

Appendice A

Richiami di matematica

AI. Notazione scientifica e Uso degli esponenti

I numeri che incontriamo in chimica sono spesso estremamente grandi (per es. 8 180 000 000) o estremamente piccoli (per es. 0,000 004 613). Quando dobbiamo lavorare con numeri di questo tipo, conviene esprimerli in **notazione scientifica**, che consiste nello scriverli come un numero compreso tra 1 e 10, moltiplicato per 10 elevato alla giusta potenza. Per esempio, il numero 171,3 in notazione scientifica è $1,713 \times 100 = 1,713 \times 10^2$. Altri esempi sono

$$7320 = 7,32 \times 10^3$$

$$1623000 = 1,623 \times 10^6$$

Poiché in questi numeri gli zeri servono solo a indicare la posizione della virgola, non devono essere considerati cifre significative, e non si scrivono quando il numero è in notazione scientifica. Si noti che l'esponente del 10 è dato in ogni caso dal numero di posizioni di cui è stata spostata la virgola verso sinistra:

$$\begin{array}{cc} \underbrace{7320.}_{3 \text{ posizioni}} & \underbrace{1623000.}_{6 \text{ posizioni}} \end{array}$$

Quando si esprimono in notazione scientifica numeri minori di 1, la potenza di 10 deve avere un esponente negativo. Per esempio 0,614 diventa $6,14 \times 10^{-1}$. Ricordiamo che il significato di un esponente negativo è dato dalla formula

$$10^{-n} = \frac{1}{10^n} \quad (\text{A1.1})$$

Altri esempi sono

$$0,0005 = 5 \times 10^{-4}$$

$$0,000000000446 = 4,46 \times 10^{-10}$$

Si noti che l'esponente del 10 è sempre il numero di posizioni di cui la virgola è stata spostata a destra:

$$\begin{array}{cc} \underbrace{0,0005}_{4 \text{ posizioni}} & \underbrace{0,000000000446}_{10 \text{ posizioni}} \end{array}$$

Quando si fanno calcoli stechiometrici, bisogna essere capaci di operare con i numeri in notazione scientifica.

Per sommare o sottrarre due o più numeri espressi in notazione scientifica, bisogna che la potenza del 10 sia la stessa per tutti. Consideriamo per esempio la somma

$$5,127 \times 10^4 + 1,073 \times 10^3$$

Riscriviamo il primo numero come

$$5,127 \times 10^4 = 51,27 \times 10^3$$

Notate che avendo cambiato il fattore 10^4 in 10^3 , abbiamo dovuto rendere 10 volte più grande il fattore prima di 10^3 . Adesso possiamo calcolare

$$\begin{aligned} 5,127 \times 10^4 + 1,073 \times 10^3 &= \\ &= (51,27 + 1,073) \times 10^3 = \\ &= 52,34 \times 10^3 = \\ &= 5,234 \times 10^4 \end{aligned}$$

Nel cambiare un numero del tipo $52,34 \times 10^3$ in $5,234 \times 10^4$, abbiamo scritto il numero prima della potenza 10 volte più piccolo; perciò abbiamo dovuto cambiare anche 10^3 , scrivendolo 10 volte più grande. Analogamente abbiamo

$$\begin{aligned} (4,708 \times 10^{-6}) - (2,1 \times 10^{-8}) &= \\ &= (4,708 - 0,021) \times 10^{-6} = \\ &= 4,687 \times 10^{-6} \end{aligned}$$

Nel cambiare $2,1 \times 10^{-8}$ in $0,021 \times 10^{-6}$, abbiamo diminuito 2,1 di due fattori 10 (cioè $10 \times 10 = 100$ volte) e abbiamo aumentato 10^{-8} di due fattori 10 (100 volte).

Quando moltiplichiamo due numeri, dobbiamo sommare gli esponenti del 10, per tener conto dell'uguaglianza

$$(10^x)(10^y) = 10^{x+y} \quad (\text{A1.2})$$

Per esempio,

$$\begin{aligned} (5,00 \times 10^2)(4,00 \times 10^3) &= (5,00)(4,00) \times 10^{2+3} = \\ &= 20,0 \times 10^5 = 2,00 \times 10^6 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} (3,014 \times 10^3)(8,217 \times 10^{-6}) &= \\ &= (3,014)(8,217) \times 10^{3-6} = 24,77 \times 10^{-3} = \\ &= 2,477 \times 10^{-2} \end{aligned}$$

Per fare una divisione, dobbiamo sottrarre l'esponente del 10 nel numero al denominato-

Se la parte intera di un numero è zero, il numero va scritto come zero, poi la virgola, e poi le cifre decimali. È da evitare l'uso, diffuso nella lingua inglese ma anche in alcune calcolatrici, di omettere lo zero iniziale. Per esempio, si deve scrivere 0,345 e non ,345. La presenza dello zero segnala la virgola che segue, evitando che passi inosservata.

Uno dei modi migliori di investire il vostro tempo è usarlo per imparare a usare bene la vostra calcolatrice, e questo non solo per il corso di chimica generale, ma per tutti i corsi che seguirete. Ricalcolare con la calcolatrice gli esempi che trovate in questa appendice è un buon modo di assicurarvi dell'abilità nel lavorare con i numeri in notazione scientifica.

re dall'esponente del 10 nel numero al numeratore, per tener conto dell'uguaglianza

$$\frac{10^x}{10^y} = 10^{x-y} \quad (\text{A1.3})$$

Per esempio,

$$\begin{aligned} \frac{4,0 \times 10^{12}}{8,0 \times 10^{23}} &= \left(\frac{4,0}{8,0}\right) \times 10^{12-23} \\ &= 0,50 \times 10^{-11} = 5,0 \times 10^{-12} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{2,80 \times 10^{-4}}{4,73 \times 10^{-5}} &= \left(\frac{2,80}{4,73}\right) \times 10^{-4+5} \\ &= 0,592 \times 10^1 = 5,92 \end{aligned}$$

Quando si calcola un logaritmo, $x = \log y$, il numero di cifre decimali di x deve essere uguale al numero di cifre significative di y . Per esempio,

$$\frac{23,780}{3 \text{ cifre decimali}} = \frac{\log 6,02}{3 \text{ cifre significative}} \times 10^{23}$$

Per elevare un numero a una potenza, dobbiamo usare la proprietà che

$$(10^x)^n = 10^{nx} \quad (\text{A1.4})$$

Per esempio,

$$\begin{aligned} (2,187 \times 10^2)^3 &= (2,187)^3 \times 10^{3 \times 2} \\ &= 10,46 \times 10^6 = 1,046 \times 10^7 \end{aligned}$$

Per calcolare una radice di un numero, dobbiamo usare l'uguaglianza

$$\sqrt[n]{10^x} = (10^x)^{1/n} = 10^{x/n} \quad (\text{A1.5})$$

Per poterla usare, si deve esprimere il numero in modo che l'esponente del 10 sia divisibile per l'ordine della radice. Per esempio,

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{2,70 \times 10^{10}} &= (2,70 \times 10^{10})^{1/3} \\ &= (27,0 \times 10^9)^{1/3} \\ &= (27,0)^{1/3} \times 10^{9/3} \\ &= 3,00 \times 10^3 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \sqrt{6,40 \times 10^5} &= (6,40 \times 10^5)^{1/2} = (64,0 \times 10^4)^{1/2} \\ &= (64,0)^{1/2} \times 10^{4/2} = 8,00 \times 10^2 \end{aligned}$$

Oggi tutte queste operazioni si possono fare facilmente con una calcolatrice tascabile o con un computer. Tuttavia è importante che sappiate fare questi calcoli anche a mano, perché spesso una stima veloce dell' "ordine di grandezza" del risultato serve a verificare che le operazioni sono state eseguite correttamente.

A2. Logaritmi decimali

Certamente sapete che $100 = 10^2$, $1000 = 10^3$, e così via. Forse sapete anche che

$$\sqrt{10} = 10^{1/2} = 10^{0,500} = 3,16$$

(dove abbiamo arrotondato la risposta a due cifre decimali).

Se calcoliamo la radice quadrata dei due membri dell'uguaglianza

$$10^{0,500} = 3,16$$

otteniamo che

$$\sqrt{10^{0,500}} = 10^{(1/2)0,500} = 10^{0,250} = \sqrt{3,16} = 1,78$$

Inoltre, poiché

$$(10^x)(10^y) = 10^{x+y}$$

possiamo scrivere

$$10^{0,250} \times 10^{0,500} = 10^{0,750} = (3,16)(1,78) = 5,62$$

Continuando questo procedimento, possiamo esprimere qualsiasi numero y come

$$y = 10^x \quad (\text{A2.1})$$

Il numero x a cui bisogna elevare 10 per ottenere y è chiamato **logaritmo** di y e si scrive

$$x = \log y \quad (\text{A2.2})$$

Si dice che le equazioni A2.1 e A2.2 sono una l'inversa dell'altra. Poiché $10^0 = 1$, abbiamo $\log 1 = 0$. Finora, abbiamo trovato le uguaglianze

$$\begin{aligned} \log 1,00 &= 0,000 \\ \log 1,78 &= 0,250 \\ \log 3,16 &= 0,500 \\ \log 5,62 &= 0,750 \\ \log 10,00 &= 1,0000 \end{aligned}$$

