e integrando:

$$-\frac{1}{2b}\ln\left(a-by^2\right)=t+c$$

B.6.3. Equazioni lineari del primo ordine del tipo $\frac{dy}{dt}=f(t)y+g(t)$

Si moltiplicano ambo i membri per il fattore $e^{-\int f(t)\mathrm{d}t}$:

$$\underbrace{e^{-\int f(t)\mathrm{d}t}\left[\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-f(t)y\right]}=e^{-\int f(t)\mathrm{d}t}g(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[ye^{-\int f(t)\mathrm{d}t}\right]=g(t)e^{-\int f(t)\mathrm{d}t}$$

Integrando ambo i membri si ha:

$$ye^{-\int f(t)\mathrm{d}t}=c+\int g(t)e^{-\int f(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}t,\qquad \text{da cui}$$

$$y=e^{\int f(t)\mathrm{d}t}\left[c+\int g(t)e^{-\int f(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}t\right]$$

Caso particolare: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+ay=bt$ con a e b costanti

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-ay+bt,\ \text{per cui: } f(t)=-a,\quad g(t)=bt$$

$$\int f(t)\mathrm{d}t=-\int a\mathrm{d}t=-at\quad\rightarrow\quad e^{\int f(t)\mathrm{d}t}=e^{-at}$$

$$y=e^{-at}\left[c+\int bte^{at}\mathrm{d}t\right]=ce^{-at}+be^{-at}\int te^{at}\mathrm{d}t=$$

$$=ce^{-at}+be^{-at}\left[e^{at}\left(\frac{t}{a}-\frac{1}{a^2}\right)\right]=$$

$$=ce^{-at}+\frac{b}{a}\left(t-\frac{1}{a}\right)$$

Equazioni lineari omogenee del secondo ordine a coefficienti costanti

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+2a\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+by=0\ \text{ con } a \text{ e } b \text{ costanti reali}$$

Si dimostra facilmente che la funzione $y=e^{mt}$ è soluzione dell'equazione differenziale purché:

$$m^2+2am+b=0\ \text{ (equazione algebrica associata)}$$

Dette m_1 ed m_2 le due soluzioni dell'equazione algebrica, la soluzione generale dell'equazione differenziale è: