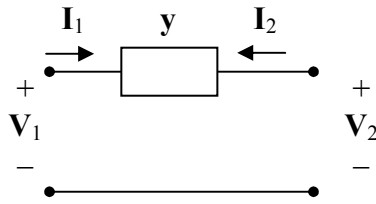


16.1

(a) Ponendo $y = j\omega C + 1/(j\omega L)$, il quadripolo equivale al seguente.



Si ricava:

$$\mathbf{I}_1 = (\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2)y = \mathbf{y}\mathbf{V}_1 - \mathbf{y}\mathbf{V}_2$$

$$\mathbf{I}_2 = (\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1)y = -\mathbf{y}\mathbf{V}_1 + \mathbf{y}\mathbf{V}_2$$

dunque la matrice $[\mathbf{Y}]$ è:

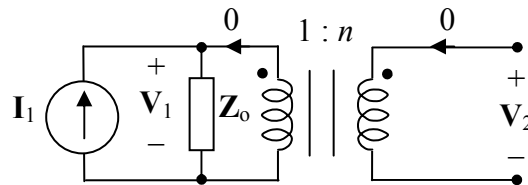
$$[\mathbf{Y}] = \begin{bmatrix} \mathbf{y} & -\mathbf{y} \\ -\mathbf{y} & \mathbf{y} \end{bmatrix}$$

La matrice $[\mathbf{Y}]$ non è invertibile quindi $[\mathbf{Z}]$ non esiste.

Per quanto riguarda le matrici $[\mathbf{H}]$ e $[\mathbf{T}]$ queste si possono ottenere dalla $[\mathbf{Y}]$ utilizzando la Tabella 16.2 del libro; ad esempio, la matrice $[\mathbf{H}]$ è

$$[\mathbf{H}] = \frac{1}{\mathbf{y}_{11}} \begin{bmatrix} 1 & -\mathbf{y}_{12} \\ \mathbf{y}_{21} & \Delta_Y \end{bmatrix} = \frac{1}{\mathbf{y}} \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{y} \\ -\mathbf{y} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\mathbf{y} & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

(b) Conviene interpretare i parametri \mathbf{z} in termini di funzioni di rete. Il primo caso è illustrato nella figura seguente, dove la corrente \mathbf{I}_2 è nulla.

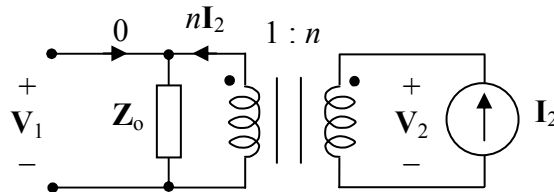


Utilizzando le relazioni del trasformatore ideale abbiamo:

$$\mathbf{z}_{11} = \left. \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_1} \right|_{\mathbf{I}_2=0} = \frac{\mathbf{Z}_o \mathbf{I}_1}{\mathbf{I}_1} = \mathbf{Z}_o$$

$$\mathbf{z}_{21} = \left. \frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{I}_1} \right|_{\mathbf{I}_2=0} = \frac{n\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_1} = n \mathbf{Z}_o$$

Il secondo caso è mostrato di seguito.



Si ricava

$$\mathbf{z}_{12} = \left. \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_2} \right|_{\mathbf{I}_1=0} = \frac{n\mathbf{I}_2 \mathbf{Z}_o}{\mathbf{I}_2} = n \mathbf{Z}_o$$

$$\mathbf{z}_{22} = \left. \frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{I}_2} \right|_{\mathbf{I}_1=0} = \frac{n\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_2} = n^2 \mathbf{Z}_o$$

Quindi

$$[\mathbf{Z}] = \mathbf{Z}_o \begin{bmatrix} 1 & n \\ n & n^2 \end{bmatrix}$$

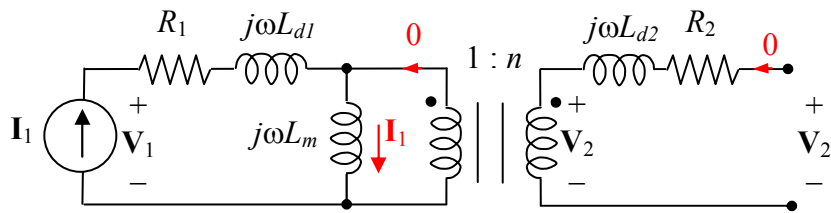
La matrice $[\mathbf{Z}]$ non è invertibile quindi $[\mathbf{Y}]$ non esiste.

Le matrici $[\mathbf{H}]$ e $[\mathbf{T}]$ si ricavano utilizzando la Tabella 16.2 del libro:

$$[\mathbf{H}] = \begin{bmatrix} 0 & 1/n \\ -1/n & (n^2 \mathbf{Z}_o)^{-1} \end{bmatrix} \quad [\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} 1/n & 0 \\ (n \mathbf{Z}_o)^{-1} & n \end{bmatrix}$$

16.2

Consideriamo la figura seguente (porta 2 aperta).

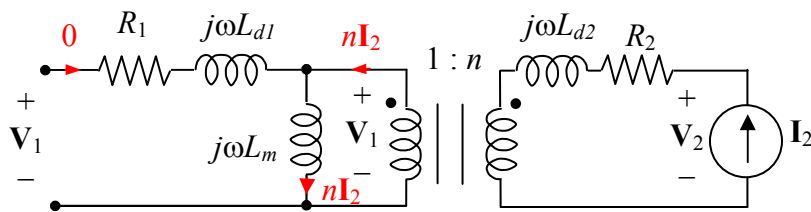


Utilizzando le relazioni del trasformatore ideale abbiamo:

$$\mathbf{z}_{11} = \left. \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_1} \right|_{\mathbf{I}_2=0} = \frac{(R_1 + j\omega L_{d1} + j\omega L_m) \mathbf{I}_1}{\mathbf{I}_1} = R_1 + j\omega(L_{d1} + L_m)$$

$$\mathbf{z}_{21} = \left. \frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{I}_1} \right|_{\mathbf{I}_2=0} = \frac{n j\omega L_m \mathbf{I}_1}{\mathbf{I}_1} = j\omega n L_m$$

Consideriamo la figura seguente (porta 1 aperta).



Utilizzando le relazioni del trasformatore ideale abbiamo:

$$\mathbf{z}_{12} = \left. \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_2} \right|_{\mathbf{I}_1=0} = \frac{j\omega L_m n \mathbf{I}_2}{\mathbf{I}_2} = j\omega n L_m$$

$$\mathbf{z}_{22} = \left. \frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{I}_2} \right|_{\mathbf{I}_1=0} = \frac{(R_2 + j\omega L_{d2}) \mathbf{I}_2 + n j\omega L_m n \mathbf{I}_2}{\mathbf{I}_2} = R_2 + j\omega(L_{d2} + n^2 L_m)$$

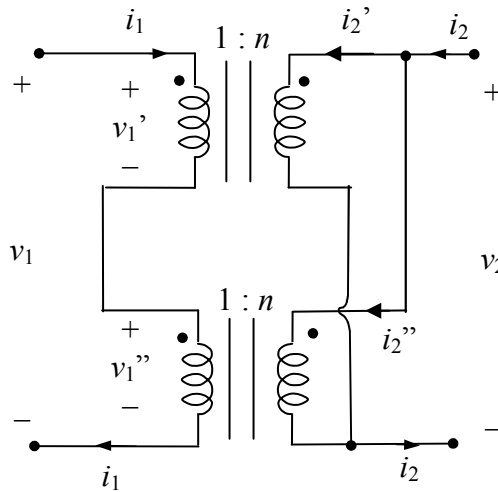
16.4

Con riferimento allo schema seguente, applicando le leggi di Kirchhoff e le relazioni del trasformatore ideale, abbiamo:

$$v_1 = v_1' + v_1'' = 2(v_2 / n) \qquad i_2 = i_2' + i_2'' = 2(-i_1 / n)$$

Le due relazioni possono essere scritte nella forma seguente, da cui si deduce la matrice **H**:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2/n \\ -2/n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$



16.5

Indichiamo con \mathbf{Z}_1 e \mathbf{Y}_2 l'impedenza e l'ammettenza, rispettivamente, del bipolo in serie alla porta 1 e del bipolo in parallelo alla porta 2:

$$\mathbf{Z}_1 = \frac{L/C}{sL + \frac{1}{sC}} = \frac{sL}{1 + s^2 LC} \qquad \mathbf{Y}_2 = \frac{1}{sL + \frac{1}{sC}} = \frac{sC}{1 + s^2 LC}$$

Convieni inglobare questi due bipoli nella rete due porte. Inglobando il bipolo sulla porta 2 si ottiene la nuova matrice della ammettenze:

$$[\mathbf{Y}'] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 + \mathbf{Y}_2 \end{bmatrix}$$

e invertendo si ricava la nuova matrice delle impedenze:

$$[\mathbf{Z}'] = [\mathbf{Y}']^{-1} = \frac{1}{1 + \mathbf{Y}_2} \begin{bmatrix} 5 + \mathbf{Y}_2 & -1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

Sommando \mathbf{Z}_1 all'elemento $_{11}$ di $[\mathbf{Z}']$ si ingloba anche il bipolo sulla porta 1; la matrice delle impedenze della rete complessiva è

$$[\mathbf{Z}''] = \begin{bmatrix} \frac{5 + \mathbf{Y}_2}{1 + \mathbf{Y}_2} + \mathbf{Z}_1 & -\frac{1}{1 + \mathbf{Y}_2} \\ -\frac{4}{1 + \mathbf{Y}_2} & \frac{1}{1 + \mathbf{Y}_2} \end{bmatrix}$$

La funzione di trasferimento in tensione con la porta 2 aperta si ottiene con la formula (16.13) del libro:

$$\mathbf{H}(s) = \frac{\mathbf{z}_{21}}{\mathbf{z}_{11}} = \frac{-4}{1 + \mathbf{Y}_2} \frac{1 + \mathbf{Y}_2}{5 + \mathbf{Y}_2 + \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_1 \mathbf{Y}_2} = \frac{-4}{5 + \mathbf{Y}_2(1 + \mathbf{Z}_1) + \mathbf{Z}_1}$$

Sostituendo le espressioni di \mathbf{Z}_1 e \mathbf{Y}_2 al denominatore si ricava

$$\mathbf{H}(s) = -\frac{4}{4 + \left(1 + \frac{sL}{1 + s^2 LC}\right) \left(1 + \frac{sC}{1 + s^2 LC}\right)}$$

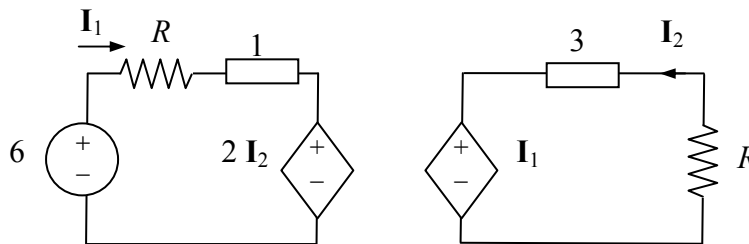
e, sviluppando i calcoli:

$$\mathbf{H}(s) = -\frac{4(1 + s^2 LC)^2}{5(LC)^2 s^4 + LC(L + C)s^3 + 11LCs^2 + (L + C)s + 5}$$

Si notino gli zeri doppi in $s = \pm j/\sqrt{LC}$ corrispondenti ai due bipoli risonanti.

16.6

Conviene ricavare la corrente \mathbf{I} in funzione di R . Sostituendo la rete due porte con il circuito equivalente con i parametri \mathbf{z} si ottiene lo schema seguente.



Utilizzando l'analisi delle maglie si ricava ($\mathbf{I}_2 = -\mathbf{I}$):

$$-6 + (R + 1)\mathbf{I}_1 - 2\mathbf{I} = 0$$

$$-\mathbf{I}_1 + 3\mathbf{I} + R\mathbf{I} = 0$$

Ricavando \mathbf{I}_1 dalla prima equazione e sostituendo nella seconda si ricava:

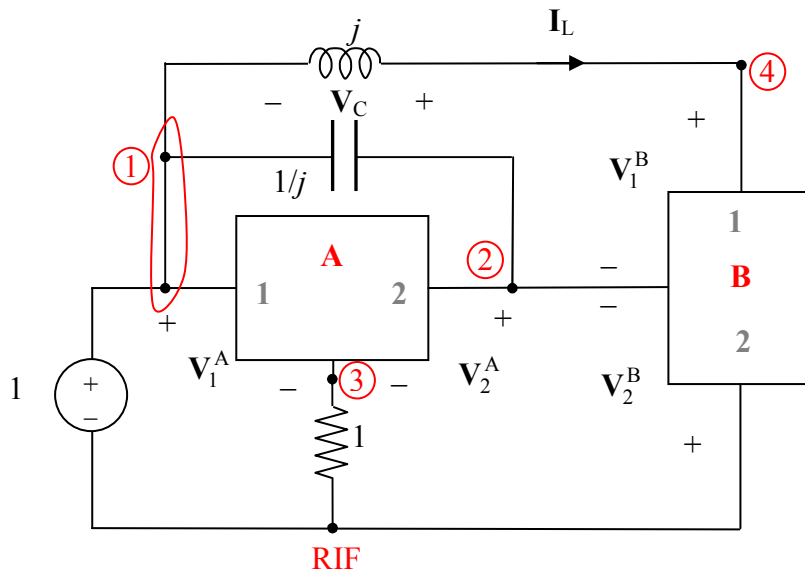
$$\mathbf{I} = \frac{6}{(R + 1)(R + 3) - 2}$$

$$R=1 \quad \mathbf{I} = 1; \quad R=2 \quad \mathbf{I} = 6/13 \cong 0,46 \text{ A}; \quad R=5 \quad \mathbf{I} = 6/46 \cong 0,13 \text{ A}.$$

16.7

$t < 0$

Il circuito simbolico nel dominio dei fasori è mostrato di seguito. Dobbiamo ricavare \mathbf{V}_C e \mathbf{I}_L con l'analisi nodale. Per comodità indichiamo con la lettera \mathbf{E} i fasori delle tensioni dei nodi rispetto al riferimento.



$$\text{LKC nodo 2: } (1 - \mathbf{E}_2)j + \mathbf{I}_1^B + \mathbf{I}_2^B = \mathbf{I}_2^A$$

$$\text{LKC nodo 3: } \mathbf{I}_1^A + \mathbf{I}_2^A = \mathbf{E}_3$$

$$\text{LKC nodo 4: } \frac{1 - \mathbf{E}_4}{j} = \mathbf{I}_1^B$$

Relazioni reti 2-porte:

$$\begin{aligned} \text{Rete A: } \quad \mathbf{I}_1^A &= 2\mathbf{V}_1^A - \mathbf{V}_2^A = 2(1 - \mathbf{E}_3) - (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_3) = 2 - \mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_3 \\ \mathbf{I}_2^A &= -\mathbf{V}_1^A + \mathbf{V}_2^A = -(1 - \mathbf{E}_3) + \mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_3 = \mathbf{E}_2 - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Rete B } \quad \mathbf{I}_1^B &= 2\mathbf{V}_1^B - \mathbf{V}_2^B = 2(\mathbf{E}_4 - \mathbf{E}_2) - (-\mathbf{E}_2) = -\mathbf{E}_2 + 2\mathbf{E}_4 \\ \mathbf{I}_2^B &= -\mathbf{V}_1^B + \mathbf{V}_2^B = -(\mathbf{E}_4 - \mathbf{E}_2) - \mathbf{E}_2 = -\mathbf{E}_4 \end{aligned}$$

Sostituendo le relazioni delle reti 2-porte nelle equazioni LKC si ottiene il seguente sistema:

$$\begin{bmatrix} 2+j & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -j & 0 & 1+2j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_2 \\ \mathbf{E}_3 \\ \mathbf{E}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+j \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Poiché \mathbf{E}_3 compare solo nella seconda equazione, possiamo considerare il sistema ridotto ottenuto eliminando la seconda equazione:

$$\begin{bmatrix} 2+j & -1 \\ -j & 1+2j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_2 \\ \mathbf{E}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+j \\ 1 \end{bmatrix}$$

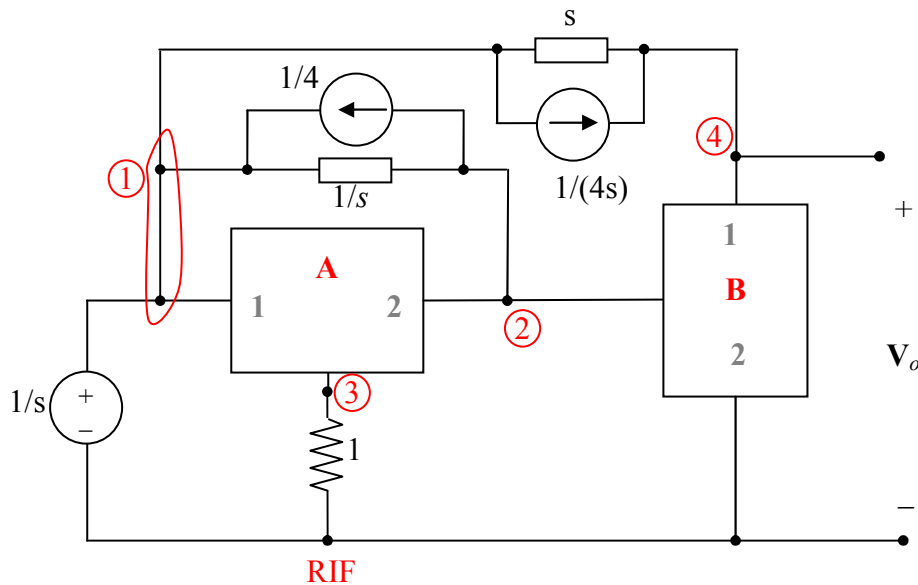
$$\text{Soluzione: } \quad \mathbf{E}_2 = \frac{3}{4} \quad \mathbf{E}_4 = \frac{1}{4}(2-j)$$

$$\mathbf{V}_C = \mathbf{E}_2 - 1 = -\frac{1}{4} \Rightarrow v_C(t) = -\frac{1}{4} \cos(t) \text{ V} \Rightarrow v_C(0) = -\frac{1}{4} \text{ V}$$

$$\mathbf{I}_L = \mathbf{I}_1^B = -\mathbf{E}_2 + 2\mathbf{E}_4 = \frac{1}{4}(1 - 2j) \Rightarrow i_L(t) = \frac{1}{4}[\cos(t) + 2\sin(t)] \Rightarrow i_L(0) = \frac{1}{4} \text{ A}$$

$t > 0$

Il circuito simbolico è mostrato nella figura seguente. Per le condizioni iniziali conviene utilizzare i generatori di corrente, evitando di creare altri nodi.



