14.3

(a) Con la formula di Eulero:

$$f(t) = t\ sen(t) = t\left(\frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j}\right) = \frac{1}{2j}\left(te^{jt} - te^{-jt}\right)$$

La trasformata di Laplace è

$$\mathbf{F}(s) = \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{(s-j)^2} - \frac{1}{(s+j)^2}\right) = \frac{1}{2j}\left(\frac{4sj}{(s^2-j^2)^2}\right) = \frac{2s}{(s^2+1)^2}$$

(d) $f(t) = 8u(t-4)sen[5(t-4)]$= 8 g(t-4) u(t-4)

$$g(t) = sen(5t) \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{G}(s) = \frac{5}{s^2+25}$$

$$\mathbf{F}(s) = 8\mathbf{G}(s)e^{-4s} = \frac{40e^{-4s}}{s^2+25}$$

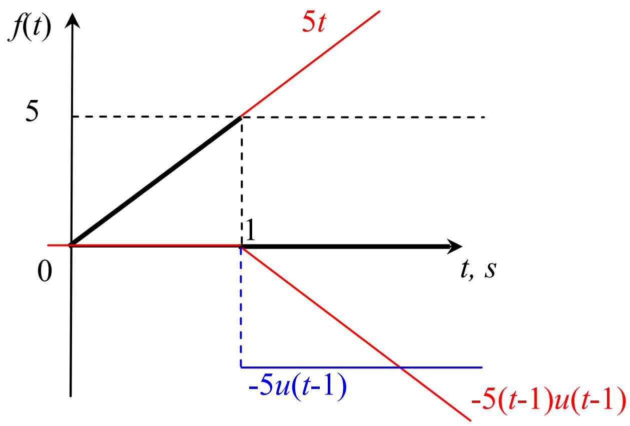
(e) $f(t) = g(t-1)u(t-1)$

$$g(t) = t + e^{-t} \quad \Rightarrow \qquad \mathbf{G}(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s+1}$$

$$\mathbf{F}(s) = \frac{e^{-s}}{s^2} + \frac{e^{-s}}{s+1}$$

14.5

La funzione f(t) si ottiene come addizione di tre funzioni elementari (figura seguente). La funzione -5(t-1) u(t-1) è la rampa -5t traslata in ritardo di un secondo e moltiplicata per il gradino u(t-1). Si noti che la somma dei primi due termini vale 5 per t >1; è necessario sottrarre tale valore per ottenere la funzione desiderata.



Analiticamente:

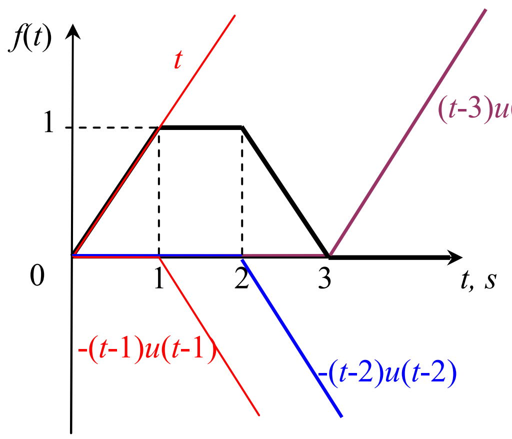
$$f(t) = 5t - 5(t-1)u(t-1) - 5u(t-1)$$

Trasformando i singoli termini si ottiene:

$$\mathbf{F}(s) = \frac{5}{s^2} - \frac{5}{s^2}e^{-s} - \frac{5}{s}e^{-s}$$

14.6

La funzione *f*(*t*) può essere ottenuta come addizione di quattro funzioni a rampa, opportunamente traslate e moltiplicate per una funzione gradino (figura seguente).



Analiticamente abbiamo la seguente espressione:

$$f(t) = t - (t-1)u(t-1) - (t-2)u(t-2) + (t-3)u(t-3)$$

La trasformata è $$\mathbf{F}(s) = \frac{1}{s^2}(1 - e^{-s} - e^{-2s} + e^{-3s})$$

14.10

La funzione in figura è la composizione di tre gradini:

$$f(t) = \frac{1}{\Delta^2}u(t) - \frac{2}{\Delta^2}u(t-\Delta) + \frac{1}{\Delta^2}u(t-2\Delta)$$

La trasformata è:

$$\mathbf{F}(s) = \frac{1}{\Delta^2}\frac{1}{s} - \frac{2}{\Delta^2}\frac{1}{s}e^{-s\Delta} + \frac{1}{\Delta^2}\frac{1}{s}e^{-s2\Delta} = \frac{1}{s\Delta^2}\left(1 - 2e^{-s\Delta} + e^{-s2\Delta}\right)$$

Calcolando il limite di **F**(s) per Δ→0 si ottiene una forma indeterminata. Applicando due volte la regola di De L'Hôpital si ricava:

$$\lim_{\Delta\to 0}\mathbf{F}(s) = \lim_{\Delta\to 0}\frac{2se^{-s\Delta} - 2se^{-s2\Delta}}{2\Delta s} = \lim_{\Delta\to 0}\frac{e^{-s\Delta} - e^{-s2\Delta}}{\Delta}$$

$$= \lim_{\Delta\to 0}\frac{-se^{-s\Delta} + 2se^{-s2\Delta}}{1} = s$$

14.13

(e) Il polinomio $s^3+9s^2+23s+15$ ha la radice -1; dividendo il polinomio per (s+1) si ottiene $s^2+8s+15=(s+3)(s+5)$. I poli sono dunque: -1, -3, -5. Lo sviluppo in frazioni parziali è

$$\mathbf{F}(s)=\frac{A}{s+1}+\frac{B}{s+3}+\frac{C}{s+5}$$

$$A=\left.\frac{s+2}{s^2+8s+15}\right|_{s=-1}=\frac{1}{8}\qquad B=\left.\frac{s+2}{(s+1)(s+5)}\right|_{s=-3}=\frac{1}{4}\qquad C=\left.\frac{s+2}{(s+1)(s+3)}\right|_{s=-5}=-\frac{3}{8}$$

L'antitrasformata è: $f(t)=0.125\,e^{-t}+0.25\,e^{-3t}-0.375\,e^{-5t}$

14.14

(c) Il polinomio $3s^3+12s^2+15s+6$ ha la radice -1; dividendo il polinomio per (s+1) si ottiene $3s^2+9s+6=3(s+1)(s+2)$. I poli sono dunque: -1 (molt. 2), -2. Lo sviluppo in frazioni parziali è

$$\mathbf{F}(s)=\frac{A}{(s+1)^2}+\frac{B}{s+1}+\frac{C}{s+2}$$

$$A=\left.\frac{s^2+3s+1}{3(s+2)}\right|_{s=-1}=-\frac{1}{3}\qquad B=\frac{d}{ds}\left.\frac{s^2+3s+1}{3(s+2)}\right|_{s=-1}=\left.\frac{(2s+3)(s+2)-(s^2+3s+1)}{3(s+2)^2}\right|_{s=-1}=\frac{2}{3}$$

$$C=\left.\frac{s^2+3s+1}{3(s+1)^2}\right|_{s=-2}=-\frac{1}{3}$$

L'antitrasformata è: $f(t)=-(1/3)\,t\,e^{-t}+(2/3)\,e^{-t}-(1/3)\,e^{-2t}$

14.15

(c) La funzione **F**(s) ha un polo triplo in s=0 e due poli complessi: $s_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lo sviluppo in frazioni parziali è:

$$\mathbf{F}(s)=\frac{A}{s^3}+\frac{B}{s^2}+\frac{C}{s}+\frac{D}{s-s_1}+\frac{D^*}{s-s_2}$$

$$A=\left.\frac{s^2+2s+1}{s^2+s+1}\right|_{s=0}=1\qquad B=\frac{d}{ds}\left.\frac{s^2+2s+1}{s^2+s+1}\right|_{s=0}=\left.\frac{1-s^2}{(s^2+s+1)^2}\right|_{s=0}=1$$

$$C=\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left.\frac{1-s^2}{(s^2+s+1)^2}\right|_{s=0}=-1$$

$$D = \left.\frac{s^2+2s+1}{s^3(s-s_2)}\right|_{s=s_1} = \frac{-1+j\sqrt{3}}{2j\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\angle -60° + 180° - 90° = \frac{1}{\sqrt{3}}\angle 30°$$

$$f(t) = \frac{t^2}{2} + t - 1 + \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-t/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t + 30°\right)$$

14.18
(a)

$$\mathbf{F}(s) = \frac{s^3 + 3s^2 - 4s}{s+1}$$

Dividendo il polinomio a numeratore per s+1 si ottiene come risultato il polinomio $s^2 + 2s - 6$ con il resto di 6. Quindi

$$\mathbf{F}(s) = s^2 + 2s - 6 + \frac{6}{s+1}$$

(b)
Dividendo $2s^3$ per s^2+2 si ottiene 2s con il resto -4s. Quindi

$$\mathbf{F}(s) = 2s - \frac{4s}{s^2+2}$$

Inoltre

$$\frac{4s}{s^2+2} = \frac{4s}{(s-j\sqrt{2})(s+j\sqrt{2})} = \frac{A}{s-j\sqrt{2}} + \frac{A^*}{s+j\sqrt{2}} \qquad \text{dove} \quad A = \frac{4(j\sqrt{2})}{j\sqrt{2}+j\sqrt{2}} = 2$$

quindi $$\mathbf{F}(s) = 2s - \frac{2}{s-j\sqrt{2}} - \frac{2}{s+j\sqrt{2}}$$

(c)

$$\mathbf{F}(s) = \frac{s(s^2+s+1)+s^2}{s^2+s+1} = s + \frac{s^2}{s^2+s+1} = s + \frac{s^2+s+1-s-1}{s^2+s+1} = s+1-\frac{s+1}{s^2+s+1}$$

L'ultimo termine è una funzione propria con il seguente sviluppo in frazioni parziali:

$$\frac{s+1}{(s-s_1)(s-s_1^*)} = \frac{A}{s-s_1} + \frac{A^*}{s-s_1^*} \qquad \text{dove } s_1 = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$A = \frac{s_1+1}{s_1-s_1^*} = \frac{1+j\sqrt{3}}{2j\sqrt{3}} = \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{6}$$

Infine

$$\mathbf{F}(s) = s + 1 - \frac{0.5 - j\sqrt{3}/6}{s+0.5-j\sqrt{3}/2} - \frac{0.5+j\sqrt{3}/6}{s+0.5+j\sqrt{3}/2}$$

14.19

(a) $$\mathbf{F}(s) = \frac{2(s^2+1)-3}{s^2+1} = 2 - \frac{3}{s^2+1} \qquad \Rightarrow \qquad f(t) = 2\,\delta(t) - 3\,\mathrm{sen}(t)$$

(b) $$\mathbf{F}(s) = \frac{(s+1)^2-2s}{(s+1)(s+2)} = \frac{s+1}{s+2} - \frac{2s}{(s+1)(s+2)} = \frac{s+2-1}{s+2} - \frac{2s}{(s+1)(s+2)}$$

$$= 1 - \frac{1}{s+2} - \frac{2s}{(s+1)(s+2)} = 1 - \frac{1}{s+2} - \left(\frac{-2}{s+1} + \frac{4}{s+2}\right)$$