L'ultima riga deriva dal fatto che $10 = 10^1$. Potremmo continuare con questo metodo fino a costruire tutta una tabella di logaritmi decimali, ma questo è stato già fatto da altri. Non solo esistono tavole dei logaritmi molto lunghe, ma ogni calcolatrice tascabile ha un tasto \log che fa la stessa cosa.

Poiché i logaritmi sono esponenti ($y = 10^x$), hanno alcune proprietà specifiche, come

$$\log xy = \log x + \log y \quad (\text{A2.3})$$

$$\log \frac{x}{y} = \log x - \log y \quad (\text{A2.4})$$

$$\log x^n = n \log x \quad (\text{A2.5})$$

$$\log \sqrt[n]{x} = \log x^{1/n} = \frac{1}{n} \log x \quad (\text{A2.6})$$

Se nell'equazione A2.4 poniamo $x = 1$, abbiamo

$$\log \frac{1}{y} = \log(1) - \log y = -\log y$$

ossia

$$\log \frac{1}{y} = -\log y \quad (\text{A2.7})$$

Provate a verificare da soli queste equazioni

Quindi cambiare il segno del logaritmo significa prendere l'inverso del suo argomento.

Torniamo all'equazione A2.1, $y = 10^x$. Se $x = 0$, sarà $y = 1$. Perciò, se $x \geq 0$, sarà $y \geq 1$; e se $x \leq 0$, sarà $y \leq 1$, ossia

$$\begin{aligned} \log y \geq 0 & \quad \text{se } y \geq 1 \\ \log y \leq 0 & \quad \text{se } y \leq 1 \end{aligned} \quad (\text{A2.8})$$

La **Figura A.1** mostra un grafico di $\log y$ rispetto a y , che illustra queste relazioni.

Una caratteristica dei logaritmi che forse non avete mai considerato prima è che non si può calcolare il logaritmo di una grandezza che ha delle unità. Si può calcolare il logaritmo solo di un numero. Non ha senso chiedere qual è il logaritmo di 2,43 grammi. Potete calcolare il logaritmo di 2,43, ma non di 2,43 grammi. Nell'equazione A2.1 né x né y possono avere unità.

Fino a questo punto abbiamo usato l'equazione $y = 10^x$ per trovare il valore di x , conoscendo y . Spesso è necessario trovare il valore di y quando sappiamo x . Poiché x è chiamato logaritmo di y , y è chiamato **antilogaritmo**, o **logaritmo inverso**, di x . Per esempio, l'antilogaritmo di $x = 2$ è $y = 100$. E' meno ovvio che l'antilogaritmo di $x = 6,0969$ è $1,250 \times 10^6$. Potete ottenere quest'ultimo risultato usando la vostra calcolatrice tascabile. Calcolatrici diverse hanno modi diversi di calcolare gli antilogaritmi, quindi dovete trovare come si fa con la vostra.

A3. Logaritmi naturali

I logaritmi che abbiamo discusso nella sezione precedente sono detti **logaritmi decimali**, o **logaritmi in base 10**, perché siamo partiti dall'equazione A2.1, $y = 10^x$, per definire $x = \log y$. In effetti, alcuni preferiscono usare la notazione $x = \log_{10} y$, per evidenziare la base 10. La definizione di pH, la scala Richter dei terremoti, e la scala di decibel dei suoni, più altre ancora, sono tutte espresse in termini di logaritmi decimali. Ma nell'analisi matematica

emergono naturalmente i logaritmi in un'altra base. Questa base è il numero chiamato e , che ha il valore

$$e = 2,71828182846... \quad (\text{A3.1})$$

I logaritmi in questa base, chiamati **logaritmi naturali**, sono indicati con \ln invece di \log . Abbiamo quindi

$$x = \ln y \quad (\text{A3.2})$$

e il suo inverso

$$y = e^x \quad (\text{A3.3})$$

Anche se non avete fatto il corso di analisi matematica, non dovete preoccuparvi: le funzioni $\ln y$ e e^x si trovano su tutte le calcolatrici scientifiche. Per esempio, usando la vostra calcolatrice potete vedere che

$$e^2 = 7,389056...$$

e

$$e^{-2} = 0,135335...$$

Notate che $e^{-2} = 1/e^2$, com'era da aspettarsi. In effetti, le proprietà matematiche di e^x e dei logaritmi naturali sono analoghe a quelle di 10^x e $\log y$. Per esempio,

$$\ln xy = \ln x + \ln y \quad (\text{A3.4})$$

$$\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y \quad (\text{A3.5})$$

$$\ln x^n = n \ln x \quad (\text{A3.6})$$

$$\ln \sqrt[n]{x} = \ln x^{1/n} = \frac{1}{n} \ln x \quad (\text{A3.7})$$

Poiché $e = e^1$, possiamo vedere che $\ln e = 1$, proprio come $\log_{10} 10 = 1$. Poiché $e^0 = 1$, abbiamo $\ln 1 = 0$ e

$$\begin{aligned} \ln y \geq 0 & \quad \text{se } y \geq 1 \\ \ln y \leq 0 & \quad \text{se } y \leq 1 \end{aligned} \quad (\text{A2.8})$$

proprio come nel caso dei logaritmi decimali (Equazioni A2.8). La **Figura A.2** mostra un grafico di $\ln y$ in funzione di y , che illustra queste relazioni.

Le regole per il numero di cifre significative con i logaritmi naturali sono le stesse di quelle coi logaritmi decimali.

Quando si calcola un antilogaritmo, $y = 10^x$, il numero di cifre significative di y deve essere uguale al numero di cifre decimali di x . Per esempio,

$$8,79 \times 10^{-18} = 10^{-17,056}$$

3 cifre decimali 3 cifre significative

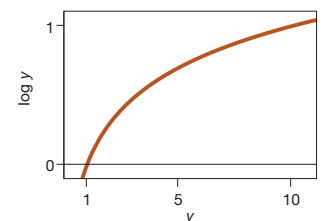


Figura A.1

Grafico del logaritmo decimale di y rispetto a y . Si noti che $\log y$ assume valori positivi per y maggiore di uno e valori negativi per y minore di uno. La curva cresce abbastanza lentamente per y grandi e diminuisce piuttosto velocemente per y piccoli. Attraversa l'asse delle ascisse a $y = 1$ perché $\log 1 = 0$.

ESERCIZIO: Usando la vostra calcolatrice, calcolate i seguenti valori:

- (a) $e^{3,37}$ (b) $\ln(4,07)$
(c) $e^{-6,02}$ (d) $\ln(0,00965)$

Soluzione: (a) 1,4; (b) 1,404; (c) $2,4 \times 10^{-3}$; (d) -4,641

ESERCIZIO: Calcolate il valore di y in (a) $\ln y = 3,065$ e (b) $\ln y = -0,605$.

Soluzione: (a) $y = e^{3,065} = 21,4$; (b) $y = e^{-0,605} = 0,546$

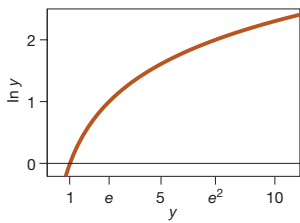


Figura A.2

Grafico del logaritmo naturale di y rispetto a y . Si noti che $\ln y$ assume valori positivi per y maggiore di uno e valori negativi per y minore di uno. La curva cresce abbastanza lentamente per y grandi e diminuisce piuttosto velocemente per y piccoli. Attraversa l'asse delle ascisse a $y = 1$ perché $\ln 1 = 0$.

Qualche volta è necessario trasformare da logaritmi naturali a logaritmi in base 10. Dedichiamo alcune righe a ricavare la relazione tra $\ln y$ e $\log y$. Partiamo da $y = 10^x$ (equazione A2.1) e poniamo $10 = e^a$ (troveremo fra poco il valore di a), in modo da avere

$$y = 10^x = (e^a)^x = e^{ax}$$

Adesso prendiamo \log e \ln di questa equazione scrivendo

$$\log y = x \log 10 = x$$

e

$$\ln y = ax \quad \ln e = ax$$

Sostituendo nella seconda equazione $x = \log y$, abbiamo

$$\ln y = a \log y$$

Possiamo calcolare il valore di a prendendo il \ln di $10 = e^a$ e ottenendo

$$a = \ln 10$$

Usando una calcolatrice, vediamo che

$$a = 2,302585\dots$$

Perciò la relazione fra $\ln y$ e $\log y$ è data da

$$\ln y = 2,303 \log y \quad (\text{A3.9})$$

con quattro cifre significative.

