

e integrando:

$$-\frac{1}{2b}\ln(a-by^2) = t + c$$

B.6.3. Equazioni lineari del primo ordine

del tipo $\frac{dy}{dt} = f(t)y + g(t)$

Si moltiplicano ambo i membri per il fattore $e^{-\int f(t)dt}$:

$$e^{-\int f(t)dt} \left[\frac{dy}{dt} - f(t)y \right] = e^{-\int f(t)dt} g(t)$$

$$\frac{d}{dt} \left[ye^{-\int f(t)dt} \right] = g(t)e^{-\int f(t)dt}$$

Integrando ambo i membri si ha:

$$ye^{-\int f(t)dt} = c + \int g(t)e^{-\int f(t)dt} dt, \quad \text{da cui}$$

$$y = e^{\int f(t)dt} \left[c + \int g(t)e^{-\int f(t)dt} dt \right]$$

Caso particolare: $\frac{dy}{dt} + ay = bt$ con a e b costanti

$$\frac{dy}{dt} = -ay + bt, \text{ per cui: } f(t) = -a, \quad g(t) = bt$$

$$\int f(t)dt = -\int a dt = -at \quad \rightarrow \quad e^{\int f(t)dt} = e^{-at}$$

$$y = e^{-at} \left[c + \int bte^{at} dt \right] = ce^{-at} + be^{-at} \int te^{at} dt =$$

$$= ce^{-at} + be^{-at} \left[e^{at} \left(\frac{t}{a} - \frac{1}{a^2} \right) \right] =$$

$$= ce^{-at} + \frac{b}{a} \left(t - \frac{1}{a} \right)$$

B.6.4. Equazioni lineari omogenee del secondo ordine a coefficienti costanti

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2a\frac{dy}{dt} + by = 0 \quad \text{con } a \text{ e } b \text{ costanti reali}$$

Si dimostra facilmente che la funzione $y = e^{mt}$ è soluzione dell'equazione differenziale purché:

$$m^2 + 2am + b = 0 \quad (\text{equazione algebrica associata})$$

Dette m_1 ed m_2 le due soluzioni dell'equazione algebrica, la soluzione generale dell'equazione differenziale è: