13.7623 j$, sono entrambe a parte reale strettamente negativa, per cui l'anello di retroazione è stabile asintoticamente.

b) La funzione di risposta armonica $G_{\vartheta d}(j\omega)$ ha l'espressione

$$G_{\vartheta d}(j\omega) = \frac{1}{j\omega \left[1 + \frac{400}{(j\omega + 2)(j\omega + 10)} \right]} = \frac{(j\omega + 2)(j\omega + 10)}{j\omega (420 - \omega^2 + 12 j\omega)}.$$

I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi sono riportati in Fig.4 e in Fig.5, rispettivamente.

c) In condizioni di linearità si ha

$$Y(s) = G_{yd}(s)D(s),$$

con

$$G_{yd}(s) = \frac{H_1}{1 + H_1 G(s)},$$

ossia

$$G_{yd}(j\omega) = \frac{10}{1 + 10 \frac{20}{(j\omega + 2)(j\omega + 10)}}.$$

Alla pulsazione di 1 rad/sec deve essere

$$|Y(j)| = |G_{yd}(j)| D_M = 10,$$

da cui

$$D_M = \frac{10}{|G_{yd}(j)|} = \frac{10}{1.025} = 9.7561.$$

d) L'espressione della funzione di trasferimento $G_{\vartheta u}(s)$ è

$$G_{\vartheta u}(s) = \frac{G(s)}{s [1 + H_1 G(s)]} = \frac{20}{s (s^2 + 12 s + 220)}.$$

Il relativo diagramma di Bode delle fasi è riportato in Fig.6. Dal diagramma di Fig.6, si legge $\bar{\omega} = 7.8$ rad/sec. Analiticamente si verifica che

$$G_{\vartheta u}(7.8j) = 0.0139 e^{-j 2.102},$$

da cui

$$|G_{\vartheta u}(7.8j)| = 0.0139 = -37.15 \text{ db}$$

$$\angle G_{\vartheta u}(7.8j) = -2.102 \text{ rad} = -120.5^\circ.$$

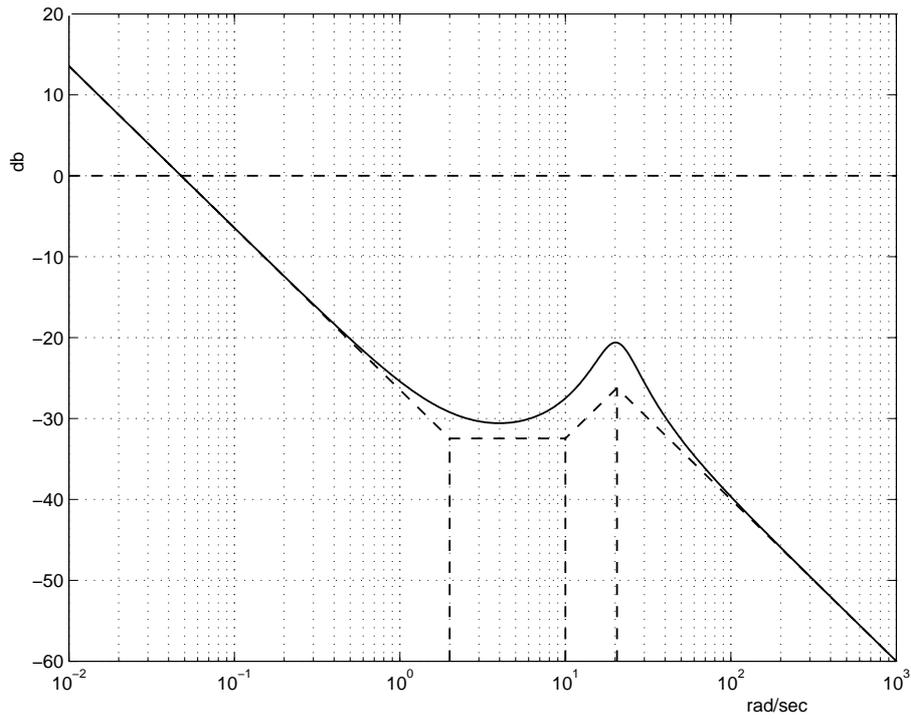


Fig. 4: Diagramma di Bode delle ampiezze di $G_{\theta d}(j\omega)$.

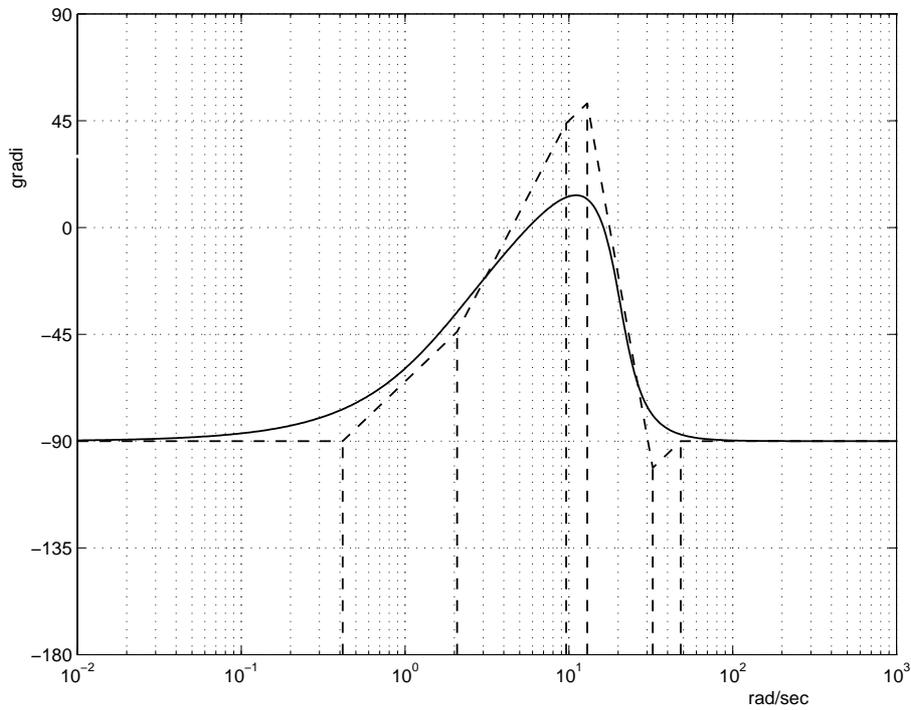


Fig. 5: Diagramma di Bode delle fasi di $G_{\theta d}(j\omega)$.

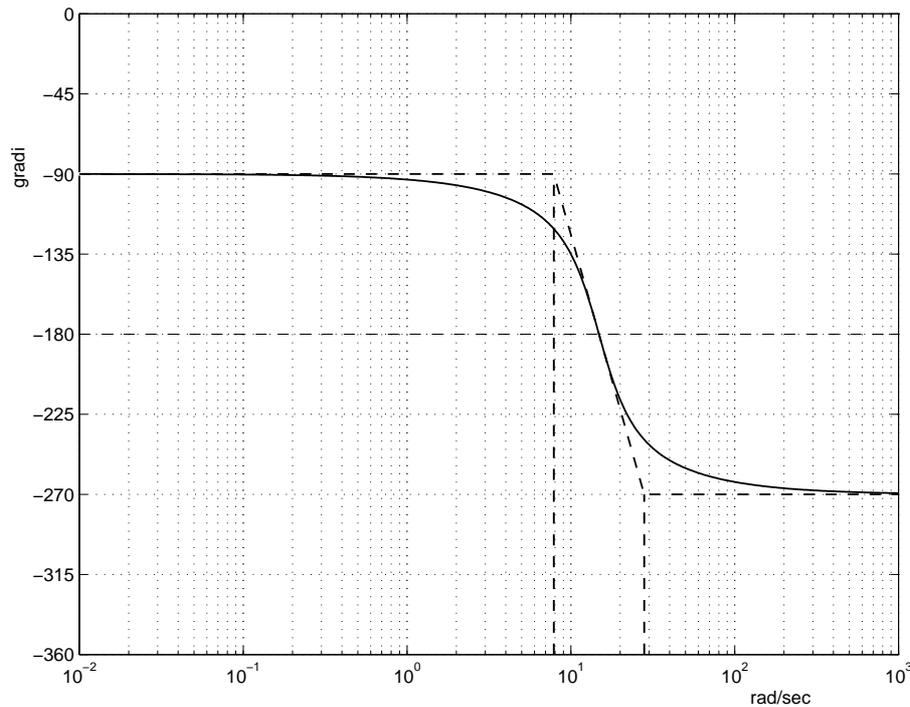


Fig. 6: Diagramma di Bode delle fasi di $G_{\theta u}(j\omega)$.

e) La funzione di trasferimento del sistema da controllare è la $G_{\theta u}(s)$ determinata al precedente punto d). Secondo quanto suggerito, si sceglie la pulsazione ω_0 di centro banda del PID coincidente con la pulsazione $\bar{\omega}$ alla quale la fase del sistema da controllare vale -120° . Anche tale pulsazione è stata determinata al punto d). Dunque si pone:

$$\omega_0 = \bar{\omega} = 7.8 \text{ rad/sec}.$$

Dalla relazione

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{T_i T_d}},$$

assumendo, secondo quanto indicato, $T_i/T_d = 10$, si ricavano i valori

$$T_i = 0.4050, \quad T_d = 0.0405.$$

La sensibilità proporzionale viene scelta uguale all'inverso di $|G_{\theta u}(7.8j)|$, cioè

$$K_p = \frac{1}{0.0139} = 71.94.$$

La funzione di trasferimento del PID risulta pertanto

$$G_c(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) = 71.94 \left(1 + \frac{1}{0.4050 s} + 0.0405 s \right).$$

f) La funzione di trasferimento del sistema da controllare è la $G_{\theta u}(s)$ determinata al punto d). Come funzione di trasferimento campione si sceglie quella di un filtro di Butterworth del minimo ordine tale da rendere soddisfatta la condizione di grado relativo. Tale funzione, definita a meno della pulsazione di rottura ω_n , è

$$G_0(s) = \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^3 + 2\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + 2\left(\frac{s}{\omega_n}\right) + 1}.$$

La funzione di trasferimento campione così definita soddisfa le specifiche sull'errore a regime nella risposta al gradino e sulla massima sovraelongazione di tale risposta. Al fine di rendere soddisfatta anche la specifica sul

tempo di ritardo, si impone

$$t_r = \frac{2.13}{\omega_n} = 1,$$

da cui si ricava

$$\omega_n = 2.13 \text{ rad/sec.}$$

Di conseguenza, la funzione di trasferimento campione è

$$G_0(s) = \frac{9.664}{s^3 + 4.26 s^2 + 9.074 s + 9.664},$$

e quindi, la funzione di trasferimento del regolatore è

$$G_c(s) = \frac{0.4832 (s^2 + 12 s + 220)}{s^2 + 4.26 s + 9.074}.$$

g) La funzione di trasferimento della parte lineare del sistema è

$$G_l(s) = G(s) H_1(s) = \frac{800}{(s+1)(s+2)(s+10)}.$$

Il diagramma polare della parte lineare del sistema, $G_l(j\omega)$, interseca il semiasse reale negativo in corrispondenza dell'ascissa

$$\sigma_0 = -\frac{1}{K^*} = -2.0202,$$

dove K^* si determina applicando il criterio di Routh come indicato di seguito. L'equazione caratteristica è

$$s^3 + 13s^2 + 32s + 20(1 + 40K) = 0.$$

La tabella di Routh è

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 32 \\ 2 & 13 & 20(1 + 40K) \\ 1 & 396 - 800K & 0 \\ 0 & 20(1 + 40K)(396 - 800K) & \end{array}$$

da cui si ricava $-0.0250 < K < K^* = 0.4950$. D'altra parte, il diagramma di $-1/F(X)$ coincide con il segmento $[-\infty -1]$ del semiasse reale negativo. Dunque esiste un'intersezione, e quindi un ciclo limite, in particolare stabile, in corrispondenza dell'ascissa $\sigma_0 = -2.0202$. La relativa pulsazione si ottiene risolvendo l'equazione ausiliaria

$$13s^2 + 416 = 0,$$

e vale $\omega = 5.6569 \text{ rad/sec}$. La relativa ampiezza si deduce dal diagramma della funzione descrittiva riportato in Fig.3. Infatti da

$$-\frac{1}{F(X)} = -2.0202,$$

si deduce

$$F(X) = 0.4950,$$

e il corrispondente valore della X sulla caratteristica della saturazione è appunto $X = 25.02$.

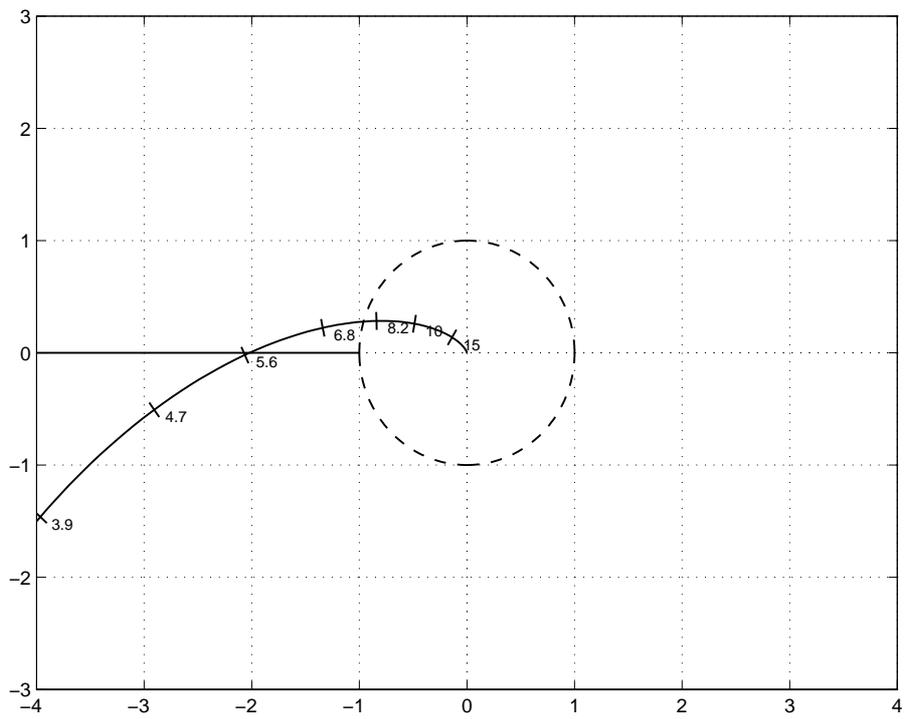
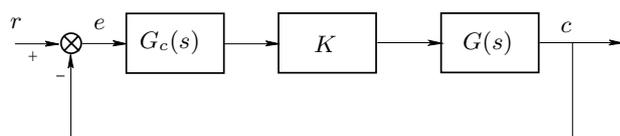


Fig. 7: Determinazione dei possibili cicli limite.

Prova scritta di Controlli Automatici # 18

Si consideri il sistema in retroazione rappresentato dal diagramma a blocchi di Fig.1.



$$G(s) = \frac{10}{s(s+2)(s+10)}.$$

Fig. 1: Sistema in retroazione

- a) Assumendo $G_c(s) = 1$, si determini l'intervallo di valori di K per i quali il sistema in retroazione è asintoticamente stabile.
- b) Assumendo $G_c(s) = 1$, si determini il valore di K per il quale l'errore a regime nella risposta alla rampa unitaria è uguale a 0.1. Si verifichi inoltre che per tale valore di K il sistema in retroazione è stabile asintoticamente.
- c) Assumendo $G_c(s) = 1$ e $K = 10$, si traccino i diagrammi asintotici di Bode (delle ampiezze e delle fasi) della funzione guadagno d'anello del sistema, $G_l(s) = KG_c(s)G(s)$. Si determini il valore della pulsazione d'incrocio verificando il risultato per via analitica.
- d) Assumendo $K = 10$, si analizzi la possibilità di assegnare al sistema margine di fase $M_f = 45^\circ$ realizzando il blocco $G_c(s)$ mediante una rete anticipatrice. A questo scopo, si suggerisce di utilizzare i diagrammi di Bode della funzione guadagno d'anello del sistema non compensato e di costruire per punti la curva corrispondente al massimo anticipo di fase ottenibile con una rete anticipatrice (si considerino ad esempio le pulsazioni $\omega = 2.8$ rad/sec, $\omega = 6$ rad/sec, $\omega = 10$ rad/sec, etc.).
- e) Utilizzando le formule di inversione¹ si progetti la rete correttiva che assegna al sistema il margine di fase $M_f = 45^\circ$ alla pulsazione $\omega = 6$ rad/sec.
- f) Assumendo $K = 10$ e $G_c(s) = \frac{5(s+2.4)}{(s+12)}$ si tracci il diagramma polare della funzione guadagno d'anello del sistema, $G_l(s) = KG_c(s)G(s)$. Si determinino in particolare l'ascissa dell'intersezione con il semiasse reale negativo e l'ascissa dell'asintoto verticale.
- g) Si consideri il sistema in retroazione rappresentato in Fig.2.

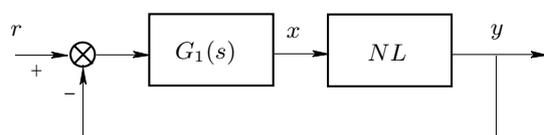
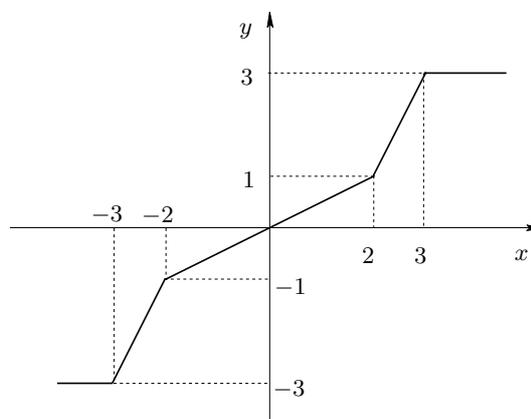


Fig. 2: Sistema non lineare in retroazione

$$G_1(s) = \frac{40}{s(s+2)(s+10)}$$



Si applichi il criterio di Popov per analizzare la stabilità asintotica globale del punto di equilibrio corrispondente al valore costante del riferimento $r = 0$. A questo scopo, si tenga conto del fatto che il diagramma di Popov della $G_1(s)$ è convesso.

¹Le formule di inversione per la rete anticipatrice sono:

$$\alpha = \frac{M \cos \varphi - 1}{M(M - \cos \varphi)}, \quad \omega \tau = \frac{M - \cos \varphi}{\sin \varphi}.$$

Soluzione

a) L'equazione caratteristica del sistema in retroazione è

$$1 + K \frac{10}{s(s+2)(s+10)} = 0$$

da cui

$$s^3 + 12s^2 + 20s + 10K = 0.$$

La tabella di Routh è

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 20 \\ 2 & 12 & 10K \\ 1 & 10(24-K) & \\ 0 & 100K(24-K) & \end{array}$$

Pertanto, il sistema in retroazione è stabile asintoticamente per $0 < K < 24$.

b) L'errore a regime nella risposta alla rampa unitaria ha l'espressione $e_r = 1/K_v$ dove

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s K G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s K \frac{10}{s(s+2)(s+10)} = \frac{K}{2}.$$

Imponendo $e_r = 2/K = 0.1$, si ricava $K = 2/0.1 = 20$. Per tale valore di K , il sistema in retroazione è stabile asintoticamente in quanto tale valore è compreso nell'intervallo di stabilità determinato al precedente punto a).

c) La funzione guadagno d'anello del sistema è

$$G_l(s) = K G_c(s) G(s) = \frac{100}{s(s+2)(s+10)} = \frac{5}{s(1+0.5s)(1+0.1s)}.$$

I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi sono riportati in Fig.3 e in Fig.4, rispettivamente. Per il posizionamento verticale del diagramma asintotico delle ampiezze si è applicata la formula

$$\left| \frac{s^h G_l(s)}{\bar{\omega}^h} \right|_{s=0} = 5 = 13.97 \text{ db},$$

dove è $h = 1$ (tipo del sistema) e dove si è scelto $\bar{\omega} = 1 \text{ rad/sec}$. Dal diagramma delle ampiezze tracciato, si legge per la pulsazione di incrocio il valore $\omega = 2.8 \text{ rad/sec}$. La verifica per via analitica fornisce:

$$\begin{aligned} G_l(j\omega)|_{\omega=2.8} &= \frac{5}{j\omega(1+0.1j\omega)(1+0.5j\omega)} \Big|_{\omega=2.8} \\ &= \frac{5}{2.8j(1+0.28j)(1+1.4j)} \\ &= \frac{5}{2.8\sqrt{1+0.28^2}\sqrt{1+1.4^2}} e^{-j(\pi/2 + \arctan 0.28 + \arctan 1.4)} \\ &= \frac{5}{2.8 \cdot 1.0385 \cdot 1.7205} e^{-j(\pi/2 + 0.2730 + 0.9505)} \\ &= 0.9994 e^{-j 2.7943}, \end{aligned}$$

cioè $|G_l(2.8j)| = 0.9994 = -0.0052 \text{ db}$ e $\angle G_l(2.8j) = -2.7943 \text{ rad} = -160.1016^\circ$. Dalla verifica analitica risulta che la pulsazione $\omega = 2.8 \text{ rad/sec}$ è maggiore della pulsazione di incrocio, ma, ai nostri scopi, si può ritenere un'approssimazione sufficientemente buona di quest'ultima.

d) Al fine di tracciare per punti la curva corrispondente al massimo margine di fase ottenibile con una rete anticipatrice, si riportano nella seguente tabella, per diversi valori della pulsazione (maggiori della pulsazione di incrocio), rispettivamente il modulo, $|G_l(j\omega)|$, e la fase, $\angle G_l(j\omega)$, della funzione guadagno d'anello, l'amplificazione $M = 1/|G_l(j\omega)|$ che la rete deve introdurre, il massimo anticipo di fase $\varphi_{\max} = \arccos(1/M)$ che la rete può introdurre e la corrispondente fase del sistema compensato $\bar{\varphi} = \angle G_l(j\omega) + \varphi_{\max}$. La curva corrispondente al massimo anticipo di fase ottenibile con una rete anticipatrice è evidenziata in Fig.5 Dalla curva tracciata, si può dedurre che è possibile assegnare al sistema compensato margine di fase $M_f = 45^\circ$ mediante una rete anticipatrice se si assume per il progetto di quest'ultima una pulsazione compresa nell'intervallo approssimativamente individuato fra 3 e 10 rad/sec.

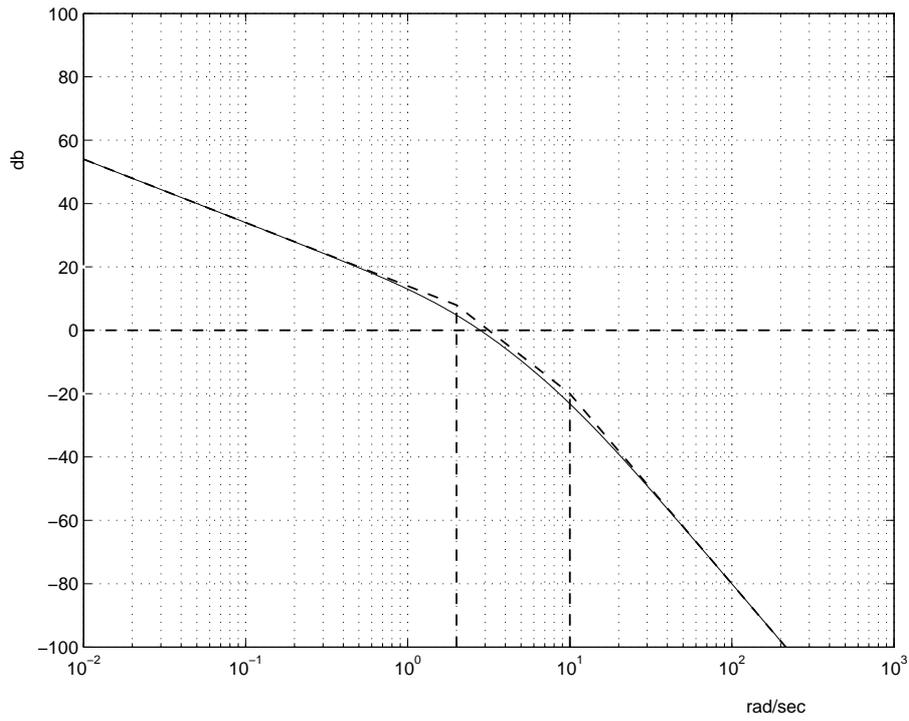


Fig. 3: Diagramma di Bode delle ampiezze di $G_1(j\omega)$.

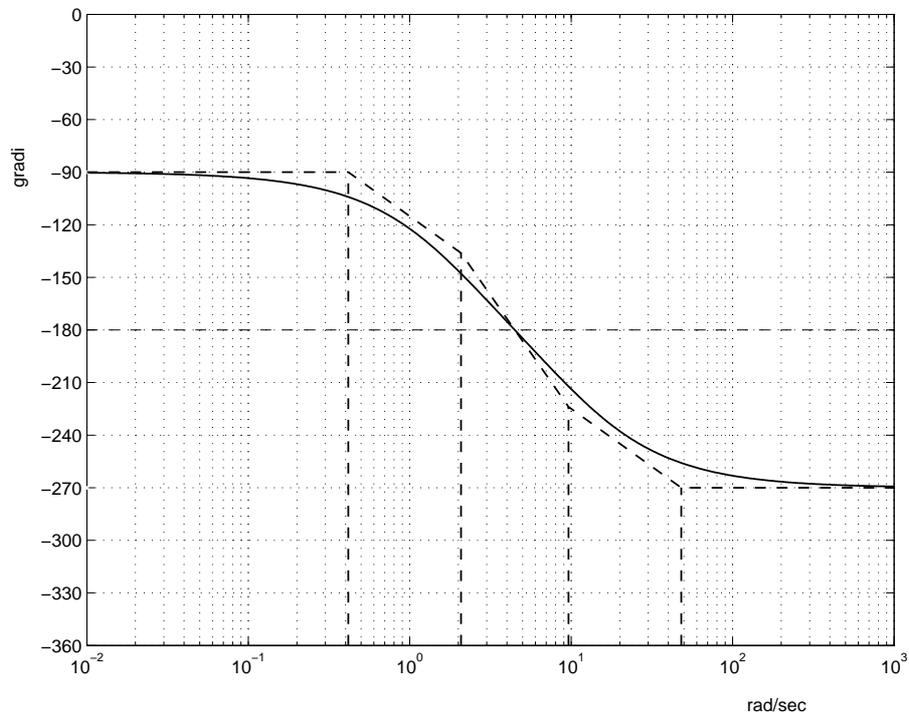


Fig. 4: Diagramma di Bode delle fasi di $G_1(j\omega)$.

ω (rad/sec)	$ G_j(j\omega) $	$ G_j(j\omega) $ (db)	$\angle G_j(j\omega)$ (rad)	$\angle G_j(j\omega)$ °	M	φ_{\max} °	$\bar{\varphi}$ °
2.8 rad/sec	0.9995	-0.0052 db	-2.7943 rad	-160.1016°	1.0005	1.8105°	-158.2911°
6 rad/sec	0.2260	-12.9190 db	-3.3603 rad	-192.5288°	4.4248	76.9368°	-115.5920°
10 rad/sec	0.0693	-23.1806 db	-3.7296 rad	-213.6901°	14.4300	86.0262°	-127.6639°

Tab. 1: Punti per il tracciamento della curva corrispondente al massimo anticipo di fase ottenibile con una rete anticipatrice.

e) Si effettua il progetto della rete anticipatrice assumendo la pulsazione $\omega = 6$ rad/sec. Dalla Tabella 1 si legge che l'amplificazione che la rete deve fornire è $M = 4.4248$. L'anticipo di fase che la rete deve fornire è $\varphi = -135^\circ + 192.5288^\circ = 57.5288^\circ = 1.0041$ rad. Con questi valori di M e φ , i parametri della rete risultano

$$\alpha = \frac{M \cos \varphi - 1}{M(M - \cos \varphi)} = 0.0800, \quad \tau = \frac{M - \cos \varphi}{\omega \sin \varphi} = 0.7681.$$

Infine, la funzione di trasferimento della rete anticipatrice è

$$G_c(s) = \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s} = \frac{1 + 0.7681 s}{1 + 0.0614 s} = 12.51 \frac{s + 1.302}{s + 16.29}.$$

f) La funzione guadagno d'anello del sistema è

$$G_l(s) = K G_c(s) G(s) = \frac{500(s + 2.4)}{s(s + 2)(s + 10)(s + 12)} = \frac{5(1 + 0.4167 s)}{s(1 + 0.0833 s)(1 + 0.1 s)(1 + 0.5 s)}.$$

L'intersezione del diagramma polare con l'asse delle ascisse si calcola come l'inverso del valore critico K^* della costante di guadagno, valore che si determina con il criterio di Routh. L'equazione caratteristica è

$$1 + K \frac{500(s + 2.4)}{s(s + 2)(s + 10)(s + 12)} = 0,$$

da cui

$$s^4 + 24 s^3 + 164 s^2 + 240 s + 500 K s + 1.200 K = 0.$$

La tabella di Routh è

4	1	164	1200 K
3	24	240 + 500 K	
2	3696 - 500 K	28800 K	
1	-250000 K ² + 1036800 K + 887040		
0	28.800 K (-250000 K ² + 1036800 K + 887040)		

Imponendo la permanenza del segno negli elementi della prima colonna della tabella, si ricavano, rispettivamente dalle righe 2), 1) e 0), le condizioni $K < 7.3920$, $-0.7278 < K < 4.8750$ e $0 < K$. Dalle tre condizioni precedenti si deduce che il sistema è stabile asintoticamente per $0 < K < 4.8750$. Dunque, il valore critico di K è $K^* = 4.8750$, da cui si deduce che l'ascissa dall'intersezione con il semiasse reale negativo è

$$\sigma_0 = -\frac{1}{K^*} = -\frac{1}{4.8750} = -0.2051.$$

L'ascissa dell'asintodo verticale è

$$\sigma_a = 5(0.4167 - 0.0833 - 0.1 - 0.5) = -1.3332.$$

Il diagramma polare della funzione guadagno d'anello del sistema è mostrato in Fig.6.

g) Il punto di lavoro del sistema in corrispondenza del valore nullo del riferimento si trova intersecando la retta $y = r = 0$ con la caratteristica dell'elemento non lineare. Il punto di lavoro coincide perciò con l'origine. Si osserva che tutta la caratteristica dell'elemento non lineare è contenuta in un settore centrato nell'origine e delimitato dalla retta con pendenza $\beta = 1$. Si osserva inoltre che $G_1(s) = 4G(s)$, per cui l'intersezione con il semiasse reale negativo avviene nel punto $4\sigma_0 = -0.8204$. Essendo il diagramma di Popov della $G_1(s)$ convesso, si può concludere che esiste una retta per il punto $-1/\beta = -1$ che non interseca il diagramma di Popov. Di conseguenza, il punto di lavoro considerato è globalmente stabile asintoticamente.

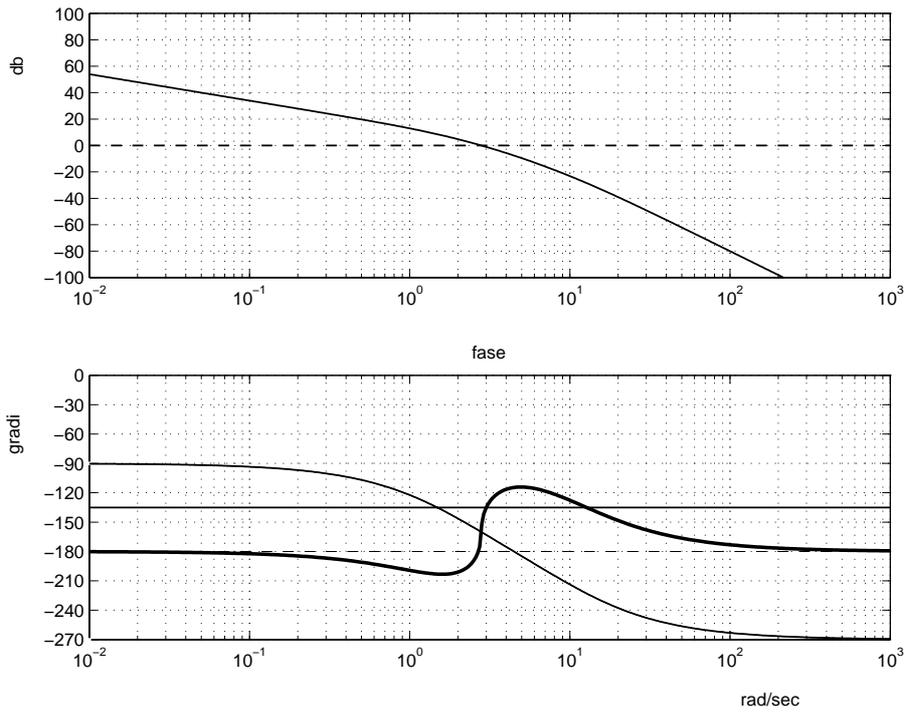


Fig. 5: Curva corrispondente al massimo anticipo di fase ottenibile con una rete anticipatrice.

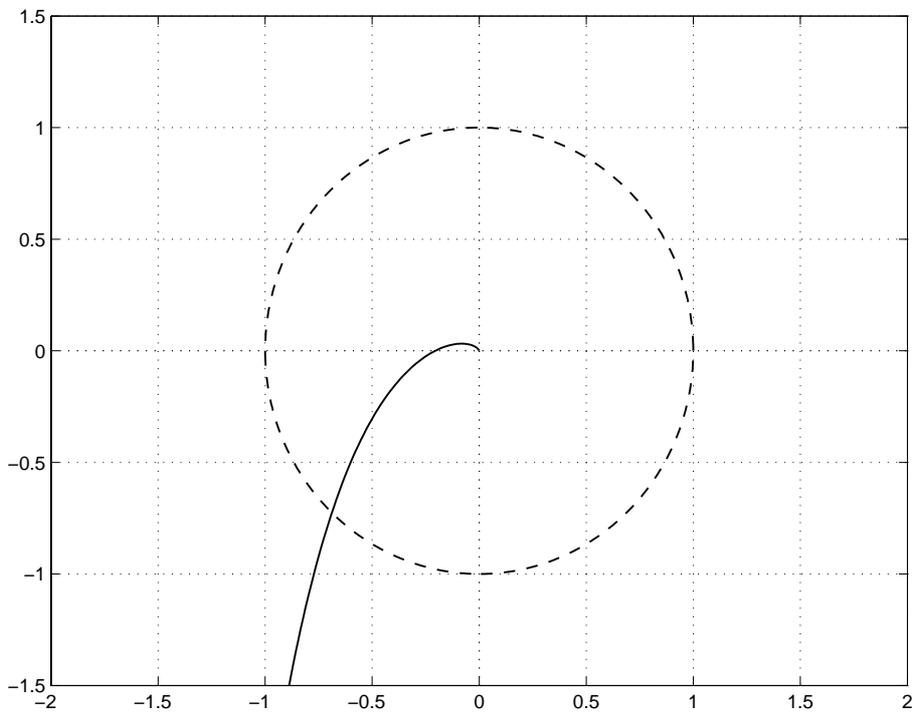
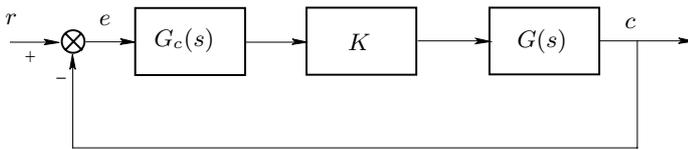


Fig. 6: Diagramma di Nyquist.

Prova scritta di Controlli Automatici # 19

Si consideri il sistema in retroazione rappresentato dal diagramma a blocchi di Fig. 1.



$$G(s) = \frac{160}{s(s+4)^2}.$$

Fig. 1: Sistema in retroazione.