ESERCIZIO: Usando la vostra calcolatrice, verificate che $\ln 120,6 = 2,303 \log 120,6$ con quattro cifre significative.

Soluzione: $\ln 120,6 = 4,7925$ e $2,303 \log 120,6 = 4,7933$. Questi due numeri sono uguali entro quattro cifre significative.

ESERCIZIO: Generalizzate l'equazione A3.9 in

$$(\log_b a) (\log_a y) = \log_b y$$

dove $y = a^x$. Mostrate che questa equazione è in accordo con l'equazione A3.9.

Soluzione: Poniamo $a = b^c$, dove c è una costante da determinare, in modo che

$$y = a^x = b^{cx}$$

Allora,

$$\log_a y = x \log_a a = x$$

e

$$\log_b y = cx \log_b b = cx$$

dove abbiamo usato il fatto che $\log_a a = 1$ e $\log_b b = 1$. Combinando le due espressioni si ottiene

$$\log_b y = cx = c \log_a y$$

Sostituendo $y = a^x$ nel membro di sinistra di questa espressione si ricava

$$x \log_b a = cx$$

Dividendo tutto per x otteniamo

$$\log_b a = c$$

Infine abbiamo

$$\log_b y = c \log_a y = (\log_b a) (\log_a y).$$

Per avere l'equazione A3.9, poniamo semplicemente $b = e$ e $a = 10$.

A4. L'equazione di secondo grado

La forma standard di un'equazione di secondo grado in x è

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (\text{A4.1})$$

dove a , b e c sono costanti. Le due soluzioni dell'equazione di secondo grado sono

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (\text{A4.2})$$

L'equazione A4.2 è chiamata **formula risolutiva dell'equazione di secondo grado**, e si usa per calcolare le soluzioni di un'equazione di secondo grado espressa in forma standard. Per esempio, troviamo le soluzioni dell'equazione di secondo grado

$$2x^2 - 3x - 1 = 0$$

In questo caso, $a = 2$, $b = -3$ e $c = -1$, e l'equazione A4.2 ci dà

$$\begin{aligned} x &= \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - (4)(2)(-1)}}{2(2)} \\ &= \frac{3 \pm 4,123}{4} \\ &= 1,781 \quad \text{e} \quad -0,281 \end{aligned}$$

Notate che per un'equazione di secondo grado si ottengono due soluzioni. Per usare la formula risolutiva, è necessario prima scrivere l'equazione di secondo grado in forma standard, in modo da conoscere i valori delle costanti a , b e c . Per esempio, poniamoci il problema di ricavare x dall'equazione di secondo grado

$$\frac{x^2}{0,50 - x} = 0,040$$

Per individuare le costanti a , b e c , dobbiamo scrivere quest'equazione di secondo grado nella forma standard. Moltiplicando i due membri per $0,50 - x$ si ottiene

$$x^2 = (0,50 - x)(0,040) = 0,020 - 0,040x$$

Eseguendo le operazioni e riordinando si ottiene

$$x^2 + 0,040x - 0,020 = 0$$

Quindi $a = 1$, $b = 0,040$ e $c = -0,020$. Usando l'equazione A4.2, abbiamo

$$x = \frac{-0,040 \pm \sqrt{(0,040)^2 - (4)(1)(-0,020)}}{(2)(1)}$$

da cui calcoliamo

$$\begin{aligned} x &= \frac{-0,040 \pm \sqrt{0,0816}}{2} \\ &= \frac{-0,040 \pm 0,286}{2} \\ &= 0,123 \quad \text{e} \quad -0,163 \end{aligned}$$

Se x rappresenta, per esempio, la concentrazione di una soluzione o la pressione di un gas, l'unico valore possibile fisicamente è $x = 0,123$, perché le concentrazioni e le pressioni non possono avere valori negativi.

Vi ricordate come si ricava l'espressione A4.2? Conviene riscrivere l'equazione A4.1 in modo da farci comparire il quadrato esatto di un'espressione di primo grado in x .