Procedendo come sopra si ottiene il sistema seguente:

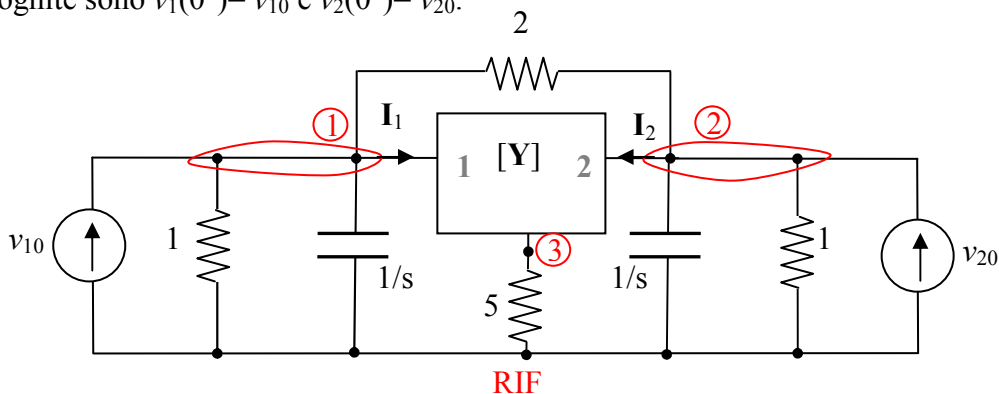
$$\begin{bmatrix} 2+s & -1 \\ -s & 1+2s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_2 \\ \mathbf{E}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{s} - \frac{1}{4} \\ \frac{1}{s} + \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Soluzione:

$$\mathbf{V}_o = \mathbf{E}_4 = \frac{2s^2 + 5s + 4}{4s(s+1)^2} = \frac{1}{s} - \frac{1/2}{s+1} - \frac{1/4}{(s+1)^2} \Rightarrow v_o(t) = 1 - \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{4}te^{-t} \text{ V}$$

16.8

(a) Circuito simbolico nel dominio di Laplace; il generatore di corrente è spento e le condizioni iniziali incognite sono $v_1(0^-) = v_{10}$ e $v_2(0^-) = v_{20}$.



Indichiamo con V_1, V_2 e V_3 le tensioni dei nodi rispetto al riferimento.

Dalla rappresentazione $[Y]$ si verifica facilmente che $I_1 + I_2 = 0$. Il resistore da 5Ω non è percorso da corrente e $V_3 = 0$. Pertanto è sufficiente applicare la LKC ai nodi 1 e 2:

$$\text{LKC nodo 1:} \quad -v_{10} + V_1(1+s) + \frac{V_1 - V_2}{2} + I_1 = 0$$

$$\text{LKC nodo 2:} \quad -v_{20} + V_2(1+s) + \frac{V_2 - V_1}{2} + I_2 = 0$$

Relazioni del doppio bipolo:

$$I_1 = \frac{1}{2}V_1 - \frac{1}{2}V_2 \quad I_2 = -\frac{1}{2}V_1 + \frac{1}{2}V_2$$

Sostituendo nelle equazioni LKC si ricava il sistema:

$$\begin{bmatrix} 2+s & -1 \\ -1 & 2+s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{10} \\ v_{20} \end{bmatrix}$$

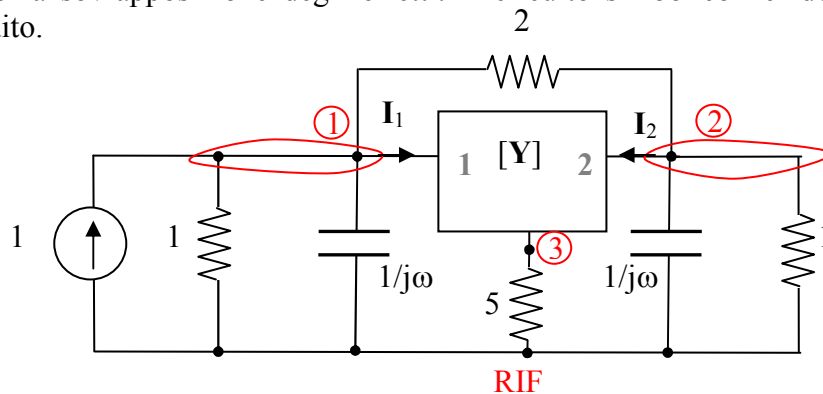
La soluzione è

$$V_1(s) = \frac{(2+s)v_{10} + v_{20}}{s^2 + 4s + 3} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+3}$$

$$A = \frac{v_{10} + v_{20}}{2} \quad B = \frac{v_{10} - v_{20}}{2}$$

Affinché la risposta sia del tipo Ke^{-t} , deve essere nullo il termine relativo al polo in $s = -3$, ovvero $B=0 \Rightarrow v_{10} = v_{20}$. L'energia immagazzinata nel circuito in $t=0^-$ è $W(0^-) = v^2(0^-) = 1 \text{ J}$, quindi le tensioni iniziali devono essere entrambe pari a 1 V.

(b) Applichiamo la sovrapposizione degli effetti. Il circuito simbolico nel dominio dei fasori è mostrato di seguito.



Confrontandolo con quello precedente si può scrivere direttamente il sistema di equazioni:

$$\begin{bmatrix} 2+j\omega & -1 \\ -1 & 2+j\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La soluzione è

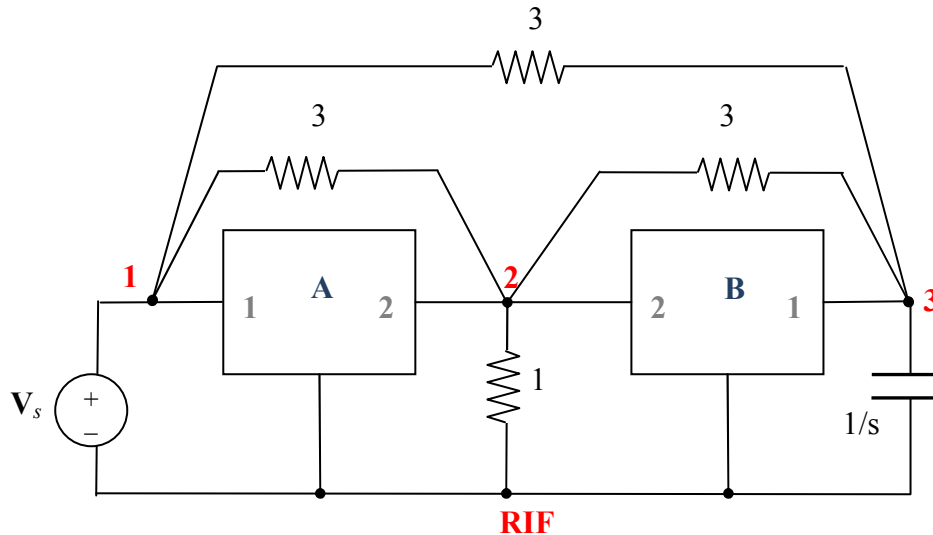
$$V_2 = \frac{1}{(1+j\omega)(3+j\omega)}$$

Per $\omega=1$ si ottiene $V_2 = \frac{\sqrt{5}}{10} \angle -\tan^{-1}(2)$. Per $\omega=3$ si ottiene $V_2 = \frac{\sqrt{5}}{30} \angle \tan^{-1}(2) + \pi$.

Infine $v_2(t) = \frac{\sqrt{5}}{10} \cos(t - \tan^{-1}(2)) - \frac{\sqrt{5}}{30} \cos(3t + \tan^{-1}(2))$ V.

16.9

Di seguito il circuito simbolico, dopo aver applicato la trasformazione stella-triangolo.



Analisi nodale:

$$\text{LKC nodo 2: } \mathbf{I}_2^A + \mathbf{I}_2^B + \mathbf{V}_2 + (\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1)/3 + (\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_3)/3 = 0$$

$$\text{LKC nodo 3: } \mathbf{I}_1^B + (\mathbf{V}_3 - \mathbf{V}_2)/3 + (\mathbf{V}_3 - \mathbf{V}_1)/3 + s\mathbf{V}_3 = 0$$

Le tensioni di porta coincidono con le tensioni dei nodi rispetto al riferimento. Esprimendo le correnti di porta in funzione delle tensioni di nodo, attraverso la matrice $[\mathbf{Y}]$, si ottiene il sistema seguente:

$$\begin{bmatrix} 11/3 & 0 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_2 \\ \mathbf{V}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{V}_s/3 \end{bmatrix}$$

Sostituendo a \mathbf{V}_s la trasformata di $\sin(t)$ si ottiene:

$$\mathbf{V}_C(s) = \mathbf{V}_3(s) = \frac{1}{3(s+1)(s^2+1)}$$

Il polo in $s = -1$ ha il residuo $1/6$; i poli in $s = \pm j$ hanno i residui $\mp (1+j)/12$.

L'antitrasformata è $v_C(t) = \frac{1}{6}e^{-t} + \frac{\sqrt{2}}{6} \cos(t - 135^\circ)$ V.

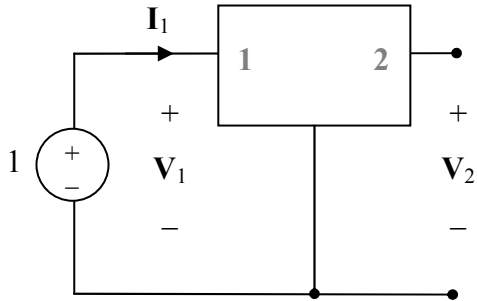
Il fasore della risposta permanente in regime sinusoidale è $\mathbf{V}_C = \frac{\sqrt{2}}{6} \angle -135^\circ$. La potenza reattiva

assorbita dal condensatore è $Q = -\frac{1}{2}B|\mathbf{V}_C|^2 = -\frac{1}{36}$ VAR.

16.10

$t < 0$

Il circuito è in regime sinusoidale e dobbiamo ricavare le condizioni iniziali in $t = 0^-$. Applichiamo il teorema di Thevenin al bipolo a sinistra del parallelo RLC (figura seguente).



Tensione a vuoto. In base alla rappresentazione $[Z]$ abbiamo ($I_2 = 0$):

$$V_1 = 1 = 2I_1 \quad V_T = V_2 = I_1 = \frac{1}{2} V$$

L'impedenza di Thevenin si ricava con la formula (16.21) del libro: $Z_T = z_{22} - \frac{z_{12}z_{21}}{z_{11}} = \frac{1}{2} \Omega$.

Applichiamo ora il teorema di Thevenin al bipolo a destra del parallelo RLC (figura seguente). La tensione a vuoto è nulla poiché non ci sono generatori indipendenti.

In base alla rappresentazione $[Z]$ abbiamo:

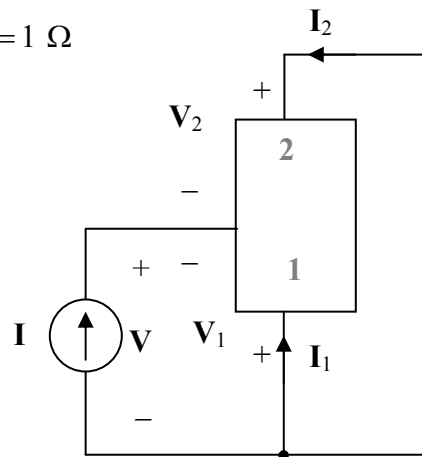
$$V_1 = 2I_1 + I_2 \quad V_2 = I_1 + I_2$$

Poiché $V_1 = V_2$ abbiamo

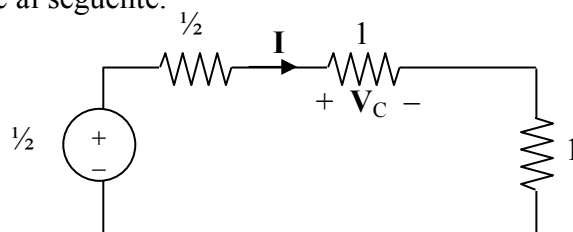
$$2I_1 + I_2 = I_1 + I_2 \Rightarrow I_1 = 0$$

Quindi

$$V = -V_1 = -I_2 \quad I = -I_2 \quad Z_T = \frac{V}{I} = 1 \Omega$$



Inoltre, il parallelo $L//C$ è in risonanza quindi si comporta come un c.a. Il circuito dato equivale al seguente.



Si ricava: $\mathbf{I} = 1/5$ $\mathbf{V}_C = 1/5$ $\mathbf{I}_L = \frac{\mathbf{V}_C}{j} = \frac{1}{j5}$.

Quindi

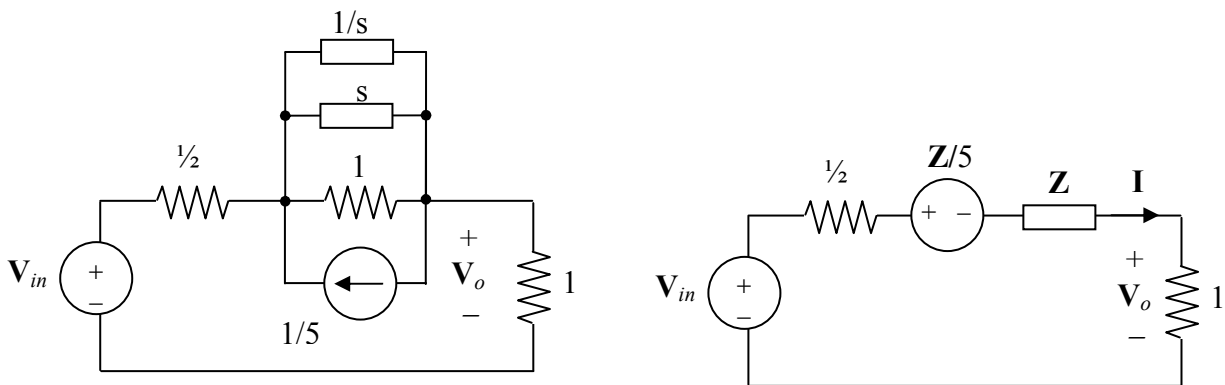
$$v_C(t) = \frac{1}{5} \cos(t) \text{ V} \Rightarrow v_C(0^-) = 1/5 \text{ V}$$

$$i_L(t) = \frac{1}{5} \text{sen}(t) \text{ A} \Rightarrow i_L(0^-) = 0 \text{ V}$$

$t > 0$

Il circuito nel dominio di Laplace è mostrato nella figura seguente (a sinistra). La trasformata dell'ingresso è $\mathbf{V}_{in} = \frac{1}{2} \mathbf{V}_s = \frac{s}{2(s^2 + 4)}$. Il circuito a destra si ottiene con la trasformazione del

generatore di corrente: $\mathbf{Z} = \frac{1}{1 + s + 1/s} = \frac{s}{s^2 + s + 1}$.