- a) Assumendo $G_c(s) = 1$ e $K = 1$, si traccino i diagrammi asintotici di Bode (delle ampiezze e delle fasi) della funzione guadagno d'anello $G_a(j\omega) = KG_c(j\omega)G(j\omega)$ del sistema.
- b) Assumendo $G_c(s) = 1$ e $K = 1$, si determini la pulsazione ω_0 in corrispondenza della quale la funzione guadagno d'anello $G_a(j\omega) = KG_c(j\omega)G(j\omega)$ del sistema presenta fase uguale a -120° . A questo scopo si suggerisce di dedurre possibili valori utilizzando diagrammi di Bode e di verificarne la correttezza per via analitica.
- c) Assumendo $K = 1$, si progetti il regolatore $G_c(s)$ in modo tale il sistema compensato presenti errore a regime nullo nella risposta al gradino e margine di fase $M_\varphi = 60^\circ$. A questo scopo si suggerisce di impiegare una rete a ritardo e anticipo¹ progettata assumendo come pulsazione di centro banda ω_0 la pulsazione alla quale la funzione guadagno d'anello del sistema non compensato presenta fase uguale a -120° e come rapporto fra le costanti di tempo il valore $\rho = \tau_2/\tau_1 = 9$. Si suggerisce infine di approssimare l'attenuazione introdotta dalla rete alla pulsazione ω_0 con il corrispondente valore sul diagramma asintotico.
- d) Si assuma $K = 1$ e sia ω_0 la pulsazione alla quale la funzione guadagno d'anello del sistema non compensato presenta fase uguale a -120° . Si analizzi la possibilità di realizzare il regolatore $G_c(s)$ che assegni al sistema compensato margine di fase $M_\varphi = 45^\circ$ alla pulsazione ω_0 utilizzando una sola rete ritardatrice (o una sola rete anticipatrice). Si determinino i parametri α e τ di tale rete e la sua funzione di trasferimento. A questo scopo, si suggerisce di utilizzare le formule di inversione².
- e) Si assuma che il regolatore $G_c(s)$ sia costituito da una rete ritardatrice avente funzione di trasferimento

$$G_c(s) = \frac{0.1(s+0.2)}{s+0.02}.$$

Si tracci l'andamento qualitativo del luogo delle radici del sistema ad anello chiuso per valori di $K > 0$. Si calcolino, in particolare, il centro della stella di asintoti e gli angoli formati dagli asintoti con l'asse reale.

f) Si assuma che il regolatore $G_c(s)$ sia definito come al precedente punto e). Si calcoli il valore da assegnare al guadagno K in modo che l'errore a regime nella risposta alla rampa unitaria del sistema ad anello chiuso sia $e_r = 0.02$. Si verifichi che per tale valore di K il sistema risulti stabile.

¹Si ricorda che la funzione di trasferimento della rete a ritardo e anticipo ha l'espressione

$$G_c(s) = \frac{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)}{(1 + \alpha \tau_1 s) \left(1 + \frac{\tau_2}{\alpha} s\right)}.$$

Si ricorda inoltre che la pulsazione di centro banda ω_0 è legata alle costanti di tempo τ_1 e τ_2 dalla relazione $\omega_0 = 1/\sqrt{\tau_1 \tau_2}$ e che α è il valore dell'approssimazione asintotica del diagramma di Bode delle ampiezze della rete in corrispondenza di ω_0 .

²Si ricorda che le formule di inversione per la rete anticipatrice sono:

$$\alpha = \frac{M \cos \varphi - 1}{M(M - \cos \varphi)}, \quad \omega \tau = \frac{M - \cos \varphi}{\sin \varphi}.$$

Soluzione

a) La funzione di risposta armonica d'anello del sistema è

$$G_a(j\omega) = KG_c(j\omega)G(j\omega) = \frac{160}{j\omega(j\omega + 4)^2} = \frac{10}{j\omega(1 + 0.25j\omega)^2}.$$

I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi sono riportati in Fig.2 e in Fig.3, rispettivamente. Per il posizionamento verticale del diagramma asintotico delle ampiezze si è applicata la formula

$$\left| \frac{s^h G_a(s)}{\bar{\omega}^h} \right|_{s=0} = 10 = 20 \text{ db},$$

dove è $h = 1$ (tipo del sistema) e dove si è scelto $\bar{\omega} = 1 \text{ rad/sec}$.

b) Dal diagramma di Bode delle fasi tracciato si deduce $\omega = 1 \text{ rad/sec}$ come valore di primo tentativo per la pulsazione. La verifica per via analitica fornisce

$$G_a(j) = \frac{10}{j(1 + 0.25j)^2} = \frac{10}{(\sqrt{1 + 0.25^2})^2} e^{-j(\pi/2 + 2 \arctan 0.25)} = 9.4118 e^{-j2.0608},$$

da cui

$$|G_a(j)| = 9.4118 = 19.4735 \text{ db}, \quad \angle G_a(j) = -2.0608 = 118.0751^\circ.$$

Dunque, $\omega = 1 \text{ rad/sec}$ costituisce un'approssimazione accettabile della pulsazione alla quale la fase della funzione di risposta armonica d'anello è uguale a -120° .

c) Si ha

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{\tau_1 \tau_2}} \implies 1 = \frac{1}{\sqrt{9 \tau_1^2}} \implies \tau_1 = \frac{1}{3}, \quad \tau_2 = 3.$$

Il modulo della funzione di risposta armonica del sistema $G(j\omega)$ alla pulsazione $\omega_0 = 1$ coincide con quello della funzione di risposta armonica d'anello determinato al punto b), cioè $|G(j)| = |G_a(j)| = 9.4118$. Quindi, si assume

$$\alpha = \frac{1}{|G(j)|} = \frac{1}{9.4118} = 0.1062.$$

Dunque, la funzione di trasferimento della rete a ritardo e anticipo risulta

$$G_c(s) = \frac{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)}{(1 + \alpha \tau_1 s)(1 + \frac{\tau_2}{\alpha} s)} = \frac{(1 + 0.3333 s)(1 + 3 s)}{(1 + 0.0354 s)(1 + 28.2486 s)}.$$

d) Come pulsazione ω_0 si può assumere quella determinata al punto b), cioè $\omega_0 = 1 \text{ rad/sec}$. Il modulo e la fase della funzione di risposta armonica del sistema a tale pulsazione coincidono, rispettivamente, con quelli della funzione di risposta armonica d'anello determinati al punto b), cioè $|G(j)| = |G_a(j)| = 9.4118$ e $\angle G(j) = \angle G_a(j) \approx 120^\circ$. Il massimo ritardo di fase ottenibile alla pulsazione ω_0 è

$$\varphi_{\max} = \arccos \frac{1}{M} = \arccos \frac{1}{|G(j)|} = \arccos \frac{1}{9.4118} = 1.4644 \text{ rad} = 83.9039^\circ.$$

Dunque, lo sfasamento $\varphi_{\max} = 83.9039^\circ$ è maggiore dello sfasamento $\varphi = 15^\circ$ che si deve imporre per garantire $M_\varphi = 45^\circ$ per $\omega_0 = 1 \text{ rad/sec}$. Il problema si risolve perciò utilizzando una rete ritardatrice che attenui di $1/M = 1/9.4118 = 0.1062$ e che ritardi di $\varphi = 15^\circ = 0.2618 \text{ rad}$ alla pulsazione $\omega_0 = 1 \text{ rad/sec}$. Di conseguenza, i parametri α e τ della rete sono

$$\alpha = \frac{M \cos \varphi - 1}{M(M - \cos \varphi)} = 0.1018, \quad \tau = \frac{M - \cos \varphi}{\omega \sin \varphi} = 32.6331.$$

La funzione di trasferimento della rete è

$$G_c(s) = \frac{1 + \alpha \tau s}{1 + \tau s} = \frac{1 + 3.3215 s}{1 + 32.6331 s} = \frac{0.1018(s + 0.3011)}{s + 0.0306}.$$

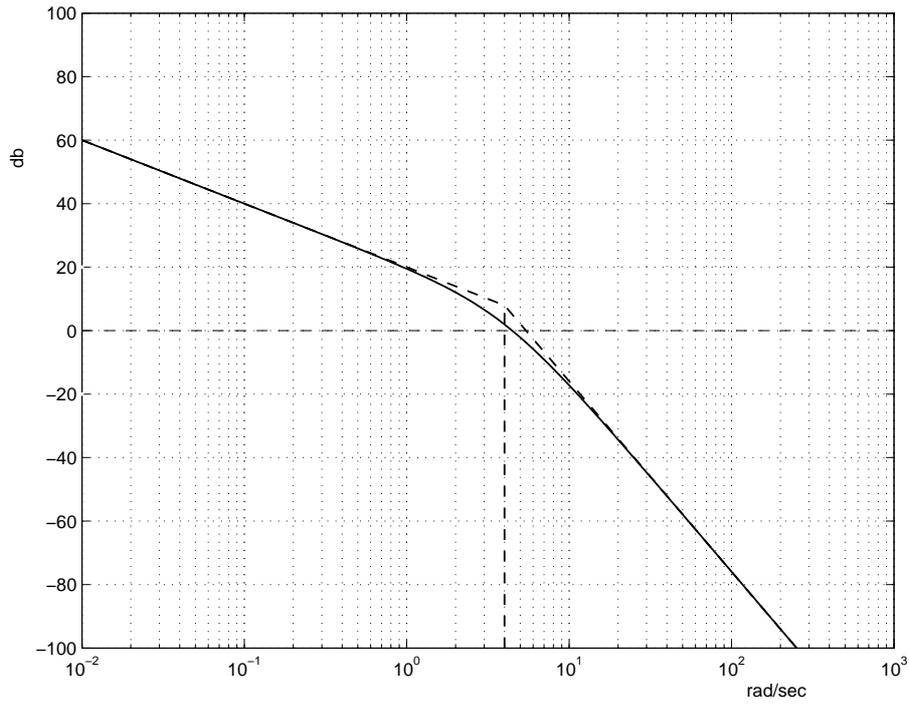


Fig. 2: Diagramma di Bode delle ampiezze di $G_a(j\omega)$.

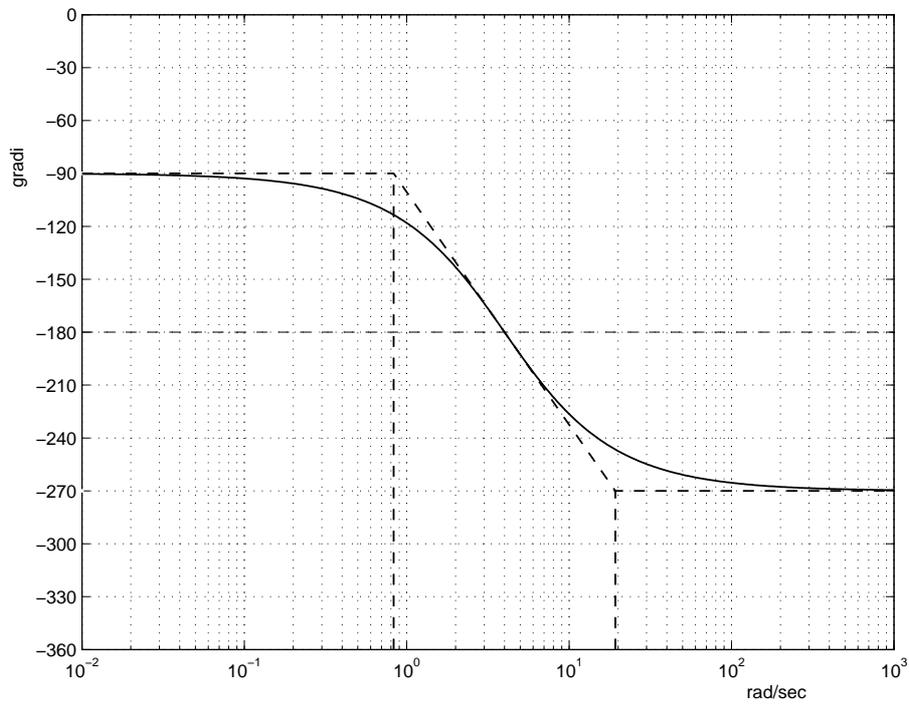


Fig. 3: Diagramma di Bode delle fasi di $G_a(j\omega)$.

e) Si ha

$$G_l(s) = G_c(s)G(s) = \frac{16(s+0.2)}{s(s+0.02)(s+4)^2}.$$

I punti dell'asse reale che appartengono al luogo sono quelli dei segmenti $(-\infty -0.2] \cup [-0.02 0]$. Il luogo delle radici presenta $n - m = 4 - 1 = 3$ asintoti. L'ascissa del centro stella degli asintoti è

$$\sigma_a = \frac{1}{3}(-0.02 - 4 - 4 + 0.2) = -2.6067.$$

Gli angoli formati dagli asintoti con l'asse reale sono $\vartheta_{a,0} = \pi/3$, $\vartheta_{a,1} = \pi$, $\vartheta_{a,2} = 5\pi/3$. I punti di diramazione si ottengono si risolvendo il seguente sistema di equazioni

$$\begin{cases} 1 + K \frac{16(s+0.2)}{s(s+0.02)(s+4)^2} = 0, \\ s(s+0.02)(s+4)^2 - (s+0.2)[(s+0.02)(s+4)^2 + s(s+4)^2 + 2s(s+0.02)(s+4)] = 0. \end{cases}$$

La seconda equazione presenta una radice in $s = -4$ (punto corrispondente al polo doppio e quindi esterno al luogo tracciato per valori positivi di K). Mettendo in evidenza il fattore $s+4$ si riduce l'equazione del quarto grado all'equazione del terzo grado

$$s^3 + 1.6133s^2 + 0.5373s + 0.0053 = 0$$

che ammette le soluzioni (ottenibili con l'ausilio di un calcolatore) $s_1 = -1.1502$, $s_2 = -0.4530$, $s_3 = -0.0102$, tutte appartenenti al luogo tracciato per valori positivi di K . In particolare, i corrispondenti valori della costante di guadagno sono $K = 0.6944$, $K = 0.6096$, $K = 0.000524$, rispettivamente. Il luogo delle radici è mostrato in Fig.4, con un ingrandimento in Fig.5 per visualizzare l'andamento vicino all'origine degli assi.

f) L'errore a regime nella risposta alla rampa unitaria ha l'espressione $e_r = 1/K_v$ dove

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s K G_l(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s K \frac{16(s+0.2)}{s(s+0.02)(s+4)^2} = 10K.$$

Imponendo $e_r = 1/K_v = 1/(10K) = 0.02$ si ricava $K = 5$. Per tale valore di K il sistema è stabile asintoticamente, in quanto nella prima colonna della tabella di Routh costruita considerando appunto $K = 5$ non ci sono variazioni di segno. Infatti, l'equazione caratteristica è

$$s^4 + 8.02s^3 + 16.16s^2 + 80.32s + 16 = 0.$$

La tabella di Routh è

4	1	16.16	16
3	8.02	80.32	
2	49.2832	128.32	
1	2929.3		
0	$3.7589 \cdot 10^5$.		

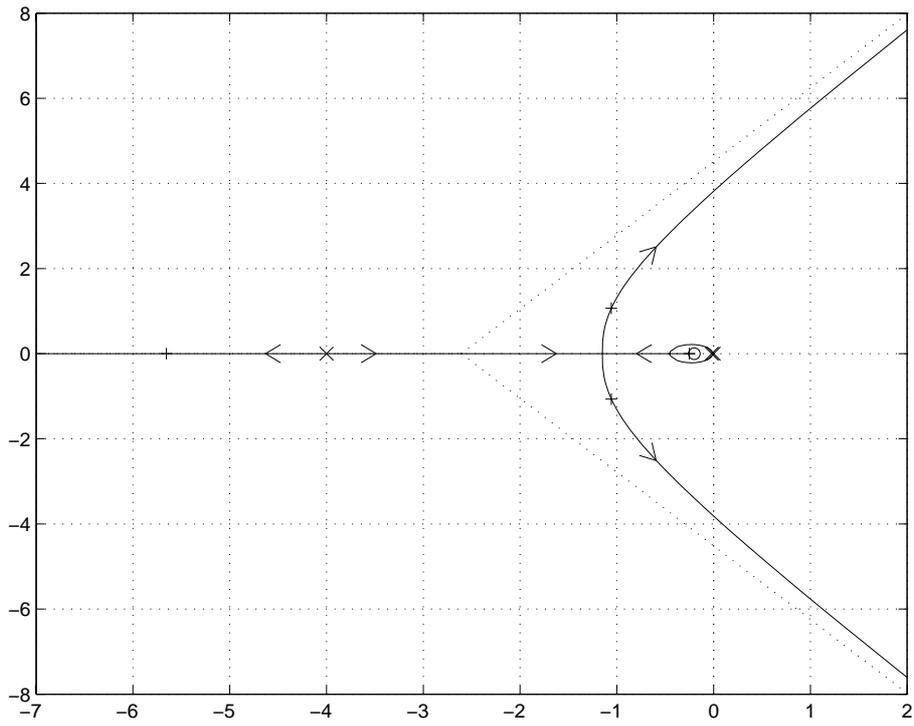


Fig. 4: Luogo delle radici.

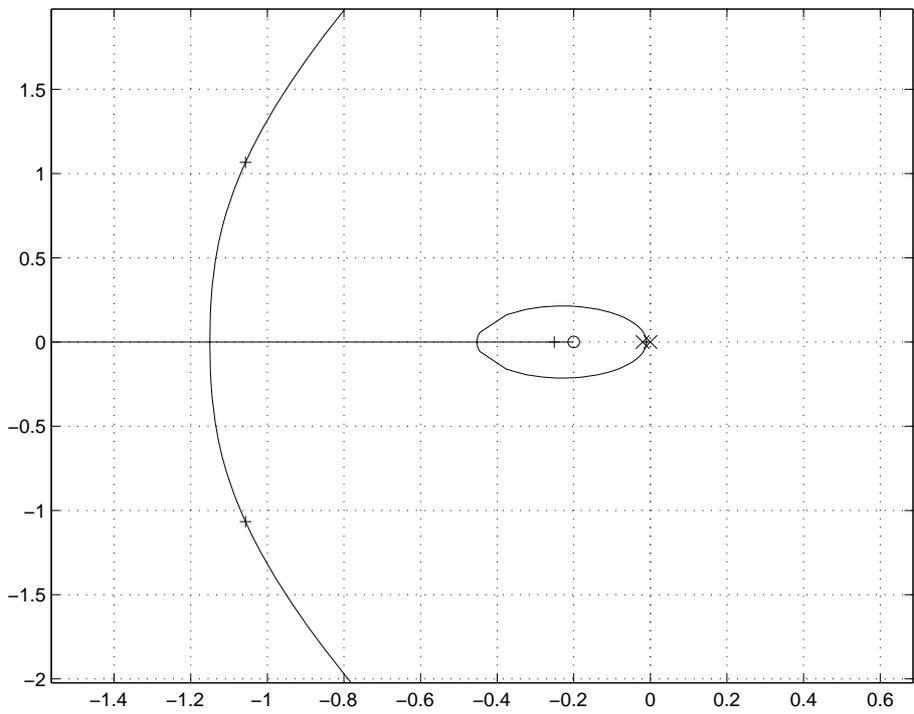
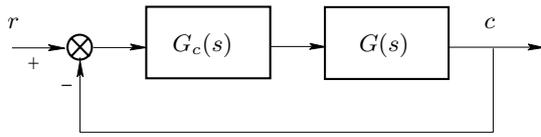


Fig. 5: Luogo delle radici (ingrandimento vicino all'origine degli assi).