A5. Le approssimazioni successive

Molti problemi sugli equilibri chimici portano a un'equazione di secondo grado della forma

$$\frac{x^2}{M_0 - x} = K \quad (\text{A5.1})$$

dove x è la concentrazione di una certa specie, M_0 è la concentrazione iniziale di qualcosa, e K è una costante, spesso piccola. Per esempio, l'equazione

$$\frac{[A]^2}{0,100 \text{ M} - [A]} = 6,25 \times 10^{-5} \text{ M} \quad (\text{A5.2})$$

potrebbe essere l'equazione della concentrazione della specie A in una certa soluzione (le parentesi quadre intorno ad A indicano la concentrazione). Se il valore di K è piccolo (come in quest'esempio), è più conveniente, invece di usare la formula dell'equazione di secondo grado, risolvere un'equazione del tipo dell'equazione A5.1 col **metodo delle approssimazioni successive**.

Il primo passo, nel metodo delle approssimazioni successive, è di trascurare l'incognita al denominatore nel membro di sinistra dell'equazione A5.2. Questa approssimazione ci permette di calcolare l'incognita semplicemente moltiplicando tutto per la concentrazione iniziale, e calcolando la radice quadrata dei due membri. Facendo questa approssimazione nell'equazione A5.2 si ottiene

$$[A]_1 \approx [(0,100 \text{ M})(6,25 \times 10^{-5} \text{ M})]^{1/2} = 2,50 \times 10^{-3} \text{ M} \quad (\text{A5.3})$$

ESERCIZIO: Risolvete l'equazione

$$\frac{(x + 0,235)x}{x - 0,514} = 2x + 0,174$$

Soluzione: 1,17 e $-0,0765$

In questo risultato abbiamo messo ad $[A]$ un indice 1, perché esso rappresenta una prima approssimazione per il valore di $[A]$. Per ottenere una seconda approssimazione, mettiamo questo valore di $[A]_1$ nel denominatore del membro di sinistra dell'equazione A5.2, calcoliamo la differenza, moltiplichiamo i due membri per il valore del denominatore, e poi calcoliamo la radice quadrata:

$$[A]_2 \approx [(0,100 \text{ M} - 2,50 \times 10^{-3} \text{ M})(6,25 \times 10^{-5} \text{ M})]^{1/2} = 2,47 \times 10^{-3} \text{ M}$$

Ora ripetiamo ancora questo ciclo, chiamato **iterazione**, e otteniamo una terza approssimazione:

$$[A]_3 \approx [(0,100 \text{ M} - 2,47 \times 10^{-3} \text{ M})(6,25 \times 10^{-5} \text{ M})]^{1/2} = 2,47 \times 10^{-3} \text{ M}$$

Osserviamo che $[A]_3 \approx [A]_2$. Quando questo avviene, diciamo che il procedimento è andato a **convergenza**. Arrivati alla convergenza, se si fanno altre iterazioni si otterrà sempre lo

stesso risultato, che è la soluzione dell'equazione originale, perché questo valore, messo al numeratore e al denominatore, verifica l'equazione.

Il metodo delle approssimazioni successive è particolarmente conveniente quando si vuole risolvere rapidamente un'equazione di secondo grado con una calcolatrice tascabile. Per arrivare alla soluzione è necessario di solito fare diverse iterazioni, ma con la calcolatrice ogni ciclo è facile da eseguire, e il lavoro necessario totale è di solito minore di quello per risolvere con la formula risolutiva dell'equazione di secondo grado.

Di solito, dovreste arrivare a convergenza dopo solo poche iterazioni. Se, dopo aver fatto alcune iterazioni, le successive non sembrano avvicinarsi a un valore definito, probabilmente è meglio rinunciare e usare la formula risolutiva esatta.

Ecco alcuni esempi per fare pratica:

- $\frac{x^2}{0,500 - x} = 1,07 \times 10^{-3}$ ($x_1 = 2,31 \times 10^{-2}$, $x_2 = 2,26 \times 10^{-2}$, $x_3 = 2,26 \times 10^{-2}$)
- $\frac{x^2}{0,0100 - x} = 6,80 \times 10^{-4}$ ($x_1 = 2,61 \times 10^{-3}$, $x_2 = 2,24 \times 10^{-3}$, $x_3 = 2,30 \times 10^{-3}$, $x_4 = 2,29 \times 10^{-3}$, $x_5 = 2,29 \times 10^{-3}$)
- $\frac{x^2}{0,150 - x} = 0,0360$ ($x_1 = 7,35 \times 10^{-2}$, $x_2 = 5,25 \times 10^{-2}$, $x_3 = 5,92 \times 10^{-2}$, $x_4 = 5,72 \times 10^{-2}$, $x_5 = 5,78 \times 10^{-2}$, $x_6 = 5,76 \times 10^{-2}$, $x_7 = 5,77 \times 10^{-2}$, $x_8 = 5,77 \times 10^{-2}$)

Anche nell'ultimo caso, che richiede otto iterazioni, è più semplice usare il metodo delle approssimazioni successive che la formula risolutiva generale.