Quindi

$$\mathbf{F}(s) = 1 - \frac{5}{s+2} + \frac{2}{s+1} \qquad \Rightarrow \qquad f(t) = \delta(t) - 5\,e^{-2t} + 2\,e^{-t}$$

(c) Dividendo il polinomio a numeratore per il denominatore si ottiene:

$$\mathbf{F}(s) = 1 - \frac{9s^2+21s+15}{s^3+9s^2+23s+15} = 1 - \mathbf{G}(s)$$

La funzione **G**(s) è propria con tre poli reali: -1, -3, -5. Sviluppando in frazioni parziali:

$$\mathbf{G}(s) = \frac{3/8}{s+1} - \frac{33/4}{s+3} + \frac{135/8}{s+5}$$

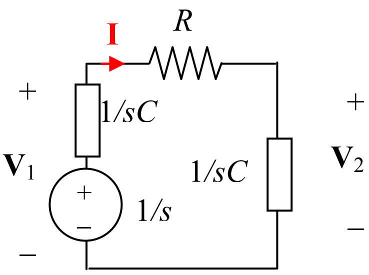
Infine:

$$f(t) = \delta(t) - 0.375\,e^{-t} + 8.25\,e^{-3t} - 16.875\,e^{-5t}$$

14.20

La corrente della maglia si ricava con la LKT:

$$\mathbf{I} = \frac{\frac{1}{s}}{R + \frac{2}{sC}} = \frac{1}{R}\,\frac{1}{s + \frac{2}{RC}}$$



Quindi:

$$\mathbf{V}_1 = -\frac{\mathbf{I}}{sC} + \frac{1}{s} = \frac{1}{s} - \frac{1}{RC}\,\frac{1}{s\left(s + \frac{2}{RC}\right)} = \frac{1/2}{s} + \frac{1/2}{s + \frac{2}{RC}}$$

$$\mathbf{V}_2 = \frac{\mathbf{I}}{sC} = \frac{1}{RC}\,\frac{1}{s\left(s + \frac{2}{RC}\right)} = \frac{1/2}{s} - \frac{1/2}{s + \frac{2}{RC}}$$

$v_1(t) = \frac{1}{2}\,(1 + e^{-2t/(RC)})$ V $\qquad$ $v_2(t) = \frac{1}{2}\,(1 - e^{-2t/(RC)})$ V

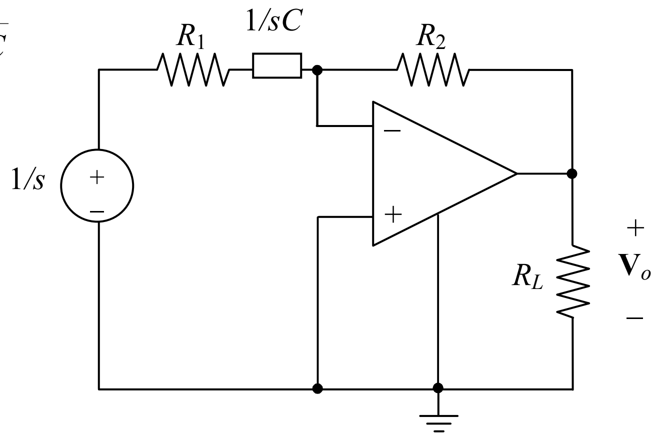
$W(0) = \frac{1}{2}\,C\,(v_1(0))^2 = \frac{1}{2}\,C$ $\qquad$ $W(\infty) = \frac{1}{2}\,C\,(v_1(\infty))^2 + \frac{1}{2}\,C\,(v_2(\infty))^2 = \frac{1}{4}\,C$

14.21

Lo schema corrisponde all'amplificatore invertente, quindi possiamo scrivere

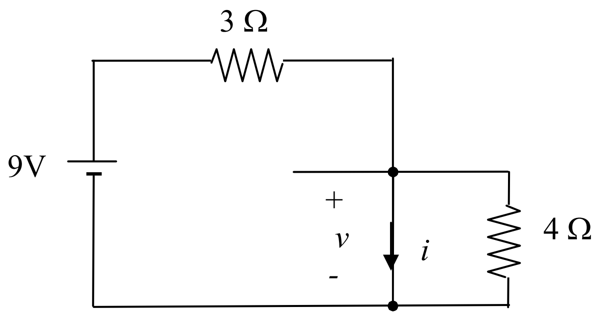
$$\mathbf{V}_o(s) = -\frac{1}{s}\,\frac{R_2}{R_1 + \dfrac{1}{sC}} = -\frac{R_2 C}{1 + R_1 C s} = -\frac{R_2 / R_1}{s + \dfrac{1}{R_1 C}}$$

$$v_o(t) = -\frac{R_2}{R_1} e^{-t/(R_1 C)}$$



14.22

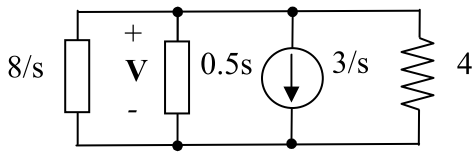
Condizioni iniziali. Circuito per $t = 0^-$



$v = 0$

$i = 9/3 = 3$ A (il resistore da 4 Ω è cortocircuitato).

Circuito simbolico per $t > 0$ (la batteria non ha effetto perché è scollegata).



Applicando la LKC si scrive l'equazione:

$$\frac{s}{8}\mathbf{V} + \frac{\mathbf{V}}{0.5s} + \frac{3}{s} + \frac{\mathbf{V}}{4} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{V}(s) = \frac{-24}{s^2 + 2s + 16}$$

Poli:

$$s_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 64}}{2} = -1 \pm j\sqrt{15}$$

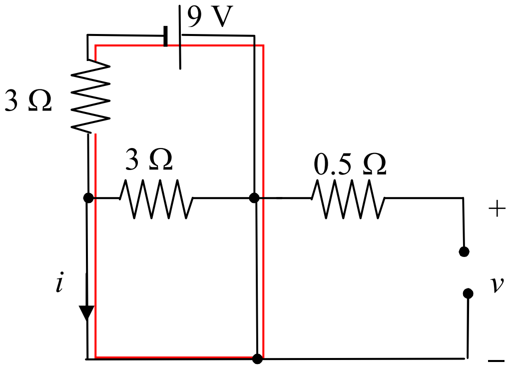
Residui:

$$\mathbf{A} = \frac{-24}{(s_1 - s_1^*)} = \frac{-12}{j\sqrt{15}} = j\frac{12}{\sqrt{15}}, \ \mathbf{A}^*$$

Antitrasformata: $$v(t) = \frac{24}{\sqrt{15}} e^{-t} \cos(\sqrt{15}t + \pi/2) = -\frac{24}{\sqrt{15}} e^{-t} sen(\sqrt{15}t) \ \text{V}$$

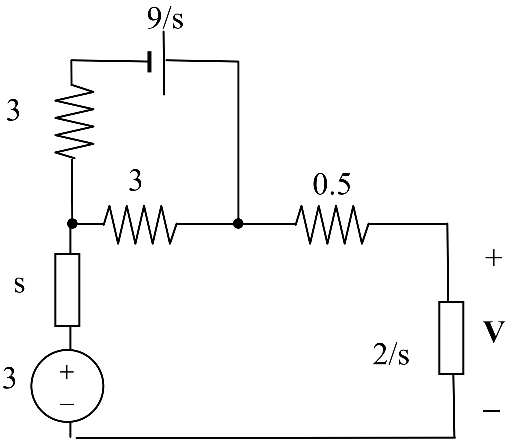
14.23

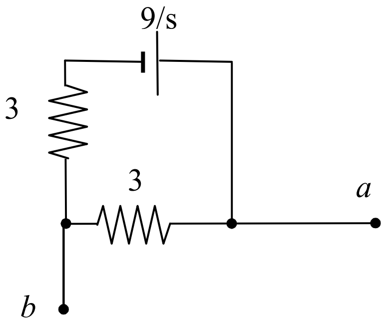
Condizioni iniziali. Circuito in $t = 0^{-}$.



Il resistore da 0.5 Ω non è percorso da corrente quindi $v = 0$.
Il resistore da 3 Ω orizzontale è cortocircuitato. La corrente scorre nel percorso evidenziato in rosso: $i = -9/3 = -3$ A.

Circuito simbolico per $t > 0$ (figura seguente a sinistra).

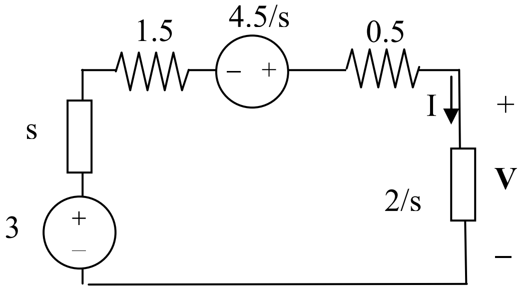




Conviene applicare il teorema di Thevenin al bipolo mostrato nella figura a destra:

$$\mathbf{V}_{ab} = \tfrac{1}{2}\,(9/s) = 4.5/s \qquad\qquad R_{eq} = 1.5\ \Omega$$

Inserendo il bipolo di Thevenin si ottiene lo schema seguente.



Con la LKT:

$$\mathbf{I} = \frac{3+\dfrac{4.5}{s}}{2+s+\dfrac{2}{s}} = \frac{3s+4.5}{s^2+2s+2} \Rightarrow \qquad \mathbf{V} = \frac{2(3s+4.5)}{s(s^2+2s+2)}$$

Poli: $s = 0,\ s_{1,2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = -1 \pm j$

Residui: A = 4.5

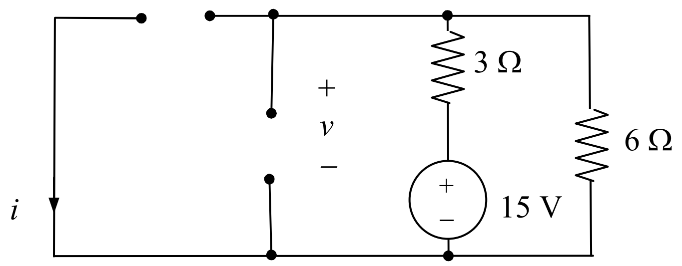
$$B = \frac{2(3(-1+j)+4.5)}{(-1+j)2j} = -\frac{3+6j}{2+2j} = 2.37\angle 198°$$

$$v(t) = 4.5 + 4.74\ e^{-t}\cos(t + 198°)\ \text{V}$$

14.24

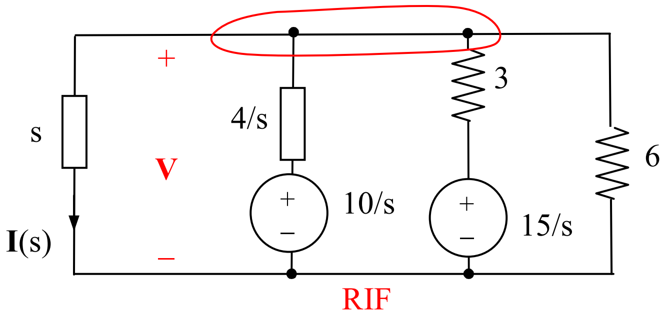
Ricaviamo le condizioni iniziali con riferimento al circuito equivalente in regime costante per $t = 0^{-}$ (figura seguente). La corrente i è nulla. La tensione v può essere ottenuta applicando la formula del partitore di tensione:

$$v = 15 \times 6/9 = 10\ \text{V}$$



Il circuito simbolico è riportato sotto. Utilizzando l'analisi nodale si scrive l'equazione:

$$\mathbf{V}/s + (\mathbf{V}-10/s)\ s/4 + (\mathbf{V}-15/s)/3 + \mathbf{V}/6 = 0$$



Soluzione:

$$\mathbf{V} = \frac{10s+20}{s^2+2s+4} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{s} = \frac{10s+20}{s(s^2+2s+4)}$$

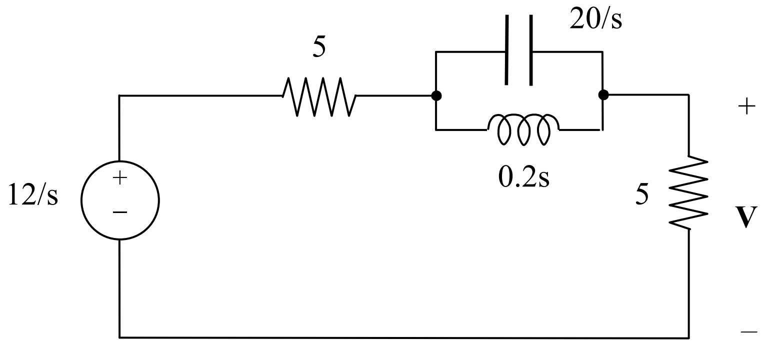
I poli sono s = 0 e $s_{1,2} = -1 \pm j\sqrt{3}$; il residuo del polo nell'origine è A = 20/4 = 5; il residuo di s_1 è

$$B = -\frac{5(1+j\sqrt{3})}{3+j\sqrt{3}} = \frac{5}{\sqrt{3}}\angle -150°$$

Infine $$i(t) = 5 + \frac{10}{\sqrt{3}} e^{-t} \cos(\sqrt{3}\, t - 150°) \text{ A}$$

14.25

Circuito simbolico.



Il parallelo L//C ha impedenza:

$$\mathbf{Z}(s) = \frac{0{,}2s \times \frac{20}{s}}{0{,}2s + \frac{20}{s}} = \frac{4s}{0{,}2s^2 + 20}$$

Con la formula del partitore di tensione:

$$\mathbf{V}(s) = \frac{12}{s} \frac{5}{10 + \frac{4s}{0{,}2s^2 + 20}} = \frac{(0{,}2s^2 + 20)60}{s(2s^2 + 4s + 200)} = \frac{6(s^2 + 100)}{s(s^2 + 2s + 100)}$$

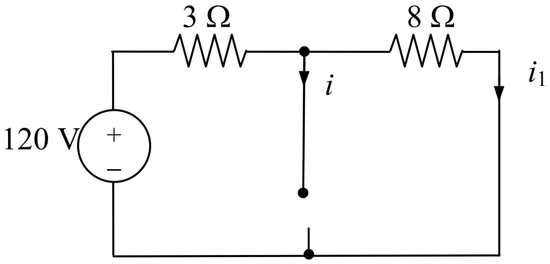
Poli: $s_{1,2} = -1 \pm j\sqrt{99}$ $\qquad s_3 = 0$

Residui: $A_1 = \dfrac{6\left[\left(-1 + j\sqrt{99}\right)^2 + 100\right]}{\left(-1 + j\sqrt{99}\right) 2j\sqrt{99}} = \dfrac{j6}{\sqrt{99}} \cong 0{,}6\angle\, 90°$ $\qquad A_3 = 6$

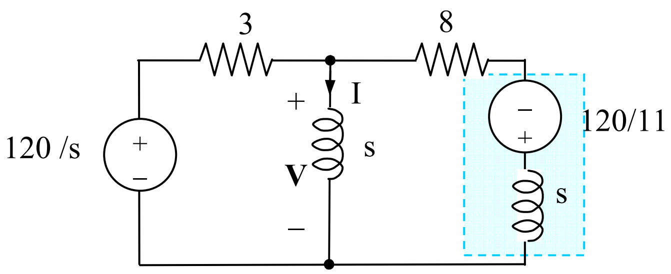
Antitrasformata: $v(t) = 6 - 1{,}2e^{-t} sen(\sqrt{99}t)$ V

14.26

Condizioni iniziali. Dal circuito equivalente per $t = 0^-$ (figura seguente) si ricava: $i = 0$, $i_1 = 120/11$ A.



Circuito simbolico.



Con la formula di Millman:

$$\mathbf{V} = \frac{\frac{120}{s}\frac{1}{3} - \frac{120}{11}\frac{1}{8+s}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{s}+\frac{1}{8+s}} = \frac{\frac{440(8+s)-120s}{11s(8+s)}}{\frac{s(8+s)+3(8+s)+3s}{3s(8+s)}} = \frac{3[3520+320s]}{11[s^2+14s+24]}$$

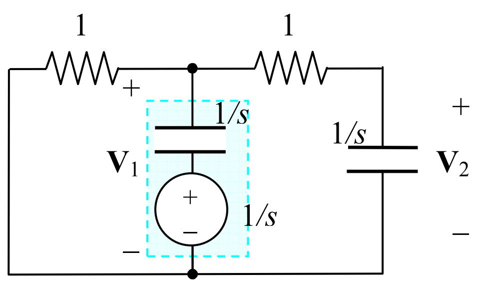
$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{s} = \frac{3[3520+320s]}{11s[s^2+14s+24]} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+12}$$

$$A = \frac{3(3520)}{11(24)} = 40 \qquad B = \frac{3(3520-640)}{11(-2)(-2+12)} = -39{,}27 \qquad C = \frac{3(3520-3840)}{11(-12)(-12+2)} = -0{,}73$$

$$i(t) = -\,39{,}27\ e^{-2t} - 0{,}73\ e^{-12t} + 40,\ \mathrm{A}$$

14.27

Circuito simbolico.



Con la formula di Millman:

$$\mathbf{V}_1 = \frac{(1/s)s}{1+s+\frac{1}{1+1/s}} = \frac{s+1}{(s+1)^2+s} = \frac{s+1}{s^2+3s+1} = \frac{A}{s-s_1} + \frac{B}{s-s_2}$$

Poli:

$$s_{1,2} = -1{,}5 \pm 0{,}5\sqrt{5} \cong -\,0{,}38;\ -2{,}62$$

Residui:

$$A = \frac{-0{,}5+0{,}5\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \cong 0{,}276 \qquad B = \frac{0{,}5+0{,}5\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \cong 0{,}724$$

Antitrasformata:

$$v_1(t) = 0{,}276e^{-0{,}38t} + 0{,}724e^{-2{,}62t}$$

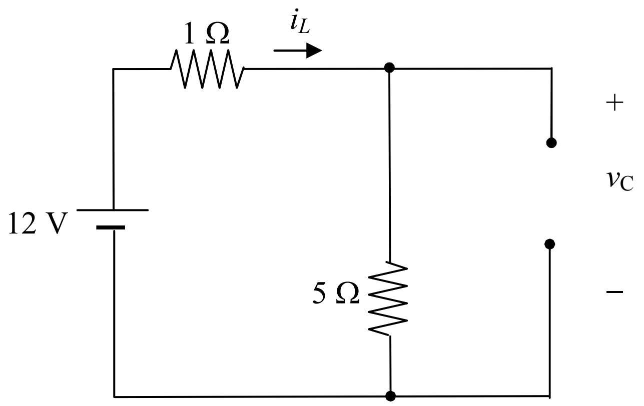
Con la formula del partitore di tensione si ricava $\mathbf{V}_2$:

$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_1 \frac{1/s}{1+1/s} = \frac{1}{s^2+3s+1} = \frac{C}{s-s_1} + \frac{D}{s-s_2}$$

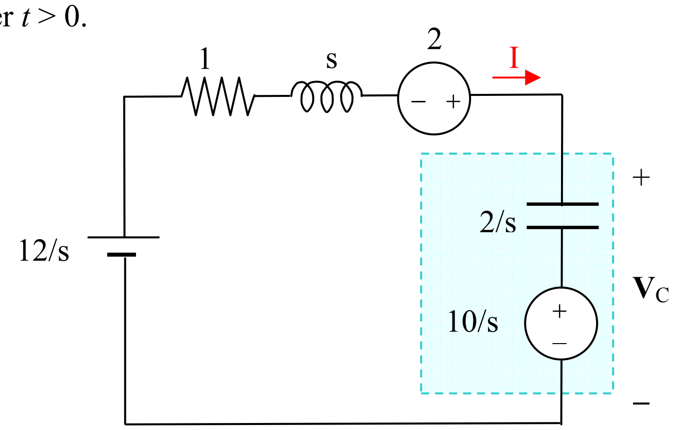
$$C = \frac{1}{s_1-s_2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \qquad D = \frac{1}{s_2-s_1} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \quad \Rightarrow \quad v_2(t) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(e^{-0{,}38t} - e^{-2{,}62t}\right)$$

14.29

Condizioni iniziali: $i_L = 12/6 = 2$ A; $v_C = 5\, i_L = 10$ V.



Circuito simbolico per $t > 0$.



LKT:

$$\mathbf{I} = \frac{\frac{12}{s} + 2 - \frac{10}{s}}{1 + s + \frac{2}{s}} = \frac{2(s+1)}{s^2 + s + 2} \Rightarrow \qquad \mathbf{V}_C = \frac{2}{s}\mathbf{I} + \frac{10}{s} = \frac{4(s+1)}{s(s^2+s+2)} + \frac{10}{s}$$

Poli: $\quad s = 0 \quad s_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{7}}{2}$

Residui: $\quad A = \frac{4}{2} + 10 = 12$

$$B = \frac{4(s_1+1)}{s_1(s_1 - s_2)} = \frac{4\left(\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{7}}{2}\right)}{\left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{7}}{2}\right) j\sqrt{7}} = \frac{j4(1+j\sqrt{7})}{(1-j\sqrt{7})\sqrt{7}}$$

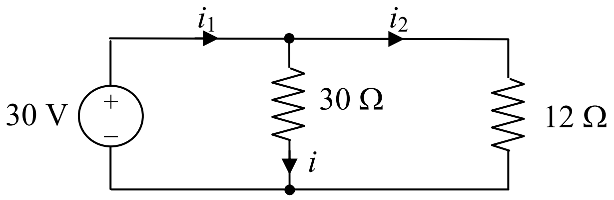
$$B = \frac{4}{\sqrt{7}} \angle 2\tan^{-1}(\sqrt{7}) + 90° = \frac{4}{\sqrt{7}} \angle 228{,}6°$$

Antitrasformata:

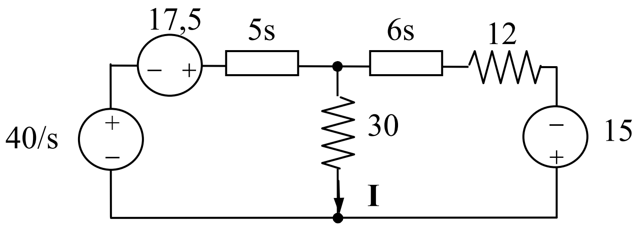
$$v_C(t) = 12 + \frac{8}{\sqrt{7}} e^{-t/2} \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t + 228{,}6°\right) \text{V}$$

14.30

Condizioni iniziali: $i_2 = 30/12 = 2{,}5$ A; $i = 30/30 = 1$ A; $i_1 = i + i_2 = 3{,}5$ A.



Circuito simbolico per $t > 0$.



La tensione ai capi del resistore da 30 Ω si può ricavare con la formula di Millman:

$$\mathbf{V} = \frac{\left(\frac{40}{s} + 17{,}5\right)\frac{1}{5s} - \frac{15}{12+6s}}{\frac{1}{5s} + \frac{1}{30} + \frac{1}{12+6s}} = \frac{30(s^2 + 15s + 16)}{s(s^2 + 13s + 12)}$$

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{30} = \frac{s^2 + 15s + 16}{s(s^2 + 13s + 12)}$$

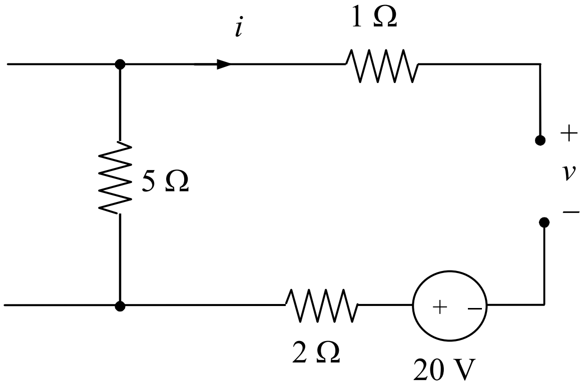
Poli: $s_1 = 0$ $s_2 = -1$ $s_3 = -12$

Residui: $A_1 = 4/3$ $A_2 = -2/11$ $A_3 = -5/33$

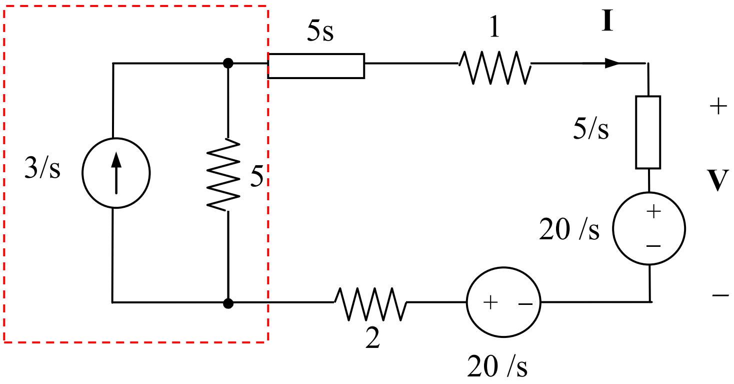
Antitrasformata: $i(t) = \frac{4}{3} - \frac{2}{11}e^{-t} - \frac{5}{33}e^{-12t}$ A

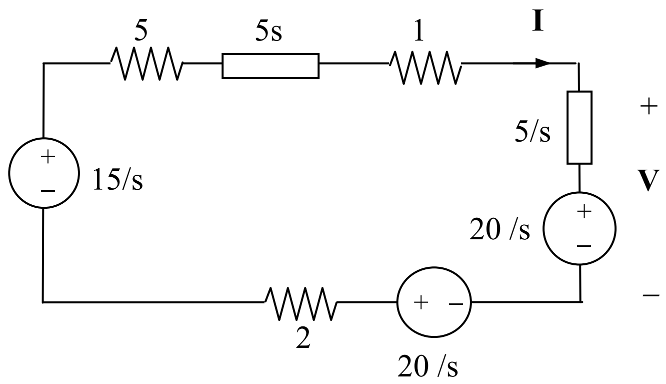
14.32

Condizioni iniziali (il gradino $u(t)$ è nullo per $t = 0^-$): $i = 0$, $v = 20$ V.



Circuito simbolico per $t > 0$ (a destra dopo la trasformazione del generatore di corrente).





LKT: $$\mathbf{I} = \frac{\frac{15}{s}}{8 + 5s + \frac{5}{s}} = \frac{15}{5s^2 + 8s + 5}$$

Poli: $s_{1,2} = -0{,}8 \pm j0{,}6$

Residui: $A = \dfrac{15}{5(s_1 - s_2)} = -j2{,}5 \qquad A^* = +j2{,}5$

Antitrasformata: $i(t) = 5e^{-0{,}8t}\cos(0{,}6t - 90°) = 5e^{-0{,}8t} sen(0{,}6t)$ A

Infine:

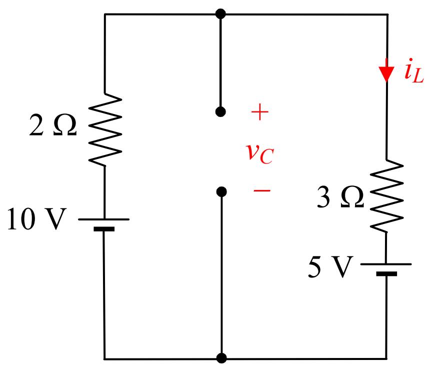
$$\mathbf{V} = \frac{5}{s}\mathbf{I} + \frac{20}{s} = \frac{75}{s(5s^2 + 8s + 5)} + \frac{20}{s}$$

Residui: $A = 15{+}20 = 35 \qquad B = \dfrac{-6{,}25}{0{,}3 + j0{,}4} = 12{,}5\angle 233° \qquad B^*$

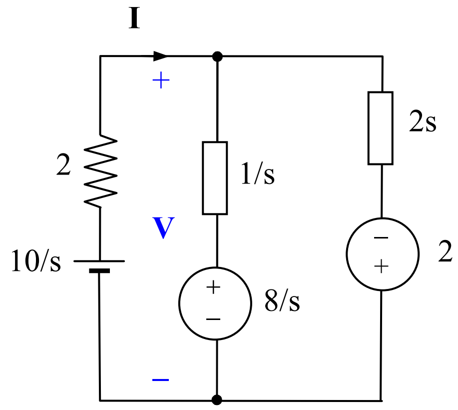
Antitrasformata: $v(t) = 35 + 25e^{-0{,}8t}\cos(0{,}6t + 233°)$ V

14.33

Condizioni iniziali: con la LKT si ricava $i_L = \dfrac{10-5}{5} = 1$ A; inoltre $v_C = 3i_L + 5 = 8$ V.



Circuito simbolico per $t > 0$.



Formula di Millman:

$$\mathbf{V} = \frac{\frac{10}{2s} + \frac{8}{s}s - 2\frac{1}{2s}}{\frac{1}{2} + s + \frac{1}{2s}} = \frac{\frac{4+8s}{s}}{\frac{s+2s^2+1}{2s}} = \frac{8(1+2s)}{2s^2+s+1}$$

$$\mathbf{I} = \frac{\frac{10}{s} - \mathbf{V}}{2} = \frac{2s^2+s+5}{s(2s^2+s+1)}$$

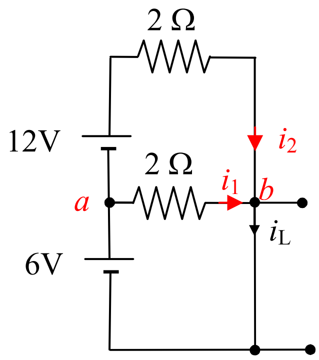
Poli: $s = 0$ $\quad s_{1,2} = -\frac{1}{4} \pm j\frac{\sqrt{7}}{4}$

Residui: $A = 5$ $\quad B = \frac{-16}{7 + j\sqrt{7}} = 2\sqrt{\frac{8}{7}} \angle - \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right) + 180°$

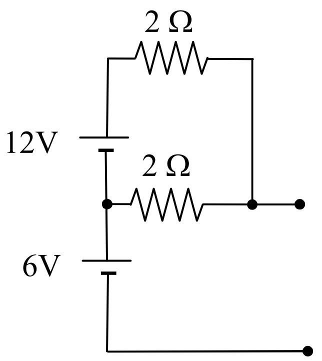
Antitrasformata: $$i(t) = 5 - 4\sqrt{\frac{8}{7}}e^{-t/4}\cos\left(\frac{\sqrt{7}}{4}t - \tan^{-1}(1/\sqrt{7})\right)\text{A}$$

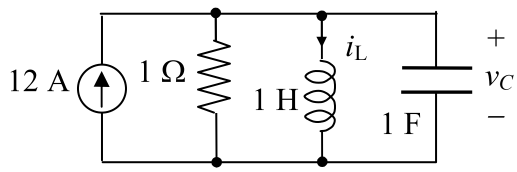
14.34

Condizione iniziale. La tensione tra *a* e *b* è 6 V quindi $i_1 = 3$ A; la tensione ai capi del resistore in alto si ricava con la LKT e vale 18 V, quindi $i_2 = 9$ A e $i_L = i_1 + i_2 = 12$ A.

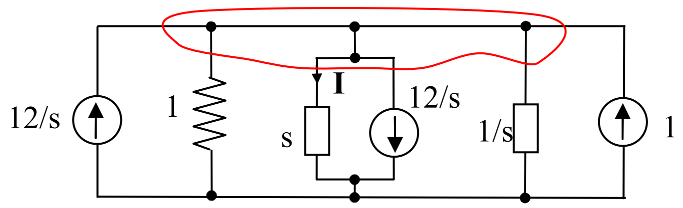


Per semplificare l'analisi con la trasformata di Laplace conviene applicare il *teorema di Norton* al bipolo resistivo mostrato nella figura seguente a sinistra (abbiamo già la corrente di corto circuito che vale 12 A!). La resistenza equivalente è 2 Ω//2 Ω = 1 Ω. Abbiamo quindi il circuito equivalente per $t > 0$ riportato a destra, con $v_C(0) = 1$ V e $i_L(0) = 12$ A.





Di seguito il circuito nel dominio di Laplace.



Si applica la LKC alla linea chiusa, indicando con **V** la tensione ai capi dei bipoli:

$$\mathbf{V} + \frac{\mathbf{V}}{s} + \mathbf{V}s = 1$$

da cui

$$\mathbf{V} = \frac{s}{s^2 + s + 1} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{s} = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$

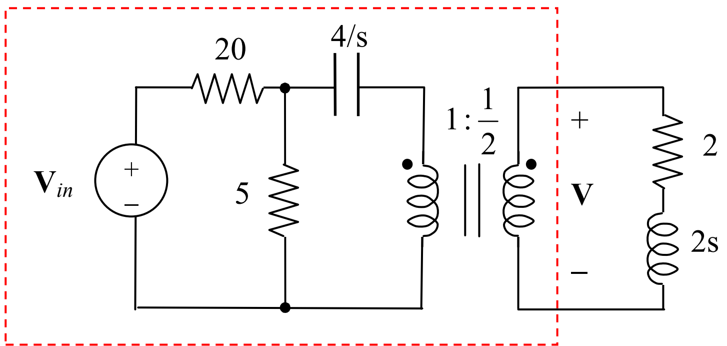
$$\mathbf{I} = \frac{A}{s-p} + \frac{A^*}{s-p^*} \qquad\qquad p = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2},\ \mathrm{A} = \frac{-j}{\sqrt{3}}$$

La corrente richiesta è $\mathbf{I}_\mathrm{L} = 12/\mathrm{s} + \mathbf{I}$, quindi

$$i_L(t) = 12 + \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-t/2} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t\right) \mathrm{A}$$

14.35

Circuito simbolico.



Applicando il teorema di Thevenin al bipolo nel riquadro si ricavano i seguenti valori:

$$\mathbf{V}_T = \mathbf{V}_{in}\frac{5}{25} = \frac{\mathbf{V}_{in}}{5} \qquad\qquad \mathbf{Z}_T = \frac{1}{4}\left(\frac{4}{s} + \frac{5\times 20}{25}\right) = \frac{s+1}{s}$$

Sostituendo il bipolo con l'equivalente di Thevenin si ricava la tensione **V**:

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_T\frac{2(s+1)}{2(s+1)+\mathbf{Z}_T} = \mathbf{V}_{in}\frac{1}{5}\frac{2(s+1)s}{2(s+1)s+s+1} = \mathbf{V}_{in}\frac{0{,}2s}{s+1/2}$$

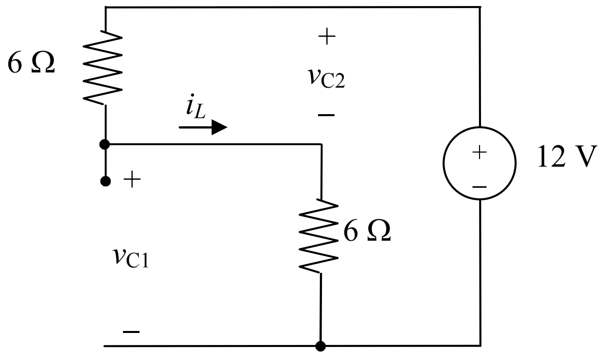
Utilizzando la proprietà di traslazione della trasformata di Laplace abbiamo:

$$v_{in}(t) = u(t) - u(t-1) \Rightarrow \qquad \mathbf{V}_{in}(s) = \frac{1}{s}(1-e^{-s}) \Rightarrow \mathbf{V}(s) = \frac{0{,}2}{s+1/2}(1-e^{-s})$$

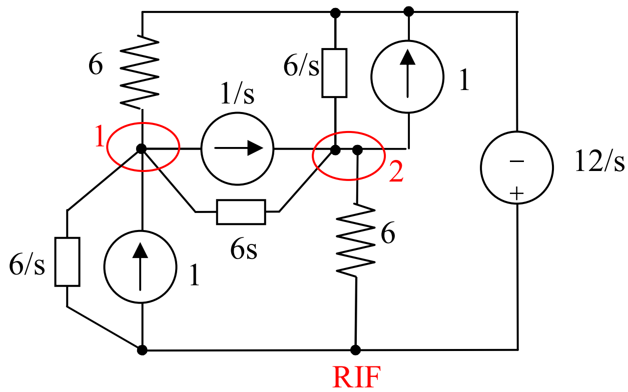
$$v(t) = 0{,}2e^{-t/2} - u(t-1)\ \ 0{,}2e^{-(t-1)/2}\,\mathrm{V}$$

14.36

Condizioni iniziali : i_L= 12/12 = 1 A ; $v_{C1} = v_{C2}$ = 6 V.



Circuito simbolico.



Analisi nodale.

LKC nodo 1
$$\frac{\mathbf{V}_1 s}{6} + \frac{\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2}{6s} + \frac{\mathbf{V}_1 + \frac{12}{s}}{6} - 1 + \frac{1}{s} = 0$$

LKC nodo 2
$$\frac{\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1}{6s} + \frac{\mathbf{V}_2}{6} + \frac{\left(\mathbf{V}_2 + \frac{12}{s}\right)s}{6} + 1 - \frac{1}{s} = 0$$

Sistema :

$$\begin{bmatrix} s^2+s+1 & -1 \\ -1 & s^2+s+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6s-18 \\ -18s+6 \end{bmatrix}$$

Soluzione (la tensione incognita coincide con $\mathbf{V}_1$) :

$$\mathbf{V}_1 = \frac{\begin{vmatrix} 6s-18 & -1 \\ -18s+6 & s^2+s+1 \end{vmatrix}}{s^4+2s^3+3s^2+2s} = \frac{6s^3-12s^2-30s-12}{s(s^3+2s^2+3s+2)} = \frac{6(s^2-3s-2)}{s(s^2+s+2)}$$

L'ultimo passaggio si ottiene dividendo entrambi i polinomi per il fattore comune (s+1).

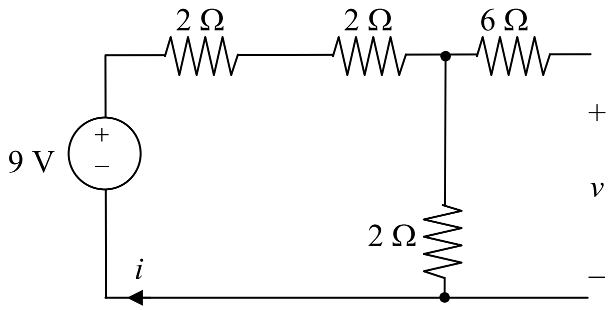
Poli : $\quad 0, \quad -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{7}}{2}$

Residui : $\quad A = -6 \qquad B = \frac{24(1+j\sqrt{7})}{7+j\sqrt{7}} = \frac{24}{\sqrt{7}} \angle 48{,}6°$

Antitrasformata : $\quad v_C(t) = -6 + \frac{48}{\sqrt{7}} e^{-t/2} \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2} t + 48{,}6° \right) \text{V}$

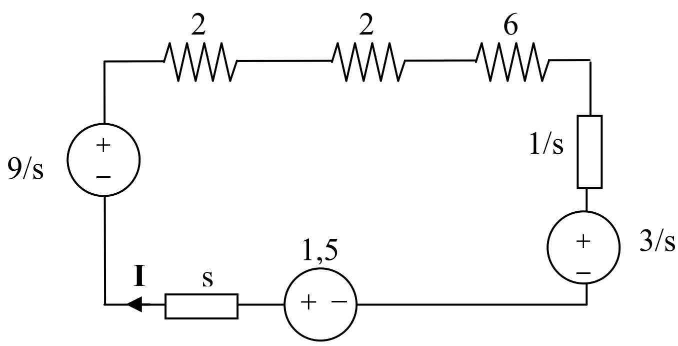
14.37

Circuito in $t = 0^-$.



Si ricavano i valori $v = 9 \times 2/6 = 3$ V e $i = 9/6 = 1{,}5$ A.

Circuito simbolico per $0 < t < 1$ s.



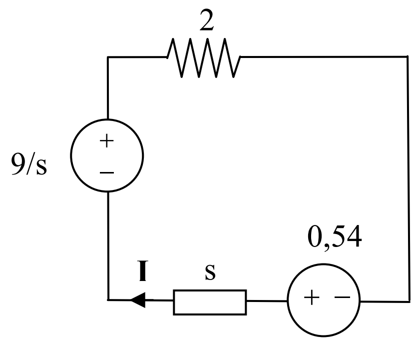
E' un circuito ad una maglia da cui si ricava

$$\mathbf{I} = \frac{\frac{6}{s}+1.5}{10+s+\frac{1}{s}} = \frac{1,5s+6}{s^2+10s+1}$$

I poli sono $s_1 = -5 + 2\sqrt{6} \cong -0,1$, $s_2 = -5 - 2\sqrt{6} \cong -9,9$. Antitrasformando si ottiene:

$$i(t) \cong 0,6e^{-0,1t} + 0,9e^{-9,9t}\ \text{A} \qquad 0< t <1$$

Circuito simbolico per t > 1s (il resto del circuito non ha effetto sulla corrente *i*).

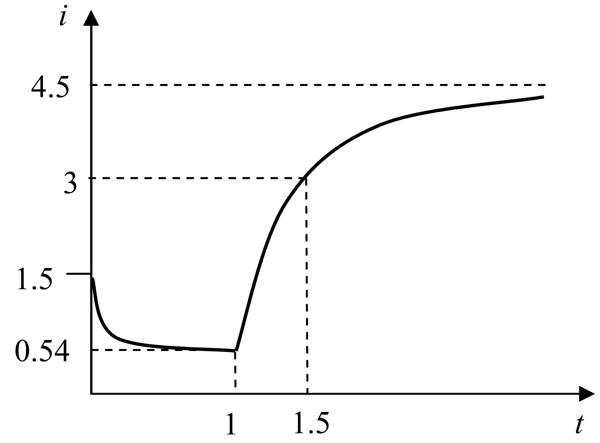


Il valore iniziale, $i(1) \approx 0.54$ A, si ricava dall'espressione precedente di $i(t)$. La trasformata della corrente è

$$\mathbf{I} = \frac{\frac{9}{s}+0.54}{s+2} = \frac{9+0,54s}{s(s+2)}$$

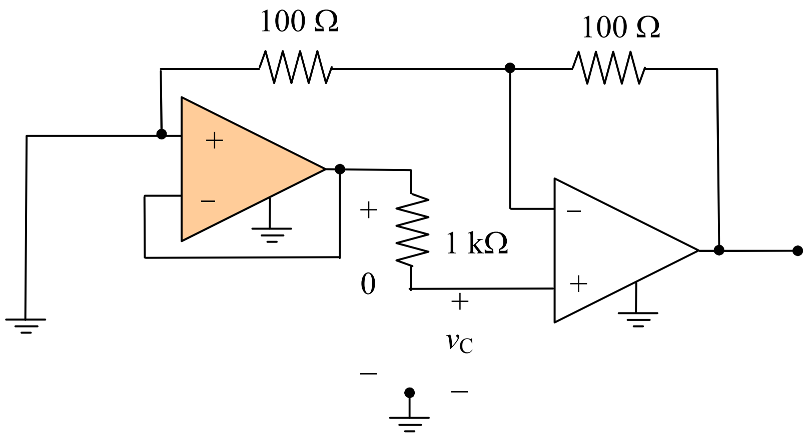
Antitrasformando si ha $i(t) \cong -3,96e^{-2t} + 4,5$ A. Questa risposta deve essere traslata in ritardo di 1 secondo, quindi la soluzione è:

$$i(t) \cong -3,96e^{-2(t-1)} + 4,5\ \text{A} \quad t > 1$$

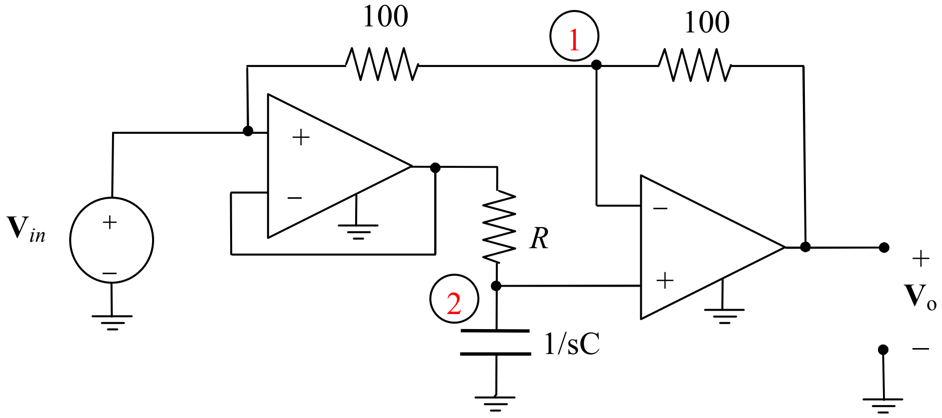


14.38

Condizione iniziale (il circuito per $t = 0^-$ è mostrato di seguito). Per $t < 0$ si ha $v_{in} = 0$, quindi la tensione di uscita dell'inseguitore è nulla. La resistenza di 1 kΩ non è percorsa da corrente per il c.a. virtuale del secondo operazionale, dunque $v_C = 0$.



Circuito simbolico.



Analisi nodale ($\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_2$ per il c.c. virtuale):

LKC nodo 1: $$\frac{\mathbf{V}_{in} - \mathbf{V}_1}{100} = \frac{\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_o}{100}$$

LKC nodo 2: $$\frac{\mathbf{V}_{in} - \mathbf{V}_1}{R} = \mathbf{V}_1 sC$$

Risolvendo si ricava

$$\mathbf{V}_o = \mathbf{V}_{in}\frac{1-s}{1+s} \qquad \mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_{in}\frac{1}{1+s}$$

La trasformata di cos(t) è s/(s^2+1), pertanto:

$$\mathbf{V}_o = \frac{s}{s^2+1}\times\frac{1-s}{1+s}$$

con antitrasformata

$$v_o(t) = \mathrm{sen}(t) - e^{-t}$$

Inoltre $$\mathbf{V}_C = \mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_1 = \frac{s}{s^2+1}\times\frac{1}{1+s}$$

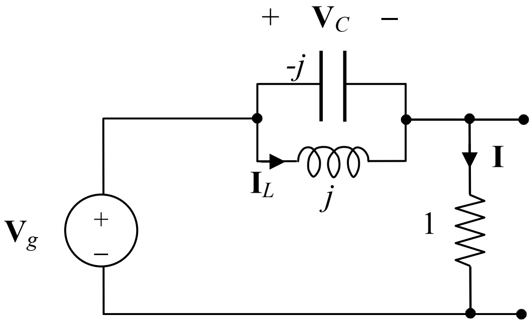
con antitrasformata $$v_C(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(t - \pi/4) - \tfrac{1}{2}\, e^{-t}$$

14.39

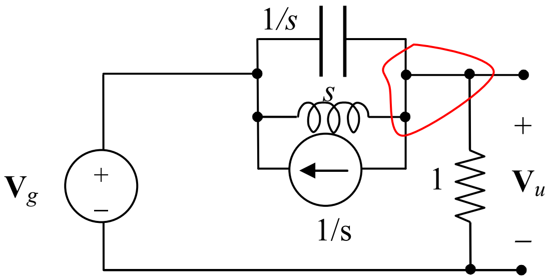
Condizioni iniziali. Per $t < 0$ il circuito è in regime sinusoidale di pulsazione $\omega = 1$. Il parallelo L//C è in risonanza dunque $\mathbf{I} = 0$, $\mathbf{V}_C = \mathbf{V}_g = -j$; $\mathbf{I}_L = \mathbf{V}_C / j = -1$. Trasformando i fasori nel dominio del tempo si ottiene:

$$v_C(t) = sen(t)\ \text{V} \qquad i_L(t) = -\cos(t)\ \text{A}$$

Pertanto $v_C(0) = 0$, $i_L(0) = -1$ A.



Circuito simbolico nel dominio di Laplace.



Analisi nodale. Si scrive l'equazione LKC per la linea chiusa evidenziata in figura:

$$(\mathbf{V}_g - \mathbf{V}_u)s + \frac{\mathbf{V}_g - \mathbf{V}_u}{s} = \frac{1}{s} + \mathbf{V}_u$$

Sostituendo la trasformata $\mathbf{V}_g(s) = 2/(s^2+4)$ si ricava

$$\mathbf{V}_u(s) = \frac{\mathbf{V}_g(s)(s^2+1) - 1}{s^2+s+1} = \frac{s^2-2}{(s^2+4)(s^2+s+1)}$$

Poli: $\qquad s = \pm j2 \qquad\qquad s = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$

Residui: $\qquad A = \frac{j3}{2(-3+j2)} \cong 0{,}416\angle -56° \qquad B = \frac{j(5+j\sqrt{3})}{(7-j\sqrt{3})\sqrt{3}} \cong 0{,}423\angle\, 123°$

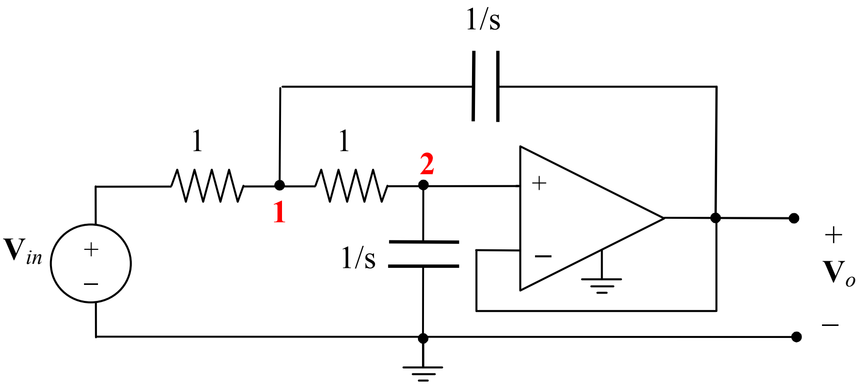
Antitrasformata: $\qquad v_u(t) \cong 0{,}832\ \cos(2t - 56°) + 0{,}846\ e^{-t/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t + 123°\right)\text{V}$

14.40

Analisi nodale del circuito simbolico con condizioni iniziali nulle ($\mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_o$):

LKC nodo 1: $\qquad \mathbf{V}_{in} - \mathbf{V}_1 = (\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_o)\ s + \mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_o$

LKC nodo 2: $\qquad \mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_o = \mathbf{V}_o\, s$



Soluzione

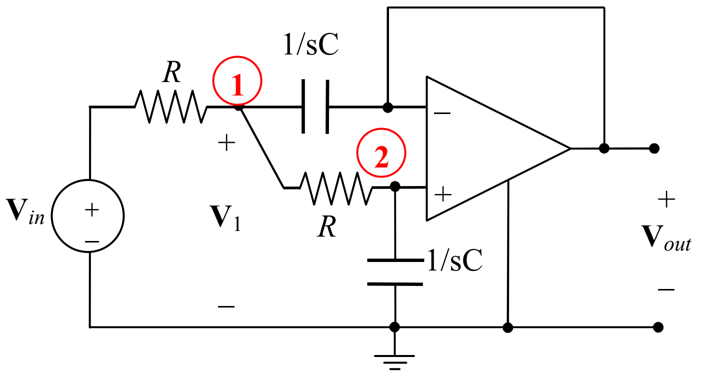
$$\mathbf{V}_o = \frac{\mathbf{V}_{in}}{s^2+2s+1} = \frac{1}{s(s+1)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{(s+1)^2}$$

Residui: $$A = \left.\frac{1}{(s+1)^2}\right|_{s=0} = 1, \quad B = -\left.\frac{1}{s^2}\right|_{s=-1} = -1, \quad C = \left.\frac{1}{s}\right|_{s=-1} = -1$$

Antitrasformata : $v_o(t) = 1 - e^{-t} - t\, e^{-t}$ V

14.41

Circuito simbolico.



Analisi nodale.

$\mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_{out}$

LKC nodo 1 $(\mathbf{V}_{in} - \mathbf{V}_1)/R = (\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_{out})\, sC + (\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_{out})/R$

LKC nodo 2 $(\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_{out})/R = \mathbf{V}_{out}\, sC$

Risolvendo si ottiene:

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_{in}\frac{1}{s+1} = \frac{s}{s^2+1}\;\frac{1}{s+1}$$

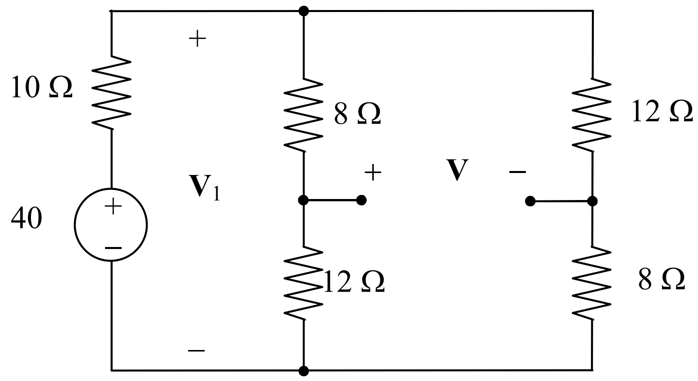
Poli: $s = -1$ $s = \pm j$

Residui: $A = -\frac{1}{2}$ $B = \frac{1-j}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4} \angle -\pi/4$

Antitrasformata : $v_1(t) = -\frac{1}{2}\ e^{-t} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(t - \pi/4)$ V

14.42

In $t = 0^-$ il circuito è in regime sinusoidale di pulsazione $\omega = 2$. Il parallelo L//C è in risonanza poiché LC= ¼ , quindi equivale ad un circuito aperto. Il circuito è mostrato nella figura seguente.

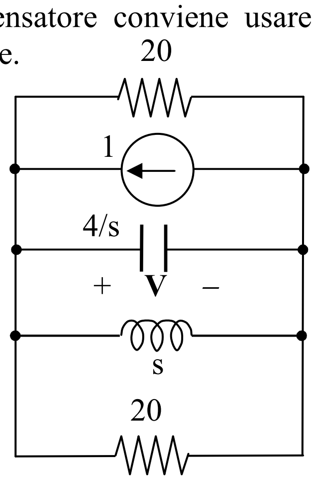


Il ponte non è in equilibrio, quindi $\mathbf{V} \neq 0$. Per ricavare $\mathbf{V}$ si può ridurre lo schema ad un partitore di tensione con resistenze 10 Ω e (12+8)//(12+8) = 10 Ω; si ottiene $\mathbf{V}_1 = 20$. Infine

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 \left(\frac{12}{20} - \frac{8}{20} \right) = 4$$

Quindi $v(t) = 4 \cos 2t \Rightarrow v(0) = 4$ V. Anche il fasore della tensione dell'induttore è pari a 4, dunque $\mathbf{I}_L = 4/(j2) = -j2 \Rightarrow i_L(t) = 2$ sen $2t \Rightarrow\ i_L(0) = 0$.

Per $t > 0$ si utilizza la trasformata di Laplace. Per il condensatore conviene usare il circuito equivalente di tipo parallelo, come mostrato nella figura seguente.



Indicando con **Y** l'ammettenza equivalente in parallelo al generatore, **V**(s) si ricava con la relazione seguente:

$$\mathbf{V} = \frac{1}{\mathbf{Y}} = \frac{1}{\dfrac{1}{20} + \dfrac{1}{20} + \dfrac{s}{4} + \dfrac{1}{s}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{V} = \frac{4s}{s^2 + 0{,}4s + 4}$$

I poli sono ≈ – 0.2 ± j2 con residui ≈ 2 ± j 0,2.
Infine

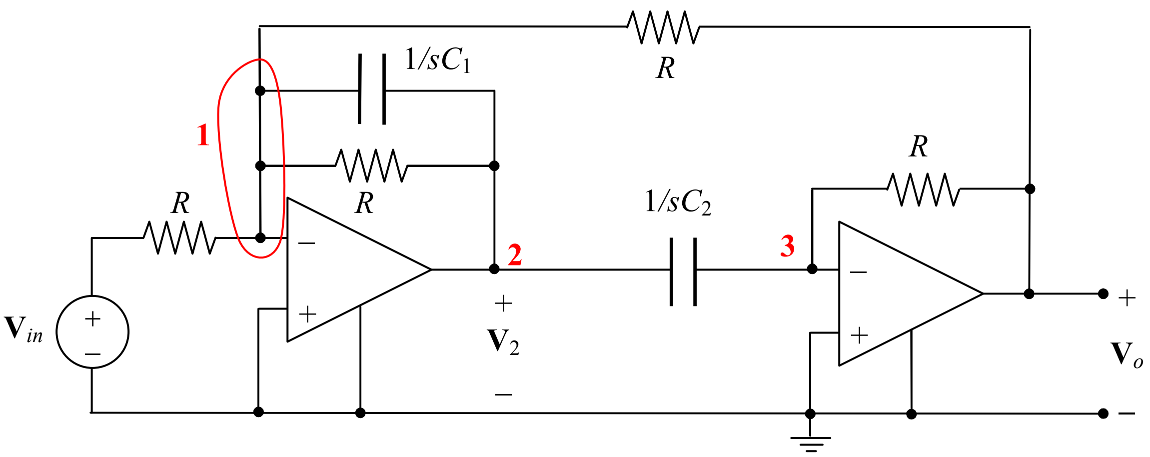
$$v(t) \cong 4\, e^{-0{,}2\,t} \cos(2t + 5{,}7°)\ \text{V}$$

14.43

Il circuito simbolico è mostrato nella figura seguente (conviene eseguire l'analisi nodale in forma letterale). Le tensioni $\mathbf{V}_1$ e $\mathbf{V}_3$ sono nulle per il c.c. virtuale.

LKC nodo 1 $\qquad \dfrac{\mathbf{V}_{in}}{R} + \dfrac{\mathbf{V}_2}{R} + \mathbf{V}_2 sC_1 + \dfrac{\mathbf{V}_o}{R} = 0$

LKC nodo 3 $\qquad \mathbf{V}_2 sC_2 + \dfrac{\mathbf{V}_o}{R} = 0$



Sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 + sRC_1 & 1 \\ sRC_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ V_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -V_{in} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Soluzione:

$$V_o = \frac{\begin{vmatrix} 1 + sRC_1 & -V_{in} \\ sRC_2 & 0 \end{vmatrix}}{1 + sR(C_1 - C_2)} = \frac{sRC_2}{1 + sR(C_1 - C_2)} V_{in}$$

Sostituendo i valori numerici si ottiene:

$$\mathbf{V}_o = \frac{s}{s+200}\;\frac{200}{s^2+200^2}$$

Lo sviluppo in frazioni parziali è

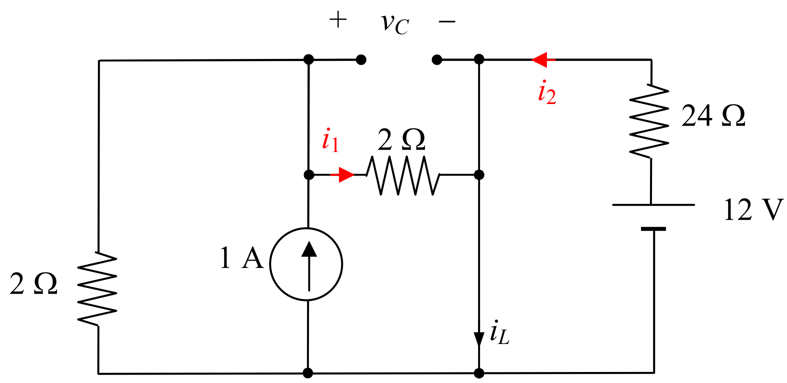
$$\mathbf{V}_o = \frac{A}{s+200} + \frac{B}{s-j200} + \frac{B^*}{s+j200}$$

Ricavando i residui si ottiene: $A = -\,½$, $B = ¼\,(1-j)$ quindi

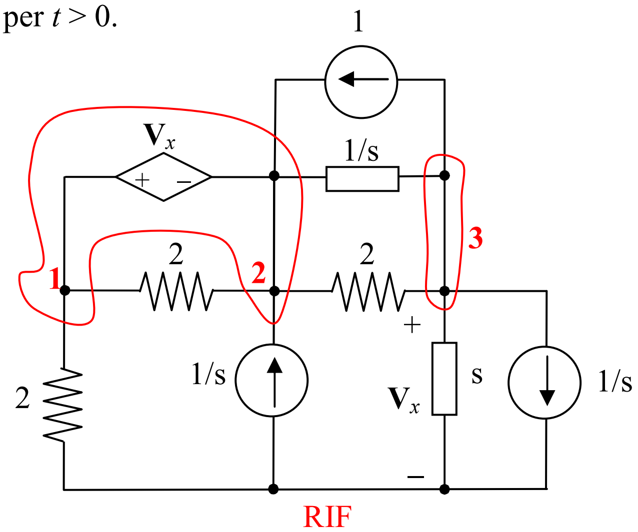
$$v_o(t) = -\;½\;e^{-200t} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(200t - 45°)\ \text{V}$$

14.44

Il circuito per $t = 0^-$ è mostrato nella figura seguente. Poiché $v_x = 0$ anche il generatore controllato equivale ad un c.c. e il resistore in parallelo non è percorso da corrente. La corrente dell'induttore è $i_L = i_1 + i_2 = 1/2 + 12/24 = 1\,\text{A}$. La tensione del condensatore è $v_C = 2i_1 = 1\,\text{V}$.



Circuito simbolico per $t > 0$.



LKC nodo 3 $$\frac{\mathbf{V}_x}{s} + \frac{1}{s} + \frac{\mathbf{V}_x - \mathbf{V}_2}{2} + (\mathbf{V}_x - \mathbf{V}_2)s + 1 = 0$$

LKC supernodo $$\frac{\mathbf{V}_1}{2} + \frac{\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_x}{2} + (\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_x)s - 1 - \frac{1}{s} = 0$$

Vincolo $\qquad \mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_x$

Sistema:

$$\begin{bmatrix} -2s^2 - s & 2s^2 + s + 2 \\ 2s^2 + 2s & -2s^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_2 \\ \mathbf{V}_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 - 2s \\ 2s + 2 \end{bmatrix}$$

Soluzione:

$$\mathbf{V}_x = \frac{\begin{vmatrix} -2s^2 - s & -2(s+1) \\ 2s^2 + 2s & 2(s+1) \end{vmatrix}}{-4s^3 - 6s^2 - 4s} = -\frac{s+1}{2s^2 + 3s + 2}$$

$$\mathbf{I}_L = \frac{\mathbf{V}_x}{s} + \frac{1}{s} = -\frac{s+1}{s(2s^2 + 3s + 2)} + \frac{1}{s}$$

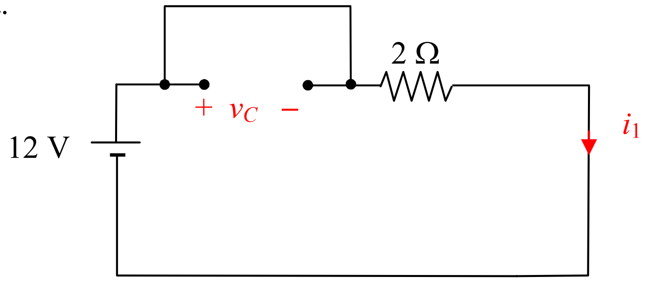
Poli: $\qquad$ s = 0 $\qquad s = -\frac{3}{4} \pm j\frac{\sqrt{7}}{4}$

Residui: $\qquad A = ½ \qquad B = \frac{1 + j\sqrt{7}}{7 + j3\sqrt{7}} = 0{,}267\angle\, 20{,}7°$

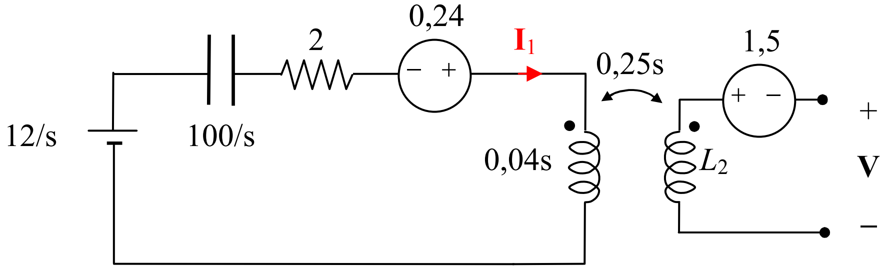
Antitrasformata: $\qquad i_L(t) = 0{,}5 + 0{,}534\ \ e^{-0{,}75t} \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{4}t + 20{,}7°\right) \text{A}$

14.45

Condizioni iniziali. Il circuito in $t = 0^-$ è mostrato di seguito. Il condensatore è cortocircuitato dall'interruttore, dunque $v_C = 0$. La corrente i_1 vale 12/2 = 6 A. La corrente dell'altro induttore è ovviamente nulla.



Circuito simbolico per $t > 0$. I generatori associati alla condizione iniziale valgono $L_1 i_1(0) = 0{,}24$ e $M\, i_1(0) = 1{,}5$. Il secondo induttore non ha corrente quindi non influisce sulla corrente $\mathbf{I}_1$.



Pertanto possiamo ricavare $\mathbf{I}_1$ scrivendo la LKT per la maglia:

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\dfrac{12}{s} + 0{,}24}{\dfrac{100}{s} + 2 + 0{,}04s} = \frac{300 + 6s}{s^2 + 50s + 2500}$$

$$\mathbf{V} = -1{,}5 + 0{,}25s\mathbf{I}_1 = -1{,}5 + \frac{(75 + 1{,}5s)s}{s^2 + 50s + 2500} = \frac{-3750}{s^2 + 50s + 2500}$$

Poli: $s = -25 \pm j25\sqrt{3}$

Residui: $A = \pm j25\sqrt{3} = 25\sqrt{3} \angle \pm 90°$

Antitrasformata: $v(t) = -50\sqrt{3}e^{-25t} sen(25\sqrt{3}t)$ V

Dobbiamo determinare gli zeri della derivata:

$$\frac{dv}{dt} = 1250\sqrt{3}e^{-25t} sen(25\sqrt{3}t) - 3750e^{-25t} \cos(25\sqrt{3}t) = 0$$

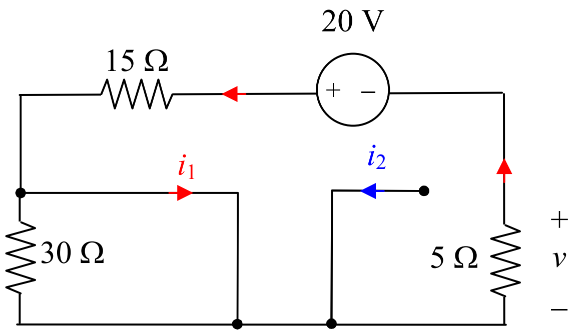
che equivale alla seguente

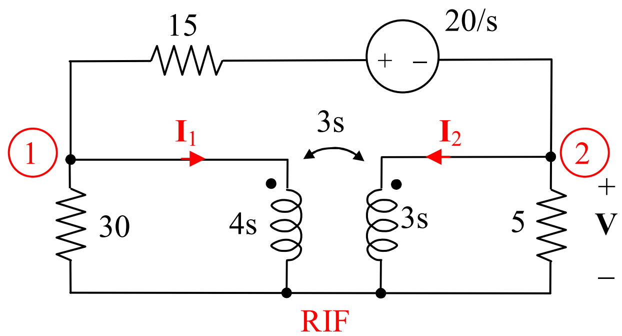
$$\sqrt{3}sen(25\sqrt{3}t) - 3\cos(25\sqrt{3}t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \tan(25\sqrt{3}t) = \sqrt{3}$$

La tensione $v(t)$ è una oscillazione smorzata, quindi il massimo in valore assoluto corrisponde al primo zero della derivata, che si verifica quando $25\sqrt{3}t = \pi/3$ ovvero per $t = \dfrac{\pi}{75\sqrt{3}} \cong 24{,}2$ ms.

14.46

Circuito per $t = 0^-$ (a sinistra): $i_1 = 20/20 = 1$ A, $i_2 = 0$, $v = -5i_1 = -5$ V.





Circuito simbolico per $t > 0$ (a destra). Conviene utilizzare l'analisi nodale.
Relazioni inverse degli induttori accoppiati (formula (14.66b) del libro):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3s}\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{s}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

LKC nodo 1 $$\frac{\mathbf{V}_1}{30}+\frac{\mathbf{V}_1}{s}-\frac{\mathbf{V}_2}{s}+\frac{1}{s}+\frac{\mathbf{V}_1-\frac{20}{s}-\mathbf{V}_2}{15}=0$$

LKC nodo 2 $$\frac{\mathbf{V}_2}{5}-\frac{\mathbf{V}_1}{s}+\frac{4\mathbf{V}_2}{3s}-\frac{\mathbf{V}_1-\frac{20}{s}-\mathbf{V}_2}{15}=0$$

Sistema:

$$\begin{bmatrix} 3s+30 & -(30+2s) \\ -(s+15) & 4s+20 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 10 \\ -20 \end{bmatrix}$$

Soluzione: $$\mathbf{V}_2=-\frac{5s+45}{s^2+12s+15}$$

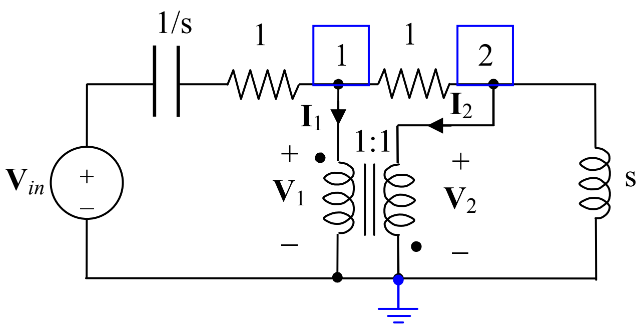
Poli: $s_{1,2}\cong -10{,}58\,;\ \text{-}1{,}42$

Residui: $A_1\cong -0{,}86 \qquad A_2\cong -4{,}14$

Antitrasformata: $v(t)\cong -\,0{,}86\,e^{-10{,}58t}-4{,}14\,e^{-1{,}42t}$ V

14.47

Circuito simbolico.



Analisi nodale:

LKC nodo 1 $$\frac{\mathbf{V}_{in}-\mathbf{V}_1}{1+\frac{1}{s}}=\mathbf{I}_1+\mathbf{V}_1-\mathbf{V}_2$$

LKC nodo 2 $$\mathbf{V}_1-\mathbf{V}_2=\mathbf{I}_2+\frac{\mathbf{V}_2}{s}$$

Con i versi scelti le relazioni del trasformatore sono:

$$\mathbf{V}_2=-\,\mathbf{V}_1 \qquad\qquad \mathbf{I}_2=\mathbf{I}_1$$

Sostituendo e ricavando $\mathbf{V}_1$ in funzione di $\mathbf{V}_{in}$ si ha

$$\mathbf{V}_1=\mathbf{V}_{in}\frac{s^2}{5s^2+5s+1}$$

La tensione di ingresso si può così esprimere: $v_{in}(t) = t - (t-1)u(t-1)$ (si noti che per $t > 1$ $v_{in}(t) = 1$). La trasformata è $V_{in}(s) = \frac{1}{s^2}(1 - e^{-s})$.

$$\mathbf{I} = \mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2 = 2\mathbf{V}_1 = \frac{2(1-e^{-s})}{5s^2 + 5s + 1} = \mathbf{F}(s)(1 - e^{-s})$$

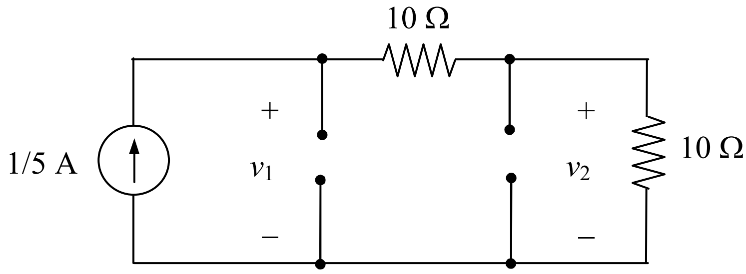
La funzione **F**(s) ha due poli reali $s_{1,2} = -1/2 \pm \sqrt{5}/10$, con residui $A_{1,2} = \pm 2/\sqrt{5}$, quindi:

$$f(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} = \frac{2}{\sqrt{5}}(e^{-0.276t} - e^{-0.724t})$$

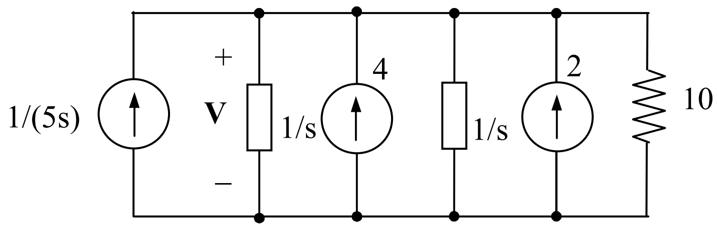
Infine, applicando la proprietà di traslazione della trasformata di Laplace, si ricava la corrente: $i(t) = f(t) - f(t-1)u(t-1)$.

14.48

Condizioni iniziali: $v_1 = 20/5 = 4$ V, $v_2 = 10/5 = 2$ V.



Circuito simbolico per $t > 0$ (il resistore centrale è cortocircuitato quindi si può eliminare).



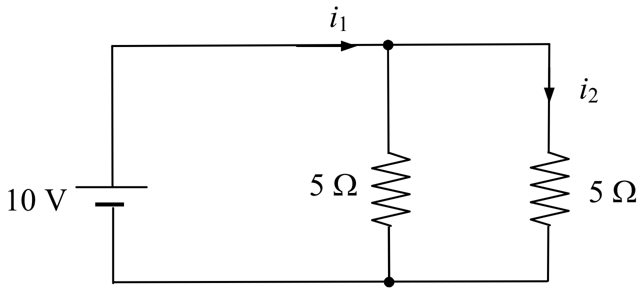
Le tensioni dei due condensatori sono identiche; con la LKC si ricava:

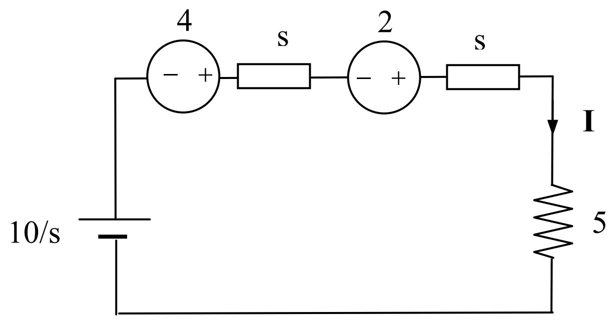
$$\mathbf{V} = \frac{\frac{1}{5s} + 6}{2s + 0{,}1} = \frac{1 + 30s}{10s(s + 0{,}05)}$$

I poli sono s = 0 e s = -0,05 = -1/20. I residui sono rispettivamente 2 e 1. L'antitrasformata è $v(t) = 2 + e^{-t/20}$ V. Il valore in $t = 0$ è 3 V, quindi entrambe le tensioni v_1 e v_2 sono discontinue. Per evitare soluzioni discontinue si può sostituire l'interruttore chiuso con un resistore di resistenza << 10 Ω. In questo caso i valori finali delle tensioni v_1 e v_2 sono quasi invariati (≈2 V) ma le funzioni risultano continue in $t = 0$.

14.49

Condizioni iniziali: i_1 = 10/2,5 = 4 A; $i_2 = i_1/2$= 2 A (figura a sinistra).





Circuito simbolico per $t > 0$ (figura a destra). Le correnti degli induttori sono identiche.

Con la LKT si ricava:

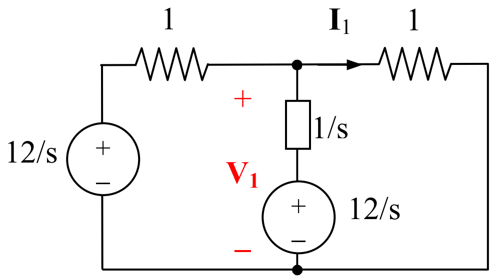
$$\mathbf{I} = \frac{\frac{10}{s}+6}{2s+5} = \frac{10+6s}{2s(s+2{,}5)} \Rightarrow \quad i(t) = 2 + e^{-2{,}5t}\,\mathrm{A}$$

Il valore in t = 0 è 3 A, quindi entrambe le correnti i_1 e i_2 sono discontinue. Per evitare soluzioni discontinue si può sostituire l'interruttore aperto con un resistore di resistenza >> 5 Ω. In questo caso i valori finali delle correnti sono quasi invariati (≈2 A) ma le funzioni risultano continue in t = 0.

14.50

Condizioni iniziali: per $t = 0^-$ nel circuito non circolano correnti quindi entrambe le tensioni dei condensatori valgono 12 V.

Circuito simbolico per $t > 0$.



Con il teorema di Millman si ricava: $\mathbf{I}_1 = \mathbf{V}_1 = \dfrac{\frac{12}{s}+\frac{12}{s}s}{1+1+s} = \dfrac{12(s+1)}{s(s+2)} \Rightarrow \quad i_1(t) = 6(1+e^{-2t})\,\mathrm{A}.$

La tensione v_2 del condensatore di destra vale 12 V per $t < 0$ ed è nulla per $t > 0$; quindi $v_2(t) = 12 - 12u(t) \Rightarrow i_2(t) = \dfrac{dv_2}{dt} = -12\delta(t)\,\mathrm{A}.$