Prova scritta di Controlli Automatici # 20

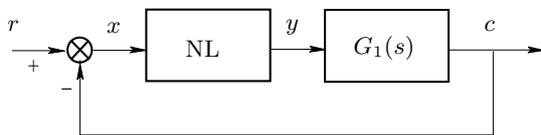
Si consideri il sistema in retroazione rappresentato dal diagramma a blocchi di Fig.1.



$$G(s) = \frac{K}{(s+1)(s+10)(s+\alpha)}$$

Fig. 1: Sistema in retroazione

- a) Assumendo $G_c(s) = 1$, si determinino i valori di $K > 0$, funzione del parametro $\alpha > 0$, per i quali il sistema ad anello chiuso è stabile.
- b) Assumendo $G_c(s) = 1$, $K = 1000$ e $\alpha = 20$, si traccino i diagrammi asintotici di Bode (delle ampiezze e delle fasi) della funzione guadagno d'anello del sistema.
- c) Assumendo $G_c(s) = 1$, $K = 1000$ e $\alpha = 20$, si tracci per punti il diagramma di Nichols della funzione guadagno d'anello del sistema.
- d) Assumendo $G_c(s) = 1$ e $\alpha = 20$, si tracci il luogo delle radici al variare del parametro $K > 0$. Si calcolino, in particolare, le intersezioni con l'asse immaginario e i punti di emergenza. Si calcolino inoltre i valori di K corrispondenti.
- e) Assumendo $\alpha = 40$ e $K = 1000$, si progetti il regolatore $G_c(s)$ in modo che siano soddisfatte le seguenti specifiche: i) errore a regime nella risposta al gradino uguale a zero; ii) margine di fase uguale a 60° . Si suggerisce di impiegare un regolatore di tipo PI e di effettuare il progetto utilizzando i diagrammi di Bode.
- f) Assumendo $\alpha = 40$ e $K = 1000$, si progetti il regolatore $G_c(s)$ in modo che siano soddisfatte le seguenti specifiche: i) errore a regime nella risposta alla rampa unitaria non superiore a 0.1; ii) tempo di assestamento nella risposta al gradino non superiore a 1 sec. A questo scopo si suggerisce di impiegare un regolatore di tipo PI e di progettare per cancellazione polo-zero. Nel calcolo del tempo di assestamento, si suggerisce, per semplicità, di trascurare l'effetto della dinamica più veloce del sistema.
- g) Si consideri il sistema in retroazione rappresentato in Fig.2.



$$G_1(s) = \frac{1}{(s+0.4)^2(s+1)}$$

Fig. 2: Sistema non lineare in retroazione

Assumendo che il blocco NL sia un blocco non lineare di tipo algebrico definito dalla caratteristica ingresso-uscita rappresentata in Fig.3, si individui il punto di lavoro (x_0, y_0) corrispondente al riferimento costante $r = 0$ e si tracci l'andamento della funzione descrittiva dell'elemento non lineare nell'intorno del punto di lavoro. Si determini infine la pulsazione di eventuali oscillazioni autosostenute presenti nel sistema.

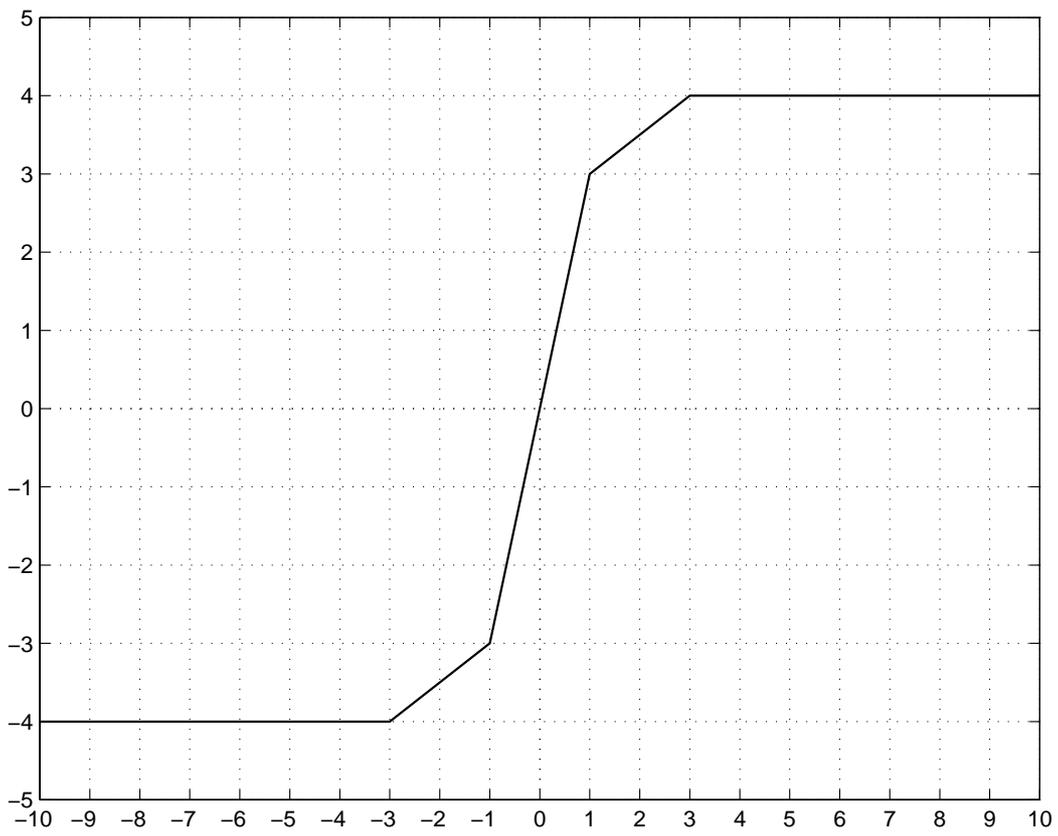


Fig. 3: Caratteristica ingresso-uscita dell'elemento non lineare di tipo algebrico

Soluzione

a) L'equazione caratteristica è

$$1 + \frac{K}{(s+1)(s+10)(s+\alpha)} = 0,$$

da cui

$$s^3 + (11 + \alpha)s^2 + (10 + 11\alpha)s + 10\alpha + K = 0.$$

La tabella di Routh è

$$\begin{array}{c|ccc} 3 & & 1 & 10 + 11\alpha \\ 2 & & 11 + \alpha & 10\alpha + K \\ 1 & & 11\alpha^2 + 121\alpha + 110 - K & \\ 0 & (10\alpha + K) & (11\alpha^2 + 121\alpha + 110 - K) & \end{array}$$

Si impone che nella prima colonna della tabella di Routh non ci siano variazioni di segno. Dalla riga 2 si ricava la condizione $\alpha > -11$, che è sempre soddisfatta in quanto è $\alpha > 0$. Dalla riga 3 si ricava la condizione

$$K < 11\alpha^2 + 121\alpha + 110. \quad (1)$$

Gli zeri del polinomio in α sono rispettivamente $\alpha = -10$ e $\alpha = -1$. Per valori esterni all'intervallo delle radici, il secondo membro della (1) assume valori positivi. D'altra parte è $\alpha > 0$, per cui il secondo membro della (1) è sempre positivo. Ne consegue che per tutti i valori di $\alpha > 0$, K deve soddisfare la (1). Infine, dalla riga 4 si ricava la condizione $K > -10\alpha$, che è sempre soddisfatta essendo $\alpha > 0$ e $K > 0$. In conclusione, K deve soddisfare la sola (1) per tutti gli $\alpha > 0$.

b) La funzione guadagno d'anello del sistema ha l'espressione

$$G_l(s) = \frac{1000}{(s+1)(s+10)(s+20)} = \frac{5}{(1+s)(1+0.1s)(1+0.05s)}.$$

I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi sono riportati in Fig.4 e in Fig.5, rispettivamente. Per il posizionamento verticale del diagramma asintotico delle ampiezze si è osservato che $|G_l(0)| = 5 = 13.98$ db.

c) Il diagramma di Nichols di $G_l(j\omega)$ si può tracciare per punti a partire dai diagrammi di Bode disegnati al punto b). Nella Tabella 1 sono riportati valori approssimati del modulo e dell'argomento di $G_l(j\omega)$ corrispondenti a diversi valori della pulsazione. Il diagramma di Nichols di $G_l(j\omega)$ è mostrato in Fig.6.

d) La funzione guadagno d'anello è

$$G_a(s) = \frac{1}{(s+1)(s+10)(s+20)}.$$

I punti dell'asse reale che appartengono al luogo sono quelli degli intervalli $(-\infty -20] \cup [-10 -1]$. Il luogo presenta $n - m = 3$ asintoti. L'ascissa del centro stella degli asintoti è $\sigma_a = (-1 -10 -20)/3 = -10.33$. Gli angoli formati dagli asintoti con l'asse reale sono $\vartheta_{a,0} = \pi/3$, $\vartheta_{a,1} = \pi$, $\vartheta_{a,2} = 5\pi/3$. L'ascissa del punto di emergenza e il corrispondente valore di K si ottengono risolvendo il sistema di equazioni

$$\begin{cases} 1 + K \frac{1}{(s+1)(s+10)(s+20)} = 0, \\ (s+10)(s+20) + (s+1)(s+20) + (s+1)(s+10) = 0. \end{cases}$$

ω	0.5 rad/sec	1.2 rad/sec	2.5 rad/sec	5.1 rad/sec	9.0 rad/sec	15.3 rad/sec	26.6 rad/sec
$\angle G_j(j\omega)$	-30°	-60°	-90°	-120°	-150°	-180°	-210°
$ G_j(j\omega) $	13 db	10 db	5 db	-1.5 db	-8.6 db	-17 db	-28 db

Tab. 1: Punti per il tracciamento del diagramma di Nichols di $G_l(j\omega)$.

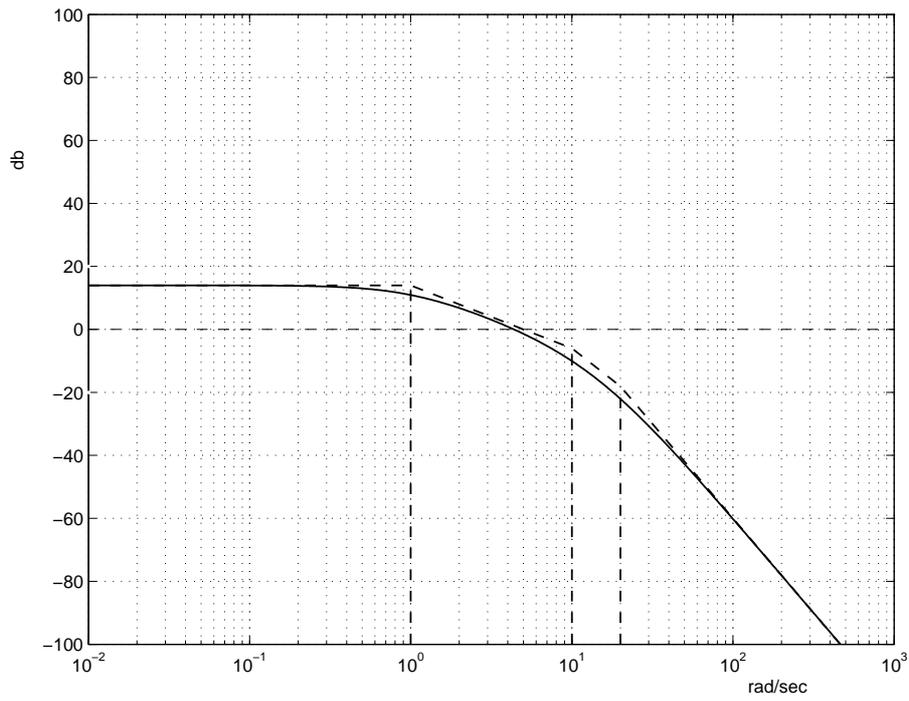


Fig. 4: Diagramma di Bode delle ampiezze di $G_l(j\omega)$.

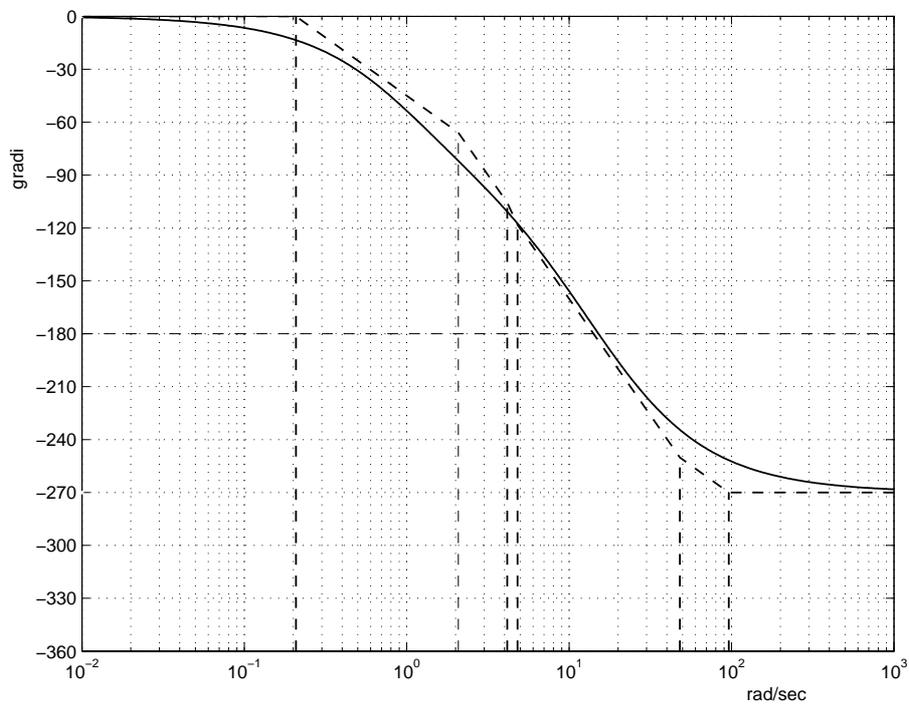


Fig. 5: Diagramma di Bode delle fasi di $G_l(j\omega)$.

La seconda equazione ammette le soluzioni $s_1 = -4.8460$ ed $s_2 = -15.8207$. La seconda soluzione corrisponde ad un punto non appartenente al luogo. La prima è invece l'ascissa del punto di emergenza cercato. Dunque, $\sigma_0 = -4.8460$. Il valore di K corrispondente è dato da

$$K = -(s+1)(s+10)(s+20)|_{s=-4.8460} = 300.4.$$

Le intersezioni del luogo con l'asse immaginario e il corrispondente valore di K si ottengono mediante l'applicazione del criterio di Routh. L'equazione caratteristica è

$$s^3 + 31s^2 + 230s + 200 + K = 0.$$

La tabella di Routh è

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 230 \\ 2 & 31 & 200 + K \\ 1 & 6930 - K & \\ 0 & (6930 - K)(200 + K) & \end{array}$$

Imponendo che non ci siano variazioni di segno nella prima colonna della tabella, si ottiene la condizione $-200 < K < 6930$, da cui, tenendo conto della condizione $K > 0$, si ricava $K < 6930$. Dunque, il valore critico di K è $K^* = 6930$. Per tale valore si annulla la riga 1 della tabella. Corrispondentemente, gli elementi della riga 2 danno i coefficienti dell'equazione ausiliaria,

$$31s^2 + 7130 = 0,$$

le cui soluzioni, $s_{1,2} = \pm 15.1658j$, individuano le intersezioni del luogo con l'asse immaginario. Il luogo delle radici è mostrato in Fig.7

e) La funzione di trasferimento del sistema non compensato è

$$G(s) = \frac{1000}{(s+1)(s+10)(s+40)}$$

Impiegando, come suggerito, un regolatore di tipo PI si introduce nell'anello un polo nell'origine e quindi si rende soddisfatta la specifica sull'errore a regime nella risposta al gradino. Al fine di rendere soddisfatta anche la specifica sul margine di fase, si opera sui diagrammi di Bode del sistema non compensato, riportati in Fig.8. Sui diagrammi di Bode della $G(s)$ si individua la pulsazione alla quale la fase del sistema non compensato è uguale a -120° . Tale pulsazione è $\bar{\omega} \approx 6$ rad/sec. Corrispondentemente, $|G(j\bar{\omega})| = -9.06$ db = 0.3524. Si alloca lo zero del PI a sinistra della pulsazione $\bar{\omega}$, sufficientemente lontano, in modo che alla pulsazione $\bar{\omega}$ lo sfasamento introdotto dal PI sia trascurabile. Ad esempio si può scegliere $-1/T_i = -0.1$, da cui $T_i = 10$. La sensibilità proporzionale si sceglie in modo da portare il diagramma delle ampiezze del sistema compensato ad incrociare l'asse delle ascisse proprio in corrispondenza di $\bar{\omega}$, cioè si impone

$$K_c = \frac{1}{|G(j\bar{\omega})|} = \frac{1}{0.3524} = 2.8379.$$

Dunque, la funzione di trasferimento del regolatore PI risulta

$$G_c(s) = 2.8379 \frac{s+0.1}{s}$$

f) La funzione di trasferimento del sistema da controllare è la stessa determinata al punto e), cioè

$$G(s) = \frac{1000}{(s+1)(s+10)(s+40)}$$

Si sceglie lo zero del regolatore PI in modo da cancellare il polo del sistema in $s = -1$, cioè si sceglie $T_i = 1$. La sensibilità proporzionale K_c si sceglie in modo da rendere soddisfatta la specifica sull'errore a regime nella risposta alla rampa unitaria. Si ha $e_r = 1/K_v$ con

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G_c(s) G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1000 K_c}{s(s+10)(s+40)} = 2.5 K_c.$$

Quindi, imponendo $1/(2.5 K_c) = 0.1$ si ricava $K_c = 4$. Dunque, la funzione di trasferimento del regolatore risulta

$$G_c(s) = \frac{4(1+s)}{s}.$$

Si verifica infine che tale funzione di trasferimento consente di rendere soddisfatta la specifica sul tempo di assestamento. La funzione guadagno d'anello del sistema compensato è

$$G_l(s) = \frac{4000}{s(s+10)(s+40)} = \frac{10}{s(1+0.1s)(1+0.025s)}.$$

Trascurando la dinamica associata al polo in $s = -40$, si ottiene la funzione

$$\tilde{G}_l(s) = \frac{10}{s(1+0.1s)}.$$

La corrispondente funzione di trasferimento ad anello chiuso è

$$G_0(s) = \frac{100}{s^2 + 10s + 100}.$$

Si tratta di una funzione di trasferimento del secondo ordine, caratterizzata da una coppia di poli complessi coniugati, $s_{1,2} = -5 \pm 8.6603j$. Il tempo di assestamento nella risposta al gradino è legato alla parte reale σ dei poli dalla relazione $T_a = -3/\sigma$. Ne consegue, $T_a = 3/5 = 0.6$ sec. Dunque, il regolatore progettato consente di soddisfare anche la specifica sul tempo di assestamento. La risposta al gradino del sistema ad anello chiuso è rappresentata in Fig.9.

g) Il punto di lavoro del sistema si trova intersecando la caratteristica dell'elemento non lineare con la retta

$$y = -\frac{1}{G_1(0)}x \implies y = -6.25x.$$

Dunque, il punto di lavoro del sistema coincide con l'origine degli assi. L'andamento della funzione descrittiva $F(X)$ è riportato in Fig.10 I possibili cicli limite corrispondono ad eventuali intersezioni fra il diagramma di $-1/F(X)$ e il diagramma polare di $G_1(j\omega)$. Il diagramma di $-1/F(X)$ coincide con la semiretta $(-\infty -1/3]$. L'intersezione del diagramma polare di $G_1(j\omega)$ con il semiasse reale negativo si determina applicando il criterio di Routh. L'equazione caratteristica è

$$s^3 + 1.8s^2 + 0.96s + 0.16 + K = 0.$$

La tabella di Routh è

3	1	0.96
2	1.8	$0.16 + K$
1	$1.568 - K$	
0	$(0.16 + K)(1.568 - K)$	

Dalla tabella di Routh si ricavano le condizioni $-0.16 < K < 1.568$, da cui, essendo $K > 0$, si deduce la condizione $0 < K < 1.568$. Dunque, il valore critico di K è $K^* = 1.568$. Di conseguenza, l'intersezione del diagramma polare di $G_1(j\omega)$ con il semiasse reale negativo avviene in corrispondenza dell'ascissa $\sigma_0 = -1/K^* = -0.6378$. Poiché il punto individuato da σ_0 appartiene al grafico di $-1/F(X)$, tale punto corrisponde a un ciclo limite (stabile in quanto al crescere di X il generico punto sul diagramma di $-1/F(X)$ tende a uscire dal dominio individuato dal diagramma polare di $G_1(j\omega)$). La pulsazione delle oscillazioni autosostenute si ottiene risolvendo l'equazione ausiliaria

$$1.8s^2 + 1.728 = 0.$$

Le soluzioni sono $s_{1,2} = \pm 0.9798j$. Dunque, la pulsazione cercata è $\omega = 0.9798$ rad/sec.

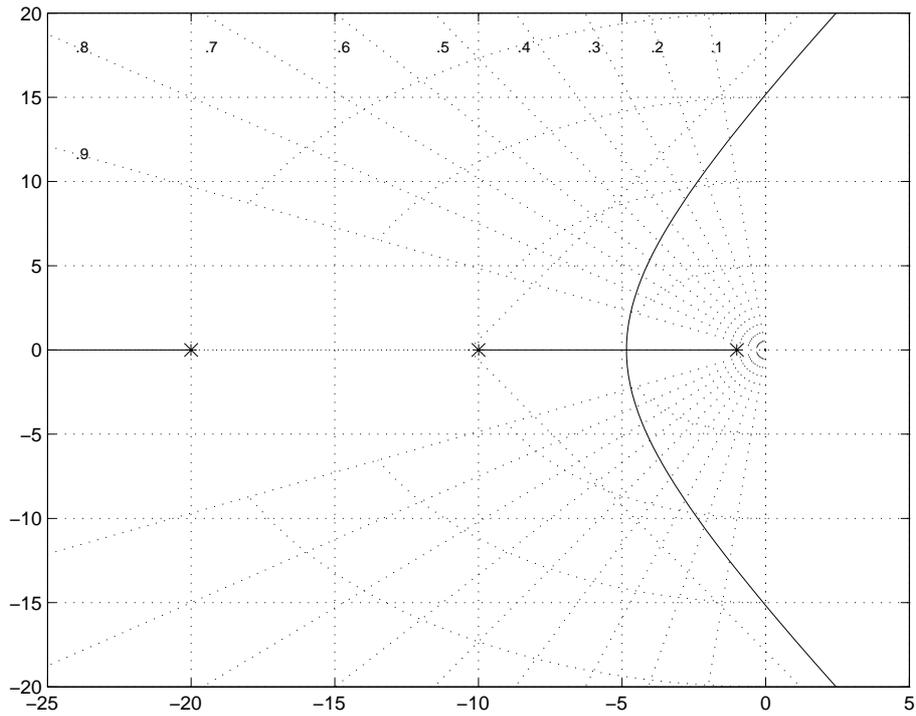


Fig. 7: Luogo delle radici di $G_a(s)$.

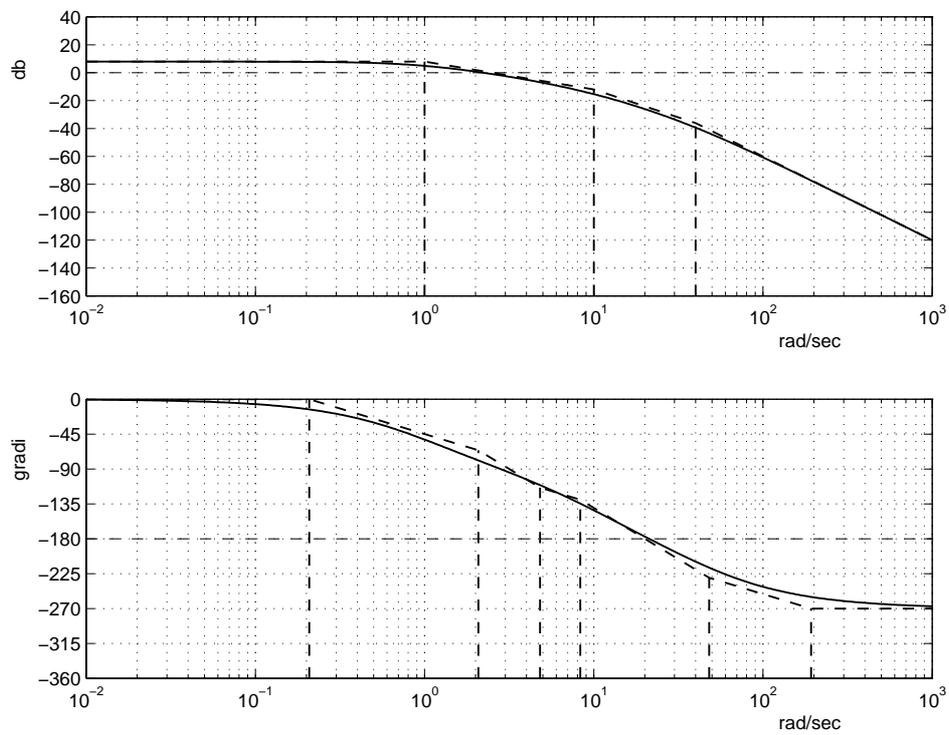


Fig. 8: Diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi di $G(s)$.

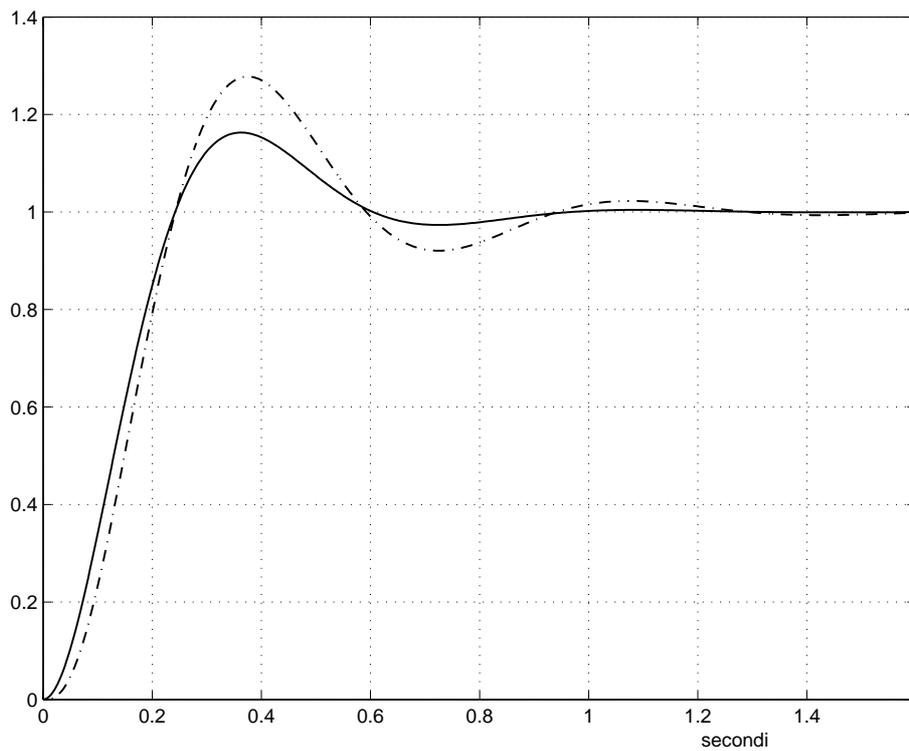


Fig. 9: Risposta al gradino del sistema compensato ottenuta rispettivamente trascurando la dinamica più veloce (tratto continuo) e tenendo conto della la dinamica più veloce (tratto-punto)

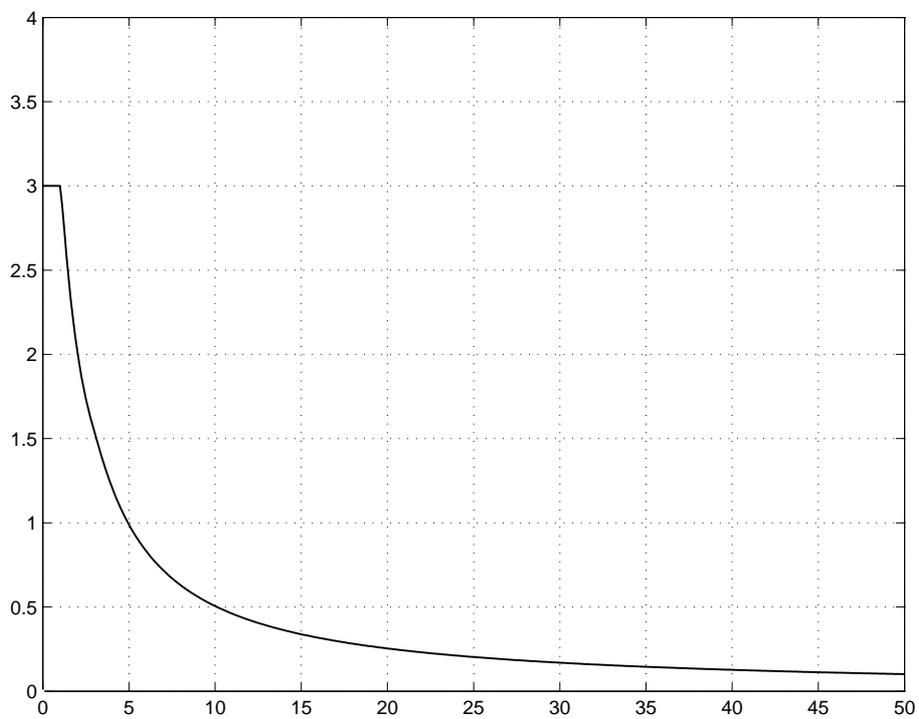


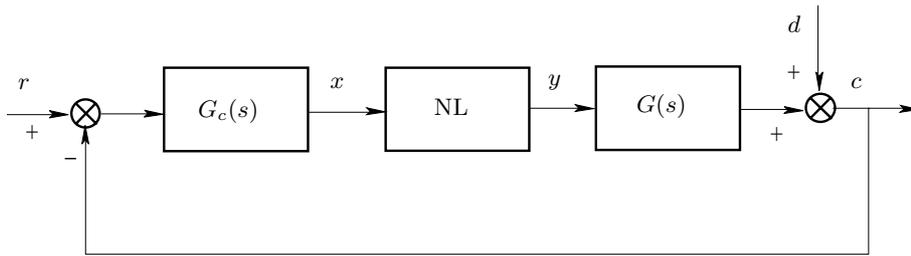
Fig. 10: Funzione descrittiva dell'elemento non lineare.

Appendice A

Prove scritte con soluzione lasciata al lettore

Prova scritta di Controlli Automatici # 21

Si consideri il sistema in retroazione rappresentato dal diagramma a blocchi di Fig. 1.



$$G(s) = \frac{220 e^{-t_0 s}}{(s + 10)(s + 20)}.$$

Fig. 1: Sistema in retroazione.

- a) Si assuma $G_c(s) = 1$, il blocco NL costituito da un guadagno unitario e $t_0 = 1$. Si analizzi la stabilità del sistema ad anello chiuso determinandone per via analitica il margine di fase.
- b) Si assuma $G_c(s) = 1$, il blocco NL costituito da un guadagno unitario e $t_0 = 0$. Si traccino i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione guadagno d'anello del sistema. Utilizzando i diagrammi di Bode tracciati, si analizzi la stabilità del sistema ad anello chiuso e se ne deduca il margine di fase. Si confrontino i risultati con quelli ottenuti al punto a) e se ne dia una spiegazione.
- c) Si assuma che il blocco NL sia costituito da un guadagno unitario e che sia $t_0 = 0$. Si progetti il blocco $G_c(s)$ come un regolatore del primo ordine che garantisca errore a regime nullo nella risposta al gradino ed errore a regime nella risposta alla rampa costante e uguale all'1%. A questo scopo si suggerisce di impiegare un regolatore PI progettato per cancellazione zero-polo.
- d) Si assuma $G_c(s) = 2(s + 20)/s$, il blocco NL costituito da un guadagno unitario e $t_0 = 0$. Si determini per via analitica il valore in % della massima sovraelongazione nella risposta al gradino del sistema ad anello chiuso. Si giustifichi il risultato ottenuto.
- e) Si assuma $G_c(s) = 2(s + 6.5)/s$, il blocco NL costituito da un guadagno unitario e $t_0 = 0$. Si tracci il diagramma di Bode delle ampiezze della funzione di sensibilità, $G_{cd}(s) = C(s)/D(s)$. Dal diagramma di Bode tracciato, si deduca il valore in db della reiezione del disturbo alla pulsazione di 1 rad/sec. Si verifichi per via analitica la correttezza del valore dedotto. Ai fini del tracciamento del diagramma di Bode si danno i valori numerici dei poli del sistema ad anello chiuso: $p_1 = -5.7038$, $p_{2,3} = -12.1481 \pm 18.8107j$.
- f) Si assuma $G_c(s) = 1$, $t_0 = 2$ e il blocco NL costituito da un relé ideale di ampiezza unitaria. Si determinino ampiezza e pulsazione di eventuali oscillazioni autosostenute. A questo scopo si suggerisce di considerare trascurabili le costanti di tempo dei poli del sistema $G(s)$ rispetto all'entità del ritardo.
- g) Si assuma $G_c(s) = 0.1(s + 10)/s$, $t_0 = 2$ e il blocco NL costituito da una saturazione di livello $Y_1 = 10$ e guadagno unitario. Si determini la pulsazione di eventuali oscillazioni autosostenute presenti nel sistema. A questo scopo si suggerisce di considerare trascurabile l'effetto del polo reale non nullo del sistema $G(s)$.

Prova scritta di Controlli Automatici # 22

Si consideri il sistema in retroazione rappresentato dal diagramma a blocchi di Fig. 1.

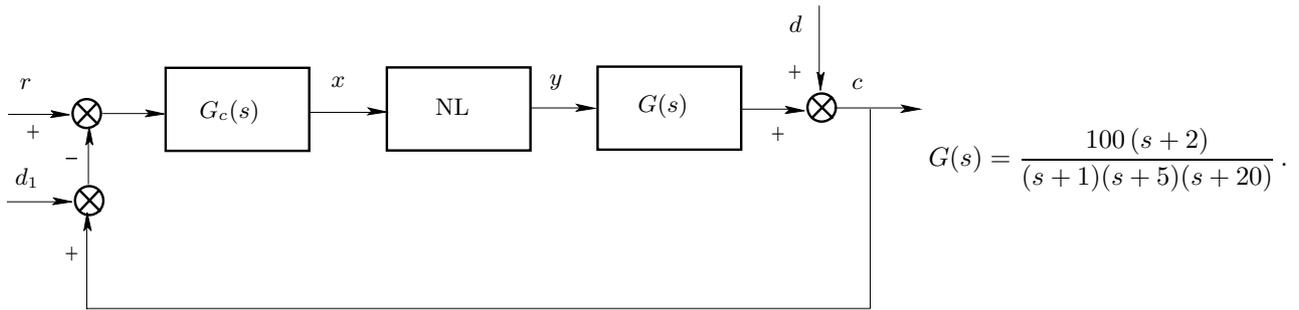


Fig. 1: Sistema in retroazione.

- a) Ignorando i due disturbi, assumendo il blocco NL costituito da un guadagno unitario e assumendo il blocco $G_c(s)$ costituito da un guadagno $K > 0$, si determini l'intervallo di valori di K per i quali il sistema ad anello chiuso è stabile.
- b) Ignorando i due disturbi, assumendo il blocco NL costituito da un guadagno unitario e assumendo il blocco $G_c(s)$ costituito da un guadagno $K > 0$, si tracci il luogo delle radici del sistema in retroazione al variare del parametro K .
- c) Ignorando i due disturbi, assumendo il blocco NL costituito da un guadagno unitario e assumendo il blocco $G_c(s) = 20$, si traccino i diagrammi di Bode asintotici delle ampiezze e delle fasi della funzione guadagno d'anello del sistema.
- d) Ignorando i due disturbi e assumendo il blocco NL costituito da un guadagno unitario, si progetti un regolatore $G_c(s)$, con grado relativo uguale a zero e ordine minimo, in modo da rendere soddisfatte le seguenti specifiche:
 - i) errore a regime nullo nella risposta al gradino;
 - ii) massima sovraelongazione nella risposta al gradino inferiore al 10%;
 - iii) tempo di ritardo nella risposta al gradino uguale a 0.1 sec.

A questo scopo si suggerisce di procedere per via analitica assumendo come funzione di trasferimento campione quella di un filtro di Butterworth di ordine e pulsazione di rottura opportunamente scelti.

- e) Assumendo il blocco NL costituito da un guadagno unitario e il regolatore con funzione di trasferimento

$$G_c(s) = \frac{(s+1)(s+5)(s+20)}{s(s+2)(s+17.32)},$$

si determini la reiezione R_1 sull'uscita del disturbo d_1 a 200 rad/sec e la reiezione R del disturbo d a 0.1 rad/sec. In altri termini, si calcoli di quanti db viene attenuato ciascuno dei due disturbi sull'uscita c .