Prepariamo prima una tabella di valori di x e y :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6	8

Il risultato è il grafico della **Figura A.3**. La retta interseca l'asse y a $y = -2$, quindi $b = -2$. La retta ha una pendenza di 2 (sale di 2 unità quando x aumenta di 1), quindi $m = 2$.

Spesso l'equazione da portare in grafico non sembra a prima vista della forma dell'equazione A6.1. Per esempio consideriamo la relazione, data dalla legge di Boyle (Capitolo 13), tra volume e pressione di un gas. Per un campione di 0,29 g di aria a 25°C, la legge di Boyle ci dice che

$$V = \frac{0,244 \text{ L} \cdot \text{atm}}{P} \quad (\text{temperatura costante}) \quad (\text{A6.2})$$

La **Figura A.4** mostra che il grafico di V rispetto a P non è certamente una retta. I dati per questo grafico sono nella **Tabella A.1**. Ma possiamo ugualmente rappresentare

A6. Grafici dei dati

L'occhio e il cervello umano sanno riconoscere facilmente le linee rette, perciò quando si fa il grafico di un'equazione o di dati sperimentali, si cerca sempre di ottenere una linea retta. L'equazione matematica di una retta ha la forma

$$y = mx + b \quad (\text{A6.1})$$

In questa equazione, m e b sono costanti: m è la **pendenza** della retta e b la sua **intercetta** sull'asse y . La pendenza di una retta misura quanto è ripida; è definita come il rapporto fra un qualunque spostamento in verticale e la corrispondente distanza orizzontale.

Costruiamo il grafico della linea retta

$$y = 2x - 2$$

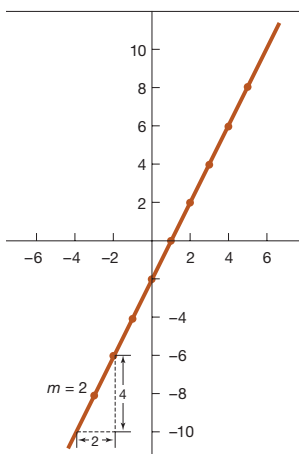


Figura A.3
Grafico dell'equazione $y = 2x - 2$.

l'equazione A6.2 con una retta, se poniamo $V = y$ e $1/P = x$, in modo che l'equazione A6.2 diventi

$$y = cx$$

Quindi se portiamo in grafico V rispetto a $1/P$, e non V rispetto a P , otteniamo una retta. I dati della Tabella A.1 sono riportati come V rispetto a $1/P$ nella Figura A.5.

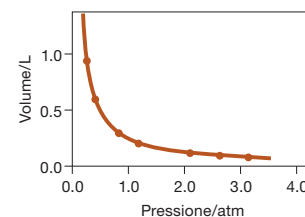


Figura A.4

Grafico del volume di 0,29 g di aria rispetto alla pressione a 25°C. I dati sono quelli della Tabella A.1.

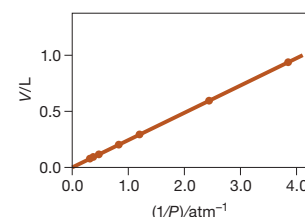


Figura A.5

Grafico del volume di 0,29 g di aria in funzione dell'inverso della pressione, $1/P$, in unità di atm^{-1} a 25°C. È molto più facile operare con linee rette che con altre curve, per cui di solito si preferisce costruire il grafico di equazioni e di dati sotto forma di una retta.

ESEMPIO: Portare in grafico l'equazione

$$\ln(P/\text{Torr}) = -\frac{1640 \text{ K}}{T} + 10.560 \quad (\text{A6.3})$$

come una retta. La grandezza T è la temperatura Kelvin. Consideriamo il logaritmo naturale di P/Torr , che non ha unità perché sono eliminate da $/\text{Torr}$. Per esempio, $123 \text{ Torr}/\text{Torr} = 123$.

Soluzione: Confrontando l'equazione A6.3 con la A6.1, vediamo che possiamo porre

$$y = \ln(P/\text{Torr})$$

e

$$x = \frac{1}{T}$$

e questo suggerisce che otterremo una retta se riportiamo $\ln(P/\text{Torr})$ rispetto a $1/T$. La Tabella A.2 mostra i risultati numerici e la Figura A.6 mostra il grafico di $\ln(P/\text{Torr})$ in funzione di $1/T$.

