B.7.2. Equazioni del primo ordine a variabili separabili

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=f(t)g(y)$$

da cui separando le variabili (y al primo membro; t al secondo):

$$\frac{\mathrm{d}y}{g(y)}=f(t)\mathrm{d}t$$

che può essere risolta per quadratura, cioè integrando entrambi i membri:

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{g(y)}=\int f(t)\mathrm{d}t$$

Ad esempio, l'equazione

$$y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=a-by^2$$

si risolve separando la variabile y al primo membro e la variabile indipendente t al secondo:

$$\frac{y\mathrm{d}y}{a-by^2}=\mathrm{d}t$$

da cui:

$$-\frac{1}{2b}\frac{\mathrm{d}\left(a-by^2\right)}{\left(a-by^2\right)}=\mathrm{d}t$$

e integrando:

$$-\frac{1}{2b}\ln\left(a-by^2\right)=t+c$$

B.7.3. Equazioni lineari del primo ordine del tipo $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=f(t)y+g(t)$

Si moltiplicano ambo i membri per il fattore $e^{-\int f(t)\mathrm{d}t}$:

$$\underbrace{e^{-\int f(t)\mathrm{d}t}\left[\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-f(t)y\right]}=e^{-\int f(t)\mathrm{d}t}g(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[ye^{-\int f(t)\mathrm{d}t}\right]=g(t)e^{-\int f(t)\mathrm{d}t}$$

Integrando ambo i membri si ha:

$$ye^{-\int f(t)\mathrm{d}t}=c+\int g(t)e^{-\int f(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}t,\qquad \text{da cui}$$

$$y=e^{\int f(t)\mathrm{d}t}\left[c+\int g(t)e^{-\int f(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}t\right]$$

 ISBN 978-88-08-18649-2

Caso particolare: $\frac{dy}{dt} + ay = bt$ con a e b costanti

$$\frac{dy}{dt} = -ay + bt, \text{ per cui: } f(t) = -a, \quad g(t) = bt$$

$$\int f(t)dt = -\int a dt = -at \quad \rightarrow \quad e^{\int f(t)dt} = e^{-at}$$

$$y = e^{-at}\left[c + \int bte^{at}dt\right] = ce^{-at} + be^{-at}\int te^{at}dt =$$

$$= ce^{-at} + be^{-at}\left[e^{at}\left(\frac{t}{a} - \frac{1}{a^2}\right)\right] =$$

$$= ce^{-at} + \frac{b}{a}\left(t - \frac{1}{a}\right)$$

B.7.4. Equazioni lineari omogenee del secondo ordine a coefficienti costanti

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2a\frac{dy}{dt} + by = 0 \text{ con } a \text{ e } b \text{ costanti reali}$$

Si dimostra facilmente che la funzione $y = e^{mt}$ è soluzione dell'equazione differenziale purché:

$$m^2 + 2am + b = 0 \text{ (equazione algebrica associata)}$$

Dette m_1 ed m_2 le due soluzioni dell'equazione algebrica, la soluzione generale dell'equazione differenziale è:

$$y(t) = c_1e^{m_1t} + c_2e^{m_2t}$$

dove c_1 e c_2 sono due costanti arbitrarie (tante quanto è l'ordine dell'equazione differenziale).

Poiché

$$m_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2 - b}$$

si possono avere tre possibilità:

1. $a^2 > b$, e quindi due radici reali dell'equazione algebrica;
2. $a^2 = b$, e quindi una sola radice reale; la soluzione è in questo caso:

$$y(t) = e^{-at}(c_1 + c_2)$$

3. $a^2 < b$, e quindi radici complesse. Detto $a^2 - b = -n^2$, si ha:

$$y(t) = e^{-at}\left(c_1e^{int} + c_2e^{-int}\right)$$

ovvero:

$$y(t) = e^{-at}(A\cos nt + B\,\mathrm{sen}\,nt)$$

dove A e B sono due costanti arbitrarie.