- f) Ignorando i disturbi, assumendo il blocco NL costituito da una saturazione con guadagno unitario e livello $Y_1 = 4$ e assumendo il regolatore descritto da $G_c(s) = K/s$, si determini il massimo valore di K per il quale nel sistema non si ha innesco di oscillazioni autosostenute.

- g) Ignorando i disturbi, assumendo il blocco NL costituito da un relé ideale di ampiezza unitaria e assumendo il regolatore descritto da $G_c(s) = 10/s$, si determinino eventuali cicli limite.

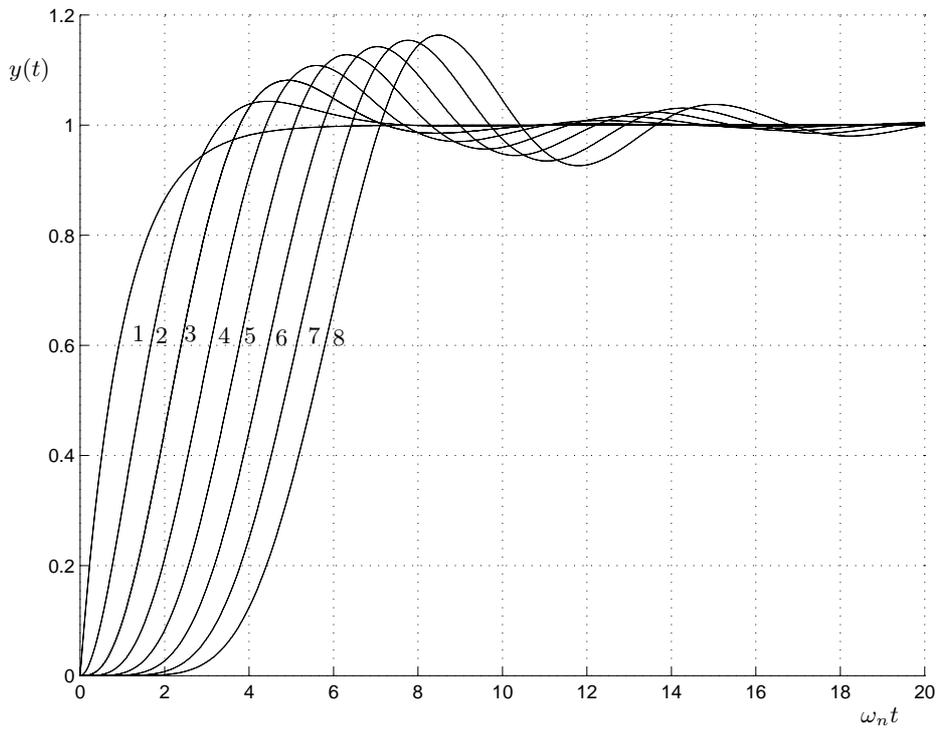


Fig. 2: Risposte al gradino dei filtri di Butterworth di ordine da 1 a 8.

ordine	α_8	α_7	α_6	α_5	α_4	α_3	α_2	α_1	α_0
1								1	1
2							1	1,414	1
3						1	2	2	1
4					1	2,613	3,414	2,613	1
5				1	3,236	5,236	5,236	3,236	1
6			1	3,864	7,464	9,142	7,464	3,864	1
7		1	4,494	10,10	14,60	14,60	10,10	4,494	1
8	1	5,126	13,14	21,85	25,69	21,85	13,14	5,126	1

Tab. 1: Tabella dei coefficienti dei filtri di Butterworth di ordine da 1 a 8.

Prova scritta di Controlli Automatici # 23

Si consideri il sistema in retroazione rappresentato dal diagramma a blocchi di Fig. 1.

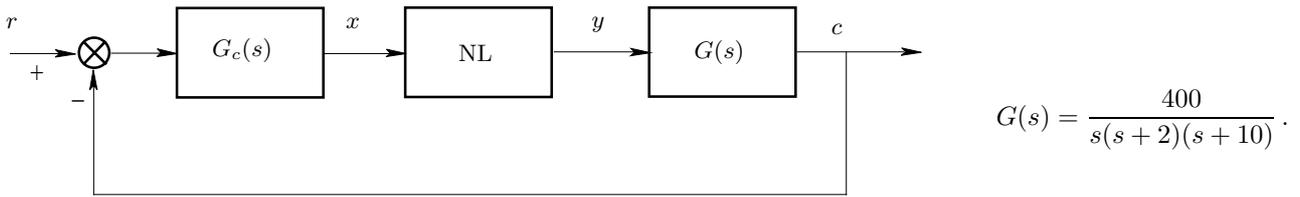


Fig. 1: Sistema in retroazione.

- a) Si assuma $G_c(s) = 1$ e il blocco NL costituito da un guadagno unitario. Si traccino i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione guadagno d'anello del sistema.
- b) Si assuma $G_c(s) = 1$ e il blocco NL costituito da un guadagno unitario. Si determinino per via grafica i margini di stabilità del sistema considerato (a questo scopo si suggerisce di utilizzare i diagrammi di Bode). Si verifichino poi per via analitica i risultati ottenuti.
- c) Si assuma $G_c(s) = 1$ e il blocco NL costituito da un guadagno unitario. Si tracci il diagramma polare della funzione guadagno d'anello del sistema. Si determinino, in particolare, i valori numerici dell'ascissa dell'asintoto verticale e dell'intersezione con l'asse reale. Si concluda sulla stabilità (o meno) del sistema ad anello chiuso e si verifichi la coerenza della risposta con i risultati ottenuti al precedente punto b).
- d) Si assuma che il blocco NL sia costituito da un guadagno unitario. Mediante un'opportuna costruzione grafica basata sull'impiego dei diagrammi di Bode, si analizzi la possibilità di assegnare al sistema considerato margine di fase $M_F = 50^\circ$ progettando il blocco $G_c(s)$ come un'opportuna rete ritardatrice. Si determini, in particolare, l'intervallo dei valori della pulsazione ω per i quali tale progetto è possibile.
- e) Si assuma che il blocco NL sia costituito da un guadagno unitario. Utilizzando le formule di inversione¹, si progetti la rete correttiva $G_c(s)$ che assegna al sistema margine di fase uguale a 50° alla pulsazione $\omega = 1$ rad/sec.
- f) Si assumi $G_c(s) = 1$ e il blocco NL costituito da una saturazione di guadagno unitario e livello $Y_1 = 10$. Si determinino la massima ampiezza A_M di un segnale di uscita sinusoidale che possa essere riprodotto senza saturazione alla pulsazione di 1 rad/sec. Si determini inoltre la massima pendenza di una rampa che possa essere riprodotta in uscita con errore a regime finito.
- g) Si assumi $G_c(s) = (s + 1)/s$ e il blocco NL costituito da un relé ideale di ampiezza $Y_1 = 10$. Si determinino ampiezza e pulsazione di eventuali oscillazioni autosostenute.

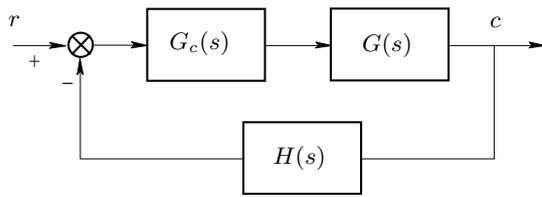
¹Si ricorda che le formule di inversione per la rete anticipatrice sono

$$\alpha = \frac{M \cos \varphi - 1}{M(M - \cos \varphi)}, \quad \omega\tau = \frac{M - \cos \varphi}{\sin \varphi},$$

e che le stesse valgono anche per la rete ritardatrice invertendo M e cambiando di segno φ .

Prova scritta di Controlli Automatici # 24

Si consideri il sistema in retroazione rappresentato dal diagramma a blocchi di Fig.1.



$$G(s) = \frac{100}{(s+2)(s+5)(s+10)},$$

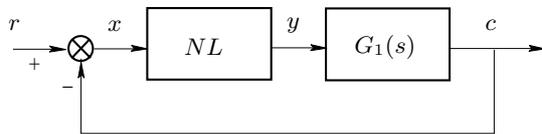
$$H(s) = \frac{80}{s+20}.$$

Fig. 1: Sistema in retroazione

- a) Assumendo $G_c(s) = 1$, si traccino i diagrammi asintotici di Bode (delle ampiezze e delle fasi) della funzione guadagno d'anello del sistema $G_l(s) = G(s)H(s)$.
- b) Assumendo $G_c(s) = 1$, si tracci per punti il diagramma di Nichols della funzione guadagno d'anello del sistema $G_l(s) = G(s)H(s)$.
- c) Il comportamento ideale del sistema sia descritto dalla relazione $c(t) = k_c r(t)$ con $k_c = 1/4$. Si determini il valore dell'errore a regime riferito all'uscita nella risposta al gradino unitario assumendo $G_c(s) = 1$.
- d) Si progetti il regolatore $G_c(s)$ in modo che siano soddisfatte le seguenti specifiche:
 - i) errore a regime riferito all'ingresso nella risposta al gradino uguale a zero;
 - ii) massima sovraelongazione nella risposta al gradino non superiore all' 8.50%;
 - iii) errore a regime riferito all'ingresso nella risposta alla rampa unitaria non superiore a 0.05;
 - iv) tempo di ritardo nella risposta al gradino non superiore a 0.05 sec ;

Si suggerisce di effettuare il progetto per via analitica utilizzando come modello di riferimento un filtro di Butterworth opportunamente scelto (si vedano Fig.3 e Tab.1).

- e) Si consideri il sistema in retroazione rappresentato in Fig.2.



$$G_1(s) = \frac{1}{(s+0.5)^2(s+1)}$$

Fig. 2: Sistema non lineare in retroazione

Assumendo che il blocco NL sia costituito da un guadagno unitario, si tracci il diagramma di Nyquist della funzione guadagno d'anello del sistema.

- f) Con riferimento al sistema introdotto al punto e) ed assumendo che il blocco NL sia un blocco non lineare di tipo algebrico definito dalla caratteristica ingresso-uscita rappresentata in Fig.4, si individui il punto di lavoro (x_0, y_0, c_0) corrispondente al riferimento costante $r = 0$ e si tracci l'andamento della funzione descrittiva dell'elemento non lineare nell'intorno del punto di lavoro.
- g) Con riferimento al sistema introdotto al precedente punto f), si determini la pulsazione di eventuali oscillazioni autosostenute presenti nel sistema.

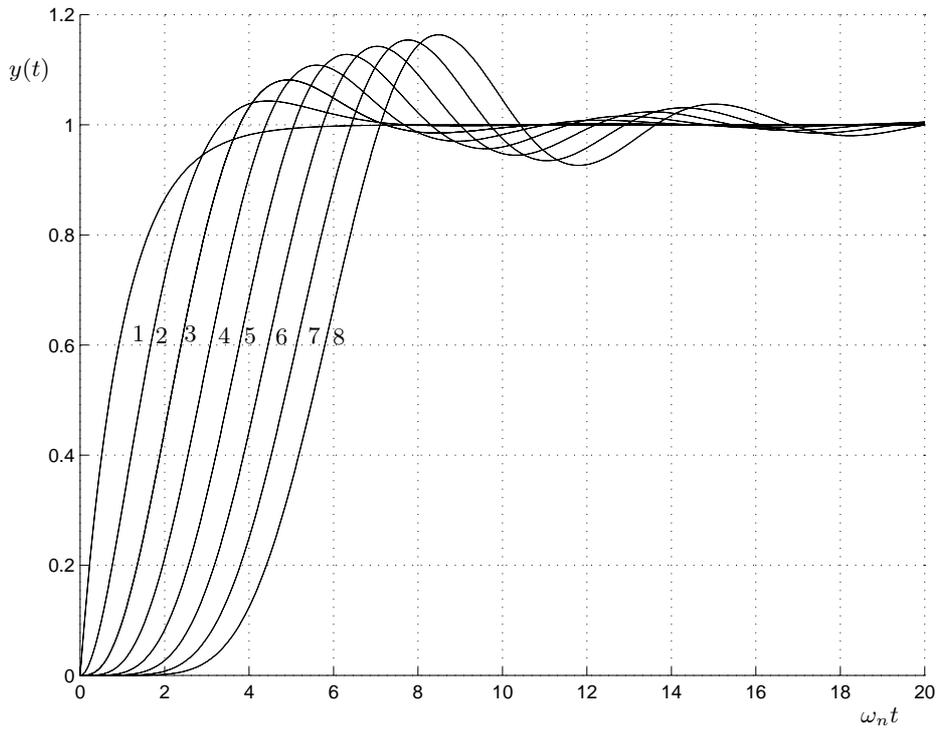


Fig. 3: Filtri di Butterworth di ordine da 1 a 8: risposte al gradino

ordine	α_8	α_7	α_6	α_5	α_4	α_3	α_2	α_1	α_0
1								1	1
2							1	1,414	1
3						1	2	2	1
4					1	2,613	3,414	2,613	1
5				1	3,236	5,236	5,236	3,236	1
6			1	3,864	7,464	9,142	7,464	3,864	1
7		1	4,494	10,10	14,60	14,60	10,10	4,494	1
8	1	5,126	13,14	21,85	25,69	21,85	13,14	5,126	1

Tab. 1: Filtri di Butterworth di ordine da 1 a 8: tabella dei coefficienti

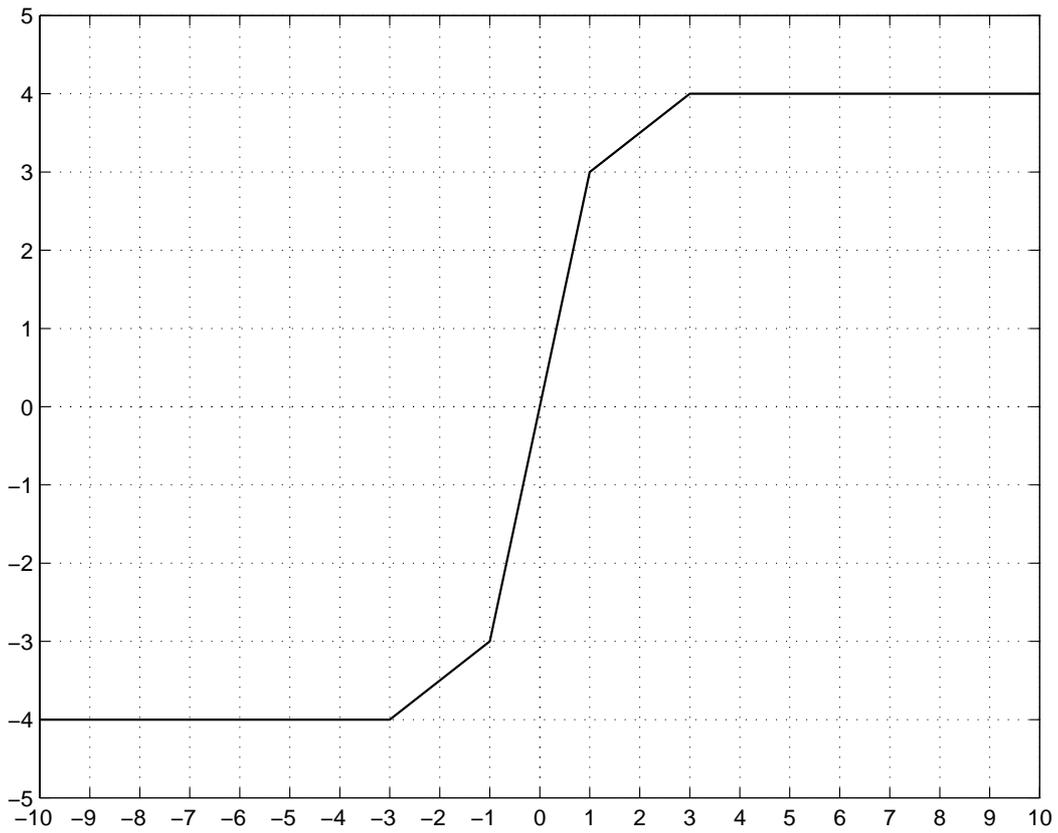
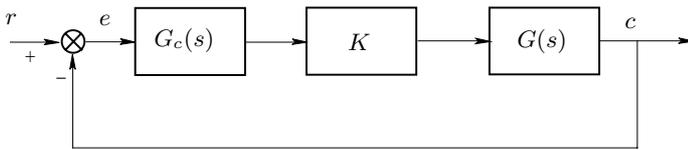


Fig. 4: Caratteristica ingresso-uscita dell'elemento non lineare di tipo algebrico

Prova scritta di Controlli Automatici # 25

Si consideri il sistema in retroazione rappresentato dal diagramma a blocchi di Fig. 1.



$$G(s) = \frac{100}{s(s+5)(s+20)}.$$

Fig. 1: Sistema in retroazione.

- a) Assumendo $G_c(s) = 1$ e $K = 1$, si traccino i diagrammi asintotici di Bode (delle ampiezze e delle fasi) della funzione guadagno d'anello $G_a(j\omega) = KG_c(j\omega)G(j\omega)$ del sistema.
- b) Assumendo $K = 1$ e $G_c(s) = 1 + Ts$, si tracci il contorno delle radici del sistema ad anello chiuso al variare del parametro $T > 0$ (gli zeri del polinomio $p(s) = s^3 + 25s^2 + 100s + 100$ sono $-20.32, -3.08, -1.59$). Si calcolino in particolare le ascisse di eventuali punti di diramazione, l'ascissa del centro stella degli asintoti e gli angoli formati dagli asintoti con l'asse reale. Si determinino infine eventuali intervalli di valori del parametro $T > 0$ per i quali il sistema ad anello chiuso risulti instabile.
- c) Assumendo $G_c(s) = 1$ e $K = 1$, si determini la pulsazione ω_0 in corrispondenza della quale la funzione guadagno d'anello $G_a(j\omega) = KG_c(j\omega)G(j\omega)$ del sistema presenta fase uguale a -165° . A questo scopo si suggerisce di dedurre possibili valori utilizzando i diagrammi di Bode e di verificarne la correttezza per via analitica.
- d) Assumendo $K = 1$, si progetti il regolatore $G_c(s)$ in modo tale il sistema compensato presenti errore a regime nullo nella risposta al gradino e margine di fase $M_\varphi = 60^\circ$. A questo scopo si suggerisce di impiegare un regolatore standard di tipo PD progettato in base ad opportune considerazioni svolte sui diagrammi di Bode (a questo scopo si ricorda che il regolatore PD introduce un anticipo di 45° in corrispondenza della pulsazione di rottura).
- e) Assumendo $K = 1$, si progetti il regolatore $G_c(s)$ in modo tale da garantire errore a regime costante nella risposta alla rampa uguale all'1% e in modo tale da cancellare le dinamiche più lente dell'impianto (a questo scopo, si suggerisce di utilizzare ancora un regolatore standard opportunamente scelto). Si verifichi la stabilità ad anello chiuso del sistema così compensato.
- f) Assumendo $K = 1$ e

$$G_c(s) = \frac{0.3(s+1.2)(s+9.7)}{s},$$

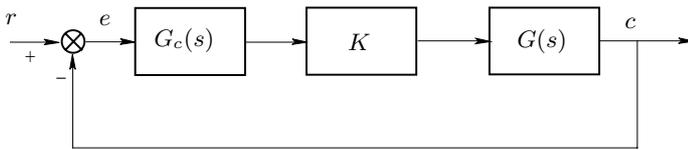
si tracci l'andamento qualitativo del diagramma di Nyquist della funzione guadagno d'anello

$$G_a(j\omega) = KG_c(j\omega)G(j\omega)$$

del sistema.