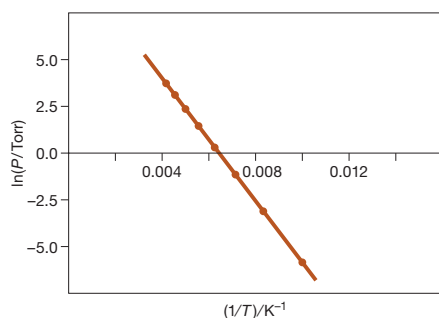


Figura A.6

Grafico di $\ln(P/\text{Torr})$ in funzione di $1/T$ (in unità di K^{-1}) dall'equazione A6.3.

Tabella A.1

Dati di pressione-volume per 0,29 g di aria a 25°C

P/atm	V/L	$(1/P)\text{atm}^{-1}$
0,26	0,938	3,85
0,41	0,595	2,44
0,83	0,294	1,20
1,20	0,203	0,83
2,10	0,116	0,48
2,63	0,093	0,38
3,14	0,078	0,32

Tabella A.2

Risultati numerici per costruire il grafico dell'equazione A6.3 come una retta

T/K	$(1/T)/\text{K}^{-1}$	$\ln(P/\text{Torr})$
100	0,0100	-5,84
120	0,00833	-3,11
140	0,00714	-1,15
160	0,00625	0,31
180	0,00556	1,45
200	0,00500	2,36
220	0,00455	3,11
240	0,00417	3,73

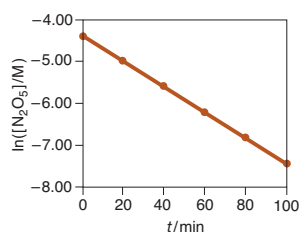
**Figura A.7**

Grafico di $\ln([N_2O_5]/M)$ rispetto al tempo, t , in minuti, per la decomposizione di $N_2O_5(g)$. Il grafico è una retta.

Certi programmi per computer e anche alcune calcolatrici sanno trovare automaticamente la migliore retta interpolante, usando una tecnica matematica chiamata regressione lineare.

ESEMPIO: $N_2O_5(g)$ si decompone spontaneamente in $NO_2(g)$ e $O_2(g)$.

(a) Fate un grafico dei seguenti dati, logaritmo naturale della concentrazione di $N_2O_5(g)$ in un recipiente di reazione, in funzione del tempo.

t/min	$\ln([N_2O_5]/M)$
0	-4,39
20,0	-4,99
40,0	-5,60
60,0	-6,21
80,0	-6,81
100,0	-7,42

(b) Trovate l'equazione della retta che descrive l'andamento nel tempo di questa reazione.

Soluzione: (a) La **Figura A.7** mostra che il grafico di $\ln([N_2O_5]/M)$ rispetto a t è una retta.

(b) L'equazione della retta è

$$\ln([N_2O_5]/M) = mt + b \quad (\text{A6.4})$$

Per completare la scrittura di questa equazione, dobbiamo determinare il valore della pendenza, m , e dell'intercetta, b . Per trovare il valore di m , scegliamo due punti alle estremità della retta interpolante per i dati nel grafico. La **retta interpolante** è una retta che passa il più vicino possibile al maggior numero di punti del grafico. Nel nostro caso i punti sono bene allineati (Figura A.7), per cui sceglieremo semplicemente il primo e l'ultimo punto per calcolare la pendenza, m , che sarà data da

$$m = \frac{(-7,42) - (-4,39)}{(100 - 0) \text{ min}} = -0,0303 \text{ min}^{-1}$$

Sostituendo questo valore per la pendenza nell'equazione A6.4 si ottiene

$$\ln([N_2O_5]/M) = (-0,0303 \text{ min}^{-1})t + b$$

Per trovare il valore dell'intercetta, b , scegliamo uno dei punti, per esempio quello con $t = 0$ e $\ln([N_2O_5]/M) = -4,39$, e sostituiamo questi valori nell'equazione ottenendo

$$-4,39 = (-0,0303 \text{ min}^{-1})(0 \text{ min}) + b$$

da cui calcoliamo che

$$b = -4,39$$

Quindi l'equazione della retta che descrive l'andamento nel tempo della reazione è

$$\ln([N_2O_5]/M) = (-0,0303 \text{ min}^{-1})t - 4,39$$