Prova scritta di Controlli Automatici # 26

Si consideri il sistema in retroazione rappresentato dal diagramma a blocchi di Fig. 1.



$$G(s) = \frac{10(s+20)}{s(s+2)(s+10)}.$$

Fig. 1: Sistema in retroazione.

- a) Assumendo $G_c(s) = 1$ e $K = 1$, si traccino i diagrammi asintotici di Bode (delle ampiezze e delle fasi) della funzione guadagno d'anello $G_a(j\omega) = KG_c(j\omega)G(j\omega)$ del sistema.
- b) Assumendo $G_c(s) = 1$ e $K = 1$, si determini la pulsazione ω_0 in corrispondenza della quale la funzione guadagno d'anello $G_a(j\omega) = KG_c(j\omega)G(j\omega)$ del sistema presenta fase uguale a -120° . A questo scopo si suggerisce di dedurre possibili valori utilizzando diagrammi di Bode e di verificarne la correttezza per via analitica.
- c) Assumendo $K = 1$, si progetti il regolatore $G_c(s)$ in modo tale che il sistema compensato presenti errore a regime nullo nella risposta al gradino e margine di fase $M_\varphi = 60^\circ$. A questo scopo si suggerisce di impiegare una rete a ritardo e anticipo¹ progettata assumendo come pulsazione di centro banda ω_0 la pulsazione alla quale la funzione guadagno d'anello del sistema non compensato presenta fase uguale a -120° e come rapporto fra le costanti di tempo il valore $\rho = \tau_2/\tau_1 = 4$. Si suggerisce infine di approssimare l'attenuazione introdotta dalla rete alla pulsazione ω_0 con il corrispondente valore sul diagramma asintotico.
- d) Si assuma $K = 1$. Si analizzi la possibilità di conferire al sistema margine di fase $M_\varphi = 50^\circ$ alla pulsazione $\omega = 0.5 \text{ rad/sec}$ realizzando il regolatore $G_c(s)$ con una sola rete ritardatrice o una sola rete anticipatrice. Si determinino i parametri α e τ di tale rete e quindi la sua funzione di trasferimento. Si suggerisce di risolvere il problema utilizzando le formule di inversione².
- e) Si assuma che il regolatore $G_c(s)$ sia costituito da un regolatore PI avente funzione di trasferimento

$$G_c(s) = \frac{0.1(s+0.2)}{s}.$$

Si tracci l'andamento qualitativo del luogo delle radici del sistema ad anello chiuso per valori di $K > 0$. Si determinino, in particolare, il numero dei punti di emergenza/convergenza sull'asse reale, il centro della stella di asintoti e gli angoli formati dagli asintoti con l'asse reale.

f) Si assuma che il regolatore $G_c(s)$ sia definito come al precedente punto e). Si determini l'intervallo dei valori di K per i quali il sistema ad anello chiuso risulta stabile. Si determini il valore di K per il quale l'errore a regime nella risposta alla parabola unitaria del sistema ad anello chiuso sia $e_r = 0.25$ e si verifichi che per tale valore di K il sistema risulti stabile.

¹Si ricorda che la funzione di trasferimento della rete a ritardo e anticipo ha l'espressione

$$G_c(s) = \frac{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)}{(1 + \alpha \tau_1 s) \left(1 + \frac{\tau_2}{\alpha} s\right)}.$$

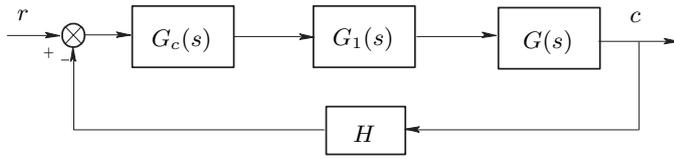
Si ricorda inoltre che la pulsazione di centro banda ω_0 è legata alle costanti di tempo τ_1 e τ_2 dalla relazione $\omega_0 = 1/\sqrt{\tau_1 \tau_2}$ e che α è il valore dell'approssimazione asintotica del diagramma di Bode delle ampiezze della rete in corrispondenza di ω_0 .

²Si ricorda che le formule di inversione per la rete anticipatrice sono:

$$\alpha = \frac{M \cos \varphi - 1}{M(M - \cos \varphi)}, \quad \omega \tau = \frac{M - \cos \varphi}{\sin \varphi}.$$

Prova scritta di Controlli Automatici # 27

Si consideri il sistema in retroazione rappresentato dal diagramma a blocchi di Fig. 1.



$$G_1(s) = \frac{K(1 + \tau s)}{s}$$

$$G(s) = \frac{180}{s^2 + 6s + 45}$$

Fig. 1: Sistema in retroazione.

- a) Si assuma $G_c(s) = 1$, $K = 25$ e $H = 1$. Si tracci il contorno delle radici del sistema in retroazione al variare del parametro $\tau > 0$. Si determinino, in particolare, le ordinate delle intersezioni del contorno con l'asse immaginario e l'ascissa del centro della stella degli asintoti (i poli del sistema in retroazione con $\tau = 0$ sono $p_1 = -17.7491$ e $p_{2,3} = 5.8745 \pm j 14.7995$).
- b) Con riferimento al sistema definito al punto a), si determini il valore del parametro τ per il quale la risposta al gradino del sistema ad anello chiuso presenta il minimo tempo di assestamento. Si calcoli tale valore del tempo di assestamento.
- c) Si assuma $G_c(s) = 1$, $K = 25$, $\tau = 1$ e $H = 4$. Si assuma la costante di regolazione K_c uguale a 0.25. Si determini il valore dell'errore a regime riferito all'uscita nella risposta del sistema (ad anello chiuso) rispettivamente al gradino, alla rampa e alla parabola.
- d) Si assuma $K = 1$, $\tau = 0$ e $H = 1$. Si progetti la rete correttiva $G_c(s)$ (una sola rete anticipatrice o una sola rete ritardatrice) che assegni al sistema compensato il margine di fase $M_\varphi = 60^\circ$ alla pulsazione $\omega = 0.5$ rad/sec. Si suggerisce di risolvere il problema utilizzando le formule di inversione¹.
- e) Si assuma $G_c(s) = 1$, $K = 1$, $\tau = 0$ e $H = 25$. Si traccino i diagrammi di Bode (delle ampiezze e delle fasi) relativi alla funzione di trasferimento $C(s)/D(s)$ di un disturbo sull'uscita (cioè di un disturbo che entra nel sistema in un punto situato immediatamente a monte del punto di prelievo del segnale di retroazione). Si determinino inoltre i valori della reiezione del disturbo rispettivamente alla pulsazione $\omega_1 = 1$ rad/sec, $\omega_{10} = 10$ rad/sec, e $\omega_{100} = 100$ rad/sec.
- f) Si assuma $K = 25$, $\tau = 0$ e $H = 1$. Si progetti una rete a ritardo e anticipo² $G_c(s)$ che assegni al sistema compensato il margine di fase $M_\varphi = 50^\circ$. Si assuma $\rho = \tau_2/\tau_1 = 4$. Si suggerisce di utilizzare i diagrammi di Bode scegliendo opportunamente la pulsazione di centro banda della rete.

¹Si ricorda che le formule di inversione per la rete anticipatrice sono:

$$\alpha = \frac{M \cos \varphi - 1}{M(M - \cos \varphi)}, \quad \omega\tau = \frac{M - \cos \varphi}{\sin \varphi}.$$

²Si ricorda che la funzione di trasferimento della rete a ritardo e anticipo ha l'espressione

$$G_c(s) = \frac{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)}{(1 + \alpha\tau_1 s)\left(1 + \frac{\tau_2}{\alpha} s\right)}.$$

Si ricorda inoltre che la pulsazione di centro banda ω_0 è legata alle costanti di tempo τ_1 e τ_2 dalla relazione $\omega_0 = 1/\sqrt{\tau_1\tau_2}$ e che α è il valore dell'approssimazione asintotica del diagramma di Bode delle ampiezze della rete in corrispondenza di ω_0 .

Prova scritta di Controlli Automatici # 28

Si consideri il sistema in retroazione rappresentato dal diagramma a blocchi di Fig. 1.

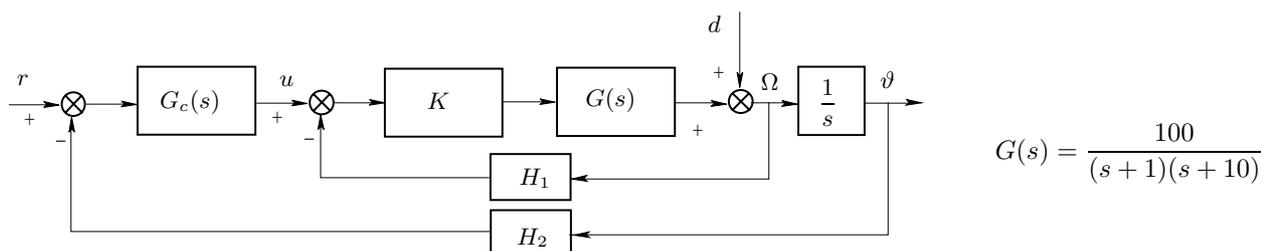


Fig. 1: Sistema in retroazione.

- a) Assumendo $G_c(s) = 0$, $K = 1$ e $H_2 = 0$, si determini per via analitica il valore della costante H_1 per il quale la reiezione del disturbo d alla pulsazione di 1 rad/sec è uguale a 40 db. Si verifichi la stabilità dell'anello di retroazione per tale valore di H_1 .
- b) Assumendo $G_c(s) = 0$, $K = 10$, $H_1 = 1$ e $H_2 = 0$, si traccino i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione di trasferimento $G_{\vartheta d}(s)$ dal disturbo d all'uscita ϑ .
- c) Assumendo $G_c(s) = 0$, $K = 1$, $H_1 = 1$ e $H_2 = 1$, si calcoli l'espressione della funzione di trasferimento $G_{\vartheta u}(s)$ dal segnale manipolabile u all'uscita ϑ e se ne tracci il diagramma di Bode delle fasi. Si determini per approssimazioni successive il valore della pulsazione $\bar{\omega}$ alla quale la fase di $G_{\vartheta u}(j\omega)$ è uguale a -120° .
- d) Assumendo $K = 1$, $H_1 = 1$ e $H_2 = 1$, si progetti il blocco $G_c(s)$ in modo da garantire errore a regime nullo nella risposta alla rampa e margine di fase $M_\varphi = 60^\circ$. A questo scopo si suggerisce di impiegare un regolatore PID progettato assumendo come pulsazione di centro banda la pulsazione alla quale il sistema non compensato presenta fase uguale a -120° e assumendo il rapporto T_i/T_d fra le costanti di tempo delle azioni integrale e derivativa uguale a 10.
- e) Assumendo $K = 1$, $H_1 = 10$ e $H_2 = 1$, si progetti il blocco $G_c(s)$ in modo da garantire errore a regime nullo nella risposta al gradino, massima sovraelongazione della risposta al gradino non superiore al 10% e tempo di ritardo non superiore a 1 sec. A questo scopo si suggerisce di procedere per via analitica, scegliendo come funzione di trasferimento campione quella di un filtro di Butterworth di ordine minimo e pulsazione di rottura opportuna.
- f) Assumendo $K = 1$, $H_1 = 10$ e $H_2 = 2$, si progetti il blocco $G_c(s)$ in modo da garantire errore a regime nullo nella risposta al gradino, massima sovraelongazione della risposta al gradino non superiore al 10% e tempo di ritardo non superiore a 1 sec. A questo scopo si suggerisce di procedere per via analitica, scegliendo come funzione di trasferimento campione quella ottenuta modificando opportunamente la funzione di trasferimento di un filtro di Butterworth di ordine minimo.

ordine	α_8	α_7	α_6	α_5	α_4	α_3	α_2	α_1	α_0
1								1	1
2							1	1,414	1
3						1	2	2	1
4					1	2,613	3,414	2,613	1
5				1	3,236	5,236	5,236	3,236	1
6			1	3,864	7,464	9,142	7,464	3,864	1
7		1	4,494	10,10	14,60	14,60	10,10	4,494	1
8	1	5,126	13,14	21,85	25,69	21,85	13,14	5,126	1

Tab. 1: Tabella dei coefficienti dei filtri di Butterworth di ordine da 1 a 8.

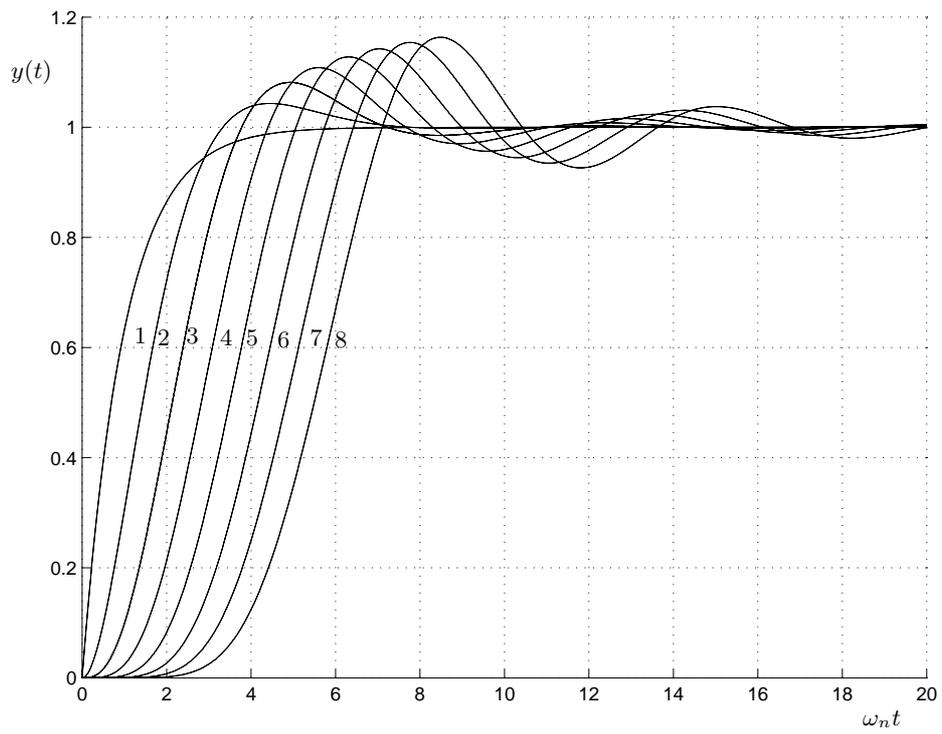
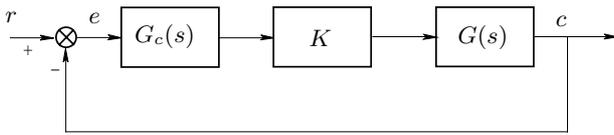


Fig. 2: Risposte al gradino dei filtri di Butterworth di ordine da 1 a 8.

Prova scritta di Controlli Automatici # 29

Si consideri il sistema in retroazione rappresentato dal diagramma a blocchi di Fig. 1.



$$G(s) = \frac{100000}{(s+1)(s+10)(s+100)}$$

Fig. 1: Sistema in retroazione.

- a) Assumendo $G_c(s) = 1$, si determini l'intervallo di valori del parametro K per i quali il sistema in retroazione è stabile asintoticamente.
- b) Assumendo $G_c(s) = 1$ e $K = 1$, si traccino i diagrammi asintotici di Bode (delle ampiezze e delle fasi) della funzione guadagno d'anello $G_a(j\omega)$ del sistema.
- c) Assumendo $K = 1$, si progetti il regolatore $G_c(s)$ in modo tale il sistema compensato presenti errore a regime nullo nella risposta al gradino e margine di fase $M_\varphi = 45^\circ$. A questo scopo si suggerisce di impiegare un regolatore di tipo proporzionale-integrale-derivativo progettato assumendo come pulsazione di centro banda ω_0 la pulsazione alla quale il sistema non compensato presenta fase uguale a -135° e come rapporto fra le costanti di tempo delle azioni integrale e derivativa il valore $\rho = T_i/T_d = 5$. Si ricorda che la relazione fra la pulsazione di centro banda e le costanti di tempo delle azioni integrale e derivativa è $\omega_0 = 1/\sqrt{T_i T_d}$. Per il sistema così progettato, si calcoli la reiezione dei disturbi sull'uscita alla pulsazione $\omega = 1$ rad/sec.
- d) Assumendo $K = 1$, si progetti il regolatore $G_c(s)$ in modo tale il sistema compensato presenti ancora errore a regime nullo nella risposta al gradino e margine di fase $M_\varphi = 45^\circ$, ma utilizzando un regolatore di tipo proporzionale-integrale. Si suggerisce di progettare il PI assumendo come pulsazione di rottura la pulsazione alla quale il sistema non compensato presenta fase uguale a -90° . Al fine di dimensionare la sensibilità proporzionale del PI, si tenga conto della differenza di 3db fra il diagramma di Bode delle ampiezze del PI e la sua approssimazione asintotica in corrispondenza della pulsazione di rottura. Per il sistema così progettato, si calcoli la reiezione dei disturbi sull'uscita alla pulsazione $\omega = 1$ rad/sec e la si confronti con quella ottenuta al punto c).
- e) Assumendo

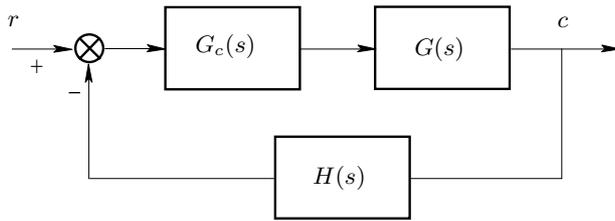
$$G_c(s) = \frac{(s+1)}{s},$$

si tracci il luogo delle radici del sistema in retroazione al variare del parametro $K > 0$. Si determinino, in particolare, il centro della stella degli asintoti e le eventuali intersezioni del luogo con l'asse immaginario.

f) Assumendo $K = 1$ e $G_c(s)$ definita come al punto e), si tracci il diagramma polare della funzione di risposta armonica d'anello. Si calcolino, in particolare, le ascisse di eventuali asintoti e intersezioni con l'asse reale. Si valuti la stabilità del sistema ad anello chiuso.

Prova scritta di Controlli Automatici # 30

Si consideri il sistema in retroazione rappresentato dal diagramma a blocchi di Fig.1.



$$G(s) = \frac{100}{(s+1)(s+20)}$$

$$H(s) = \frac{10}{s+5}$$

Fig. 1: Sistema in retroazione

- Si assuma $G_c(s) = (1 + \tau s)/s$ e si tracci il contorno delle radici del sistema in retroazione al variare del parametro $\tau > 0$. Si indichi, in particolare, l'orientamento dei rami del contorno delle radici e si calcolino il centro della stella degli asintoti e le intersezioni del contorno con l'asse immaginario. Si noti che per $\tau = 0$ le radici dell'equazione caratteristica del sistema in retroazione sono $s_1 = -19.8191$, $s_2 = -6.8828$, $s_{3,4} = 0.3509 \pm j 2.6847$.
- Si assuma $G_c(s) = (1 + \tau s)/s$ e si calcolino eventuali intervalli di valori del parametro $\tau > 0$ per i quali il sistema ad anello chiuso risulti stabile. Si verifichi la coerenza dei risultati trovati con l'andamento del contorno delle radici tracciato al punto a).
- Si assuma $G_c(s) = 1/s$ e si traccino i diagrammi asintotici di Bode (delle ampiezze e delle fasi) della funzione guadagno d'anello del sistema. Si indichino sui grafici i segmenti corrispondenti ai margini di stabilità. Si verifichi per via analitica la correttezza dei valori dei margini di stabilità dedotti dai grafici.
- Si assuma $G_c(s) = 1/s$ e si tracci per punti il diagramma di Nichols della funzione guadagno d'anello del sistema. Si considerino, in particolare, le pulsazioni $\omega_1 = 0.1$ rad/sec, $\omega_2 = 1$ rad/sec, $\omega_3 = 10$ rad/sec.
- Si assuma $G_c(s) = G_{c1}(s)/s$ e si progetti la rete correttiva $G_{c1}(s)$ (una sola rete anticipatrice oppure una sola rete ritardatrice) che conferisce al sistema margine di fase $M_f = 45^\circ$ alla pulsazione $\omega = 0.4$ rad/sec.
- Si assuma $G_c(s) = G_{c2}(s)/s$, dove

$$G_{c2}(s) = K \frac{s + \alpha}{s + \beta}.$$

Si dimensionino i parametri K , α e β in modo tale che $G_{c2}(s)$ abbia guadagno statico unitario, cancelli la dinamica più lenta dell'impianto e introduca una dinamica dieci volte più veloce della dinamica più veloce dell'impianto. Assumendo la costante di regolazione $K_c = 1/2$, si calcoli il valore dell'errore a regime riferito all'ingresso nella risposta alla rampa unitaria del sistema così progettato ad anello chiuso.

Appendice B

Carte semilogaritmiche

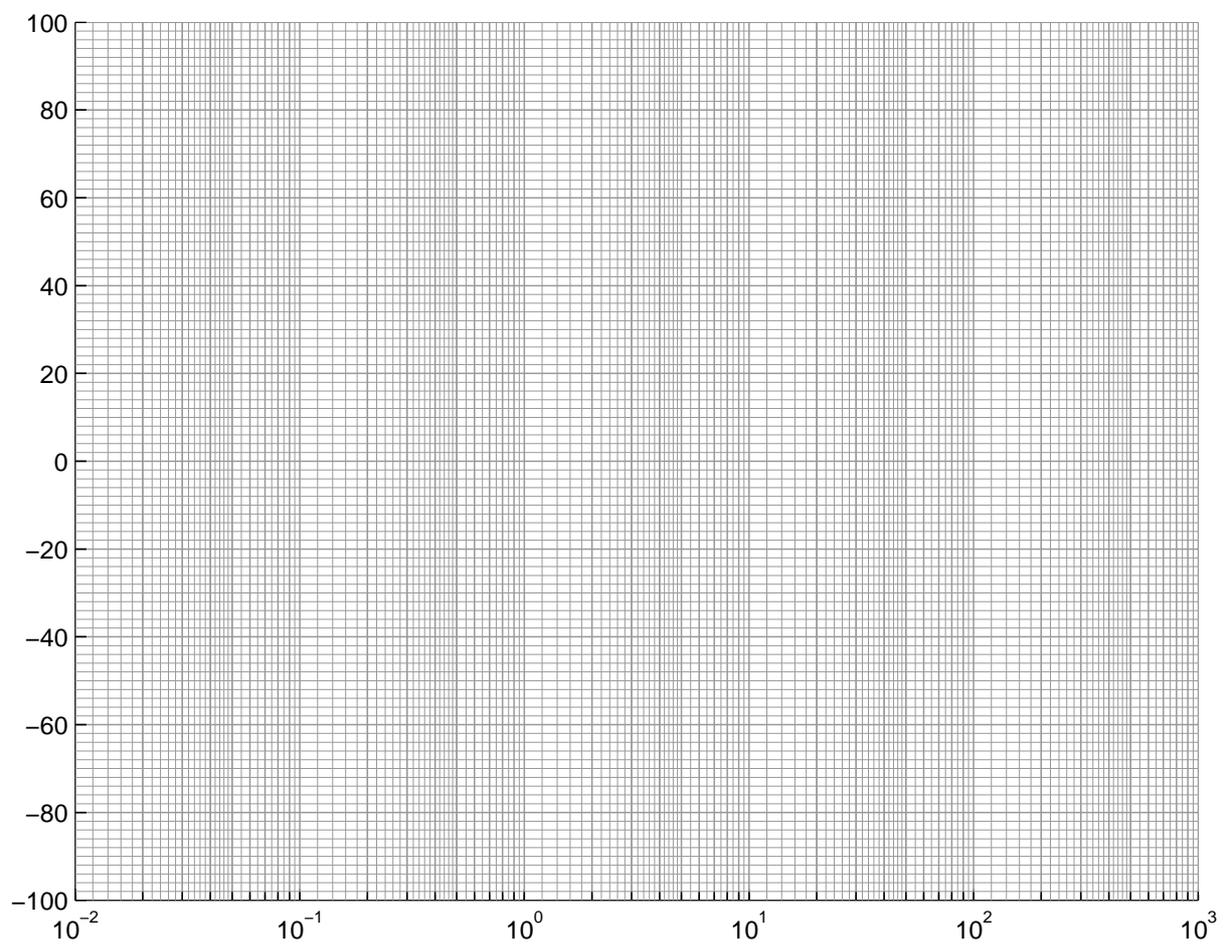


Fig. 1: Reticolo per il tracciamento dei diagrammi di Bode (diagramma delle ampiezze).

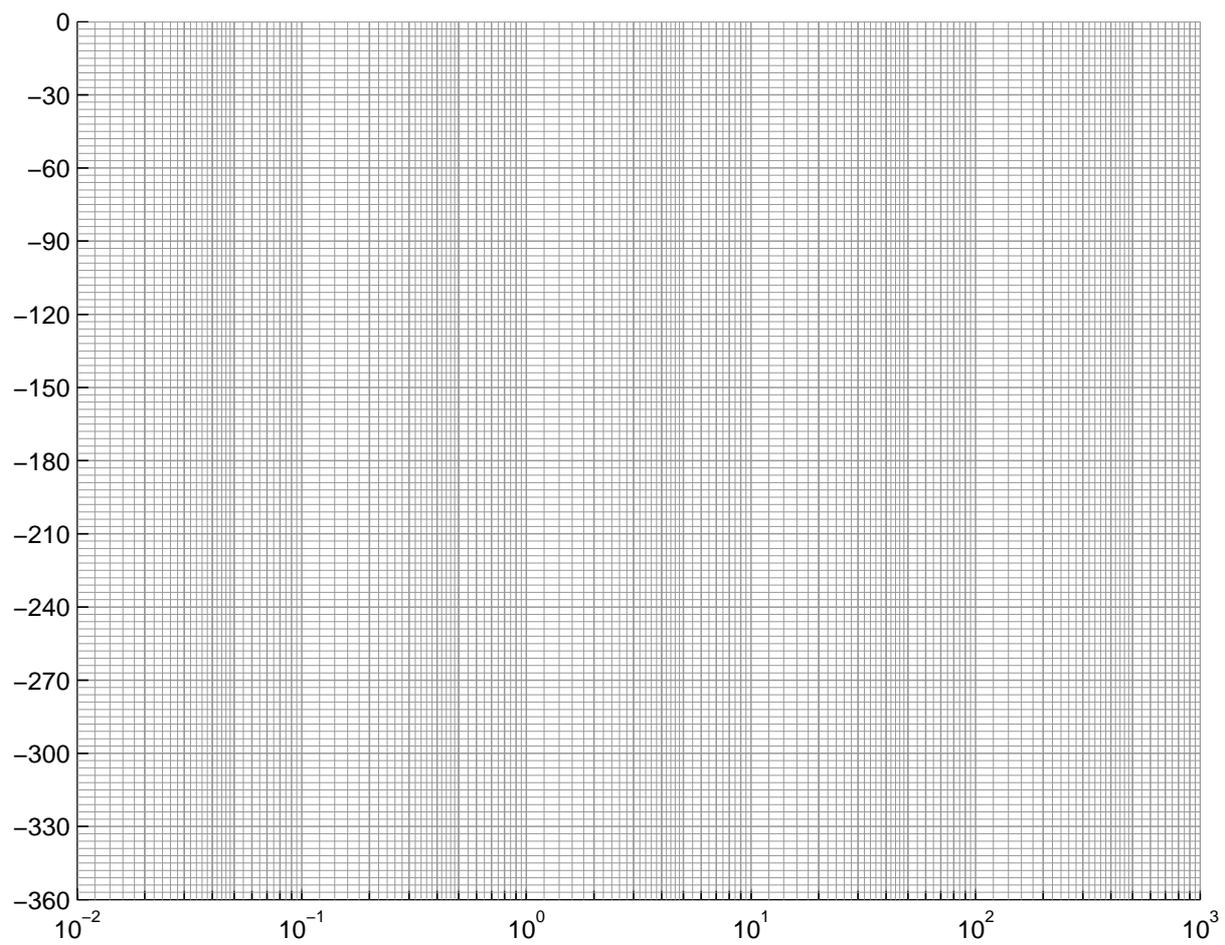


Fig. 2: Reticolo per il tracciamento dei diagrammi di Bode (diagramma delle fasi).

Appendice C

Carte di Nichols

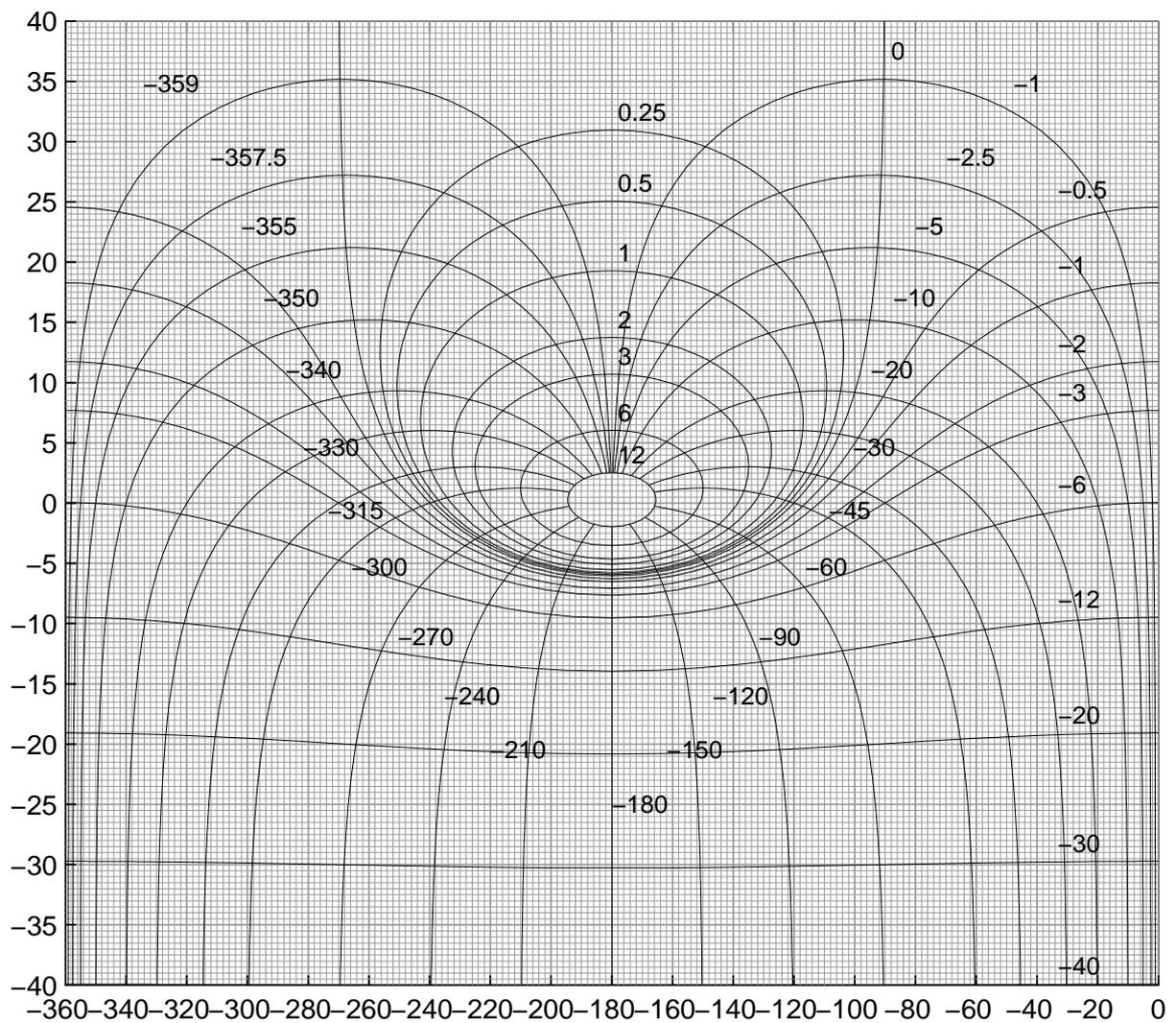


Fig. 1: Carta di Nichols semilogaritmica.

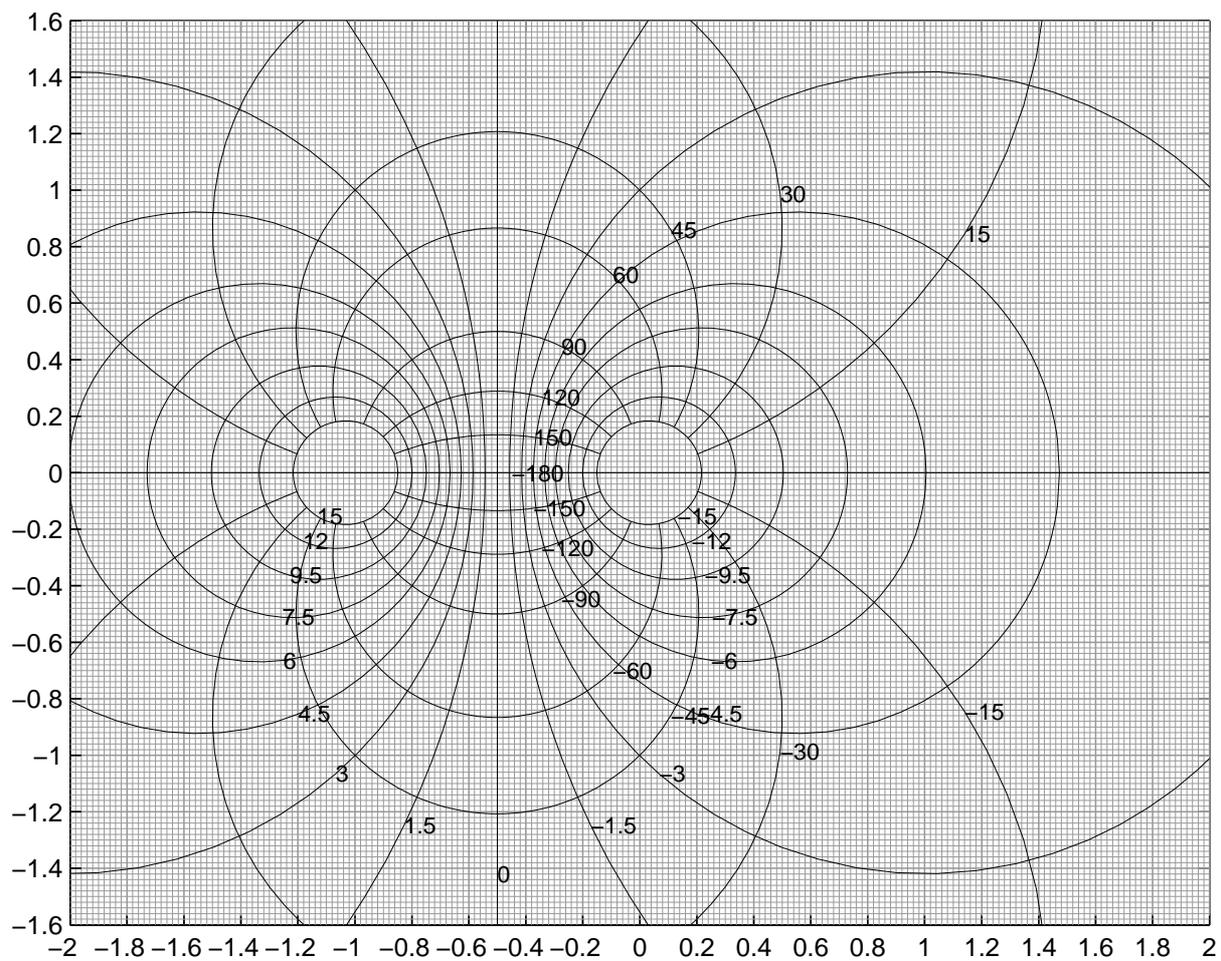


Fig. 2: Carta di Nichols polare.

Riferimenti bibliografici

- [1] Giovanni Marro, *Controlli Automatici*, Quinta edizione, Zanichelli, Bologna, 2004.
- [2] Giovanni Marro, *TFI: Insegnare e Apprendere i Controlli Automatici di Base con Matlab©, con CD-ROM*, Zanichelli, Bologna, 1998.