Si ottiene

$$\mathbf{V}_o = \mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}_{in} - \frac{\mathbf{Z}}{5}}{\frac{3}{2} + \mathbf{Z}} = \frac{s(3s^2 + 5s - 3)}{5(s^2 + 4)(3s^2 + 5s + 3)} = \frac{s(3s^2 + 5s + 3 - 6)}{5(s^2 + 4)(3s^2 + 5s + 3)}$$

$$= \frac{s}{5(s^2 + 4)} - \frac{6s}{5(s^2 + 4)(3s^2 + 5s + 3)}$$

Il primo termine ha per antitrasformata $0,2 \cos(2t)$. Il secondo termine ha i poli $\pm j2$ e $-5/6 \pm j\sqrt{11}/6$. Calcolando i residui si ottiene infine

$$v_o(t) = 0,2 \cos 2t + 0,09 \cos(2t + 48^\circ) - 0,18 e^{-5t/6} \cos\left(\frac{\sqrt{11}}{6} t + 56^\circ\right) \text{ V}$$

16.11

(a) Non è reciproco poiché $z_{12} \neq z_{21}$; (b) è reciproco poiché $h_{12} = -h_{21}$; (c) è reciproco perché costituito da elementi reciproci; (d) non è reciproco poiché nel BJT $h_{12} \neq -h_{21}$.

16.12

Circuito in (a). Tenendo conto che $\mathbf{V}_2 = 0$, e utilizzando la rappresentazione $[\mathbf{Y}]$, possiamo scrivere:

$$\mathbf{I}_S = y_{11} \mathbf{V}_1 \quad -\mathbf{I}_2 = y_{21} \mathbf{V}_1$$

quindi

$$\mathbf{I}_2 = -\frac{y_{21}}{y_{11}} \mathbf{I}_S \quad (1)$$

Circuito in (b). Tenendo conto che $\mathbf{I}_1 = 0$, utilizzando la rappresentazione $[\mathbf{Z}]$ possiamo scrivere:

$$\mathbf{V}_1 = z_{12} \mathbf{I}_2 \quad \mathbf{V}_S = z_{22} \mathbf{I}_2$$

quindi

$$\mathbf{V}_1 = \frac{z_{12}}{z_{22}} \mathbf{V}_S \quad (2)$$

Inoltre, dalla Tabella 16.2 del libro ricaviamo le seguenti relazioni:

$$y_{21} = -\frac{z_{21}}{\Delta_Z} \quad y_{11} = \frac{z_{22}}{\Delta_Z}$$

Sostituendo nella (1) si ricava $\mathbf{I}_2 = \frac{z_{21}}{z_{22}} \mathbf{I}_S$; poiché, per la reciprocità, $z_{12} = z_{21}$, osservando la (2)

vediamo che $\mathbf{I}_2 = \mathbf{V}_1$ se $\mathbf{I}_S = \mathbf{V}_S$.

16.15

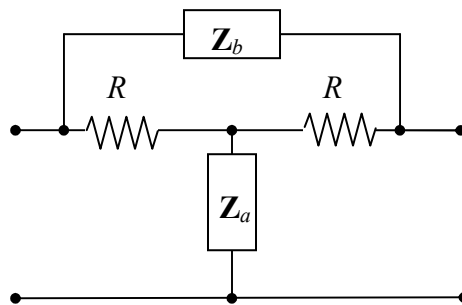
Per la proprietà di reciprocità la corrente nel resistore R in (a) è uguale alla corrente nel resistore da 2Ω in (b); questa vale $40/2 = 20$ A. Quindi $30/R = 20 \Rightarrow R = 1,5 \Omega$.

16.16

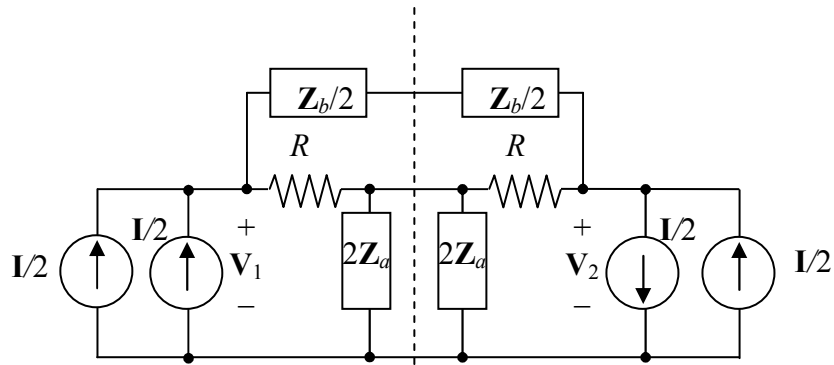
(a) La condizione richiesta è

$$\mathbf{Z}_{in} = \frac{\mathbf{Z}_a(\mathbf{Z}_b + R)}{\mathbf{Z}_a + \mathbf{Z}_b + R} = R \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Z}_a = R + \frac{R^2}{\mathbf{Z}_b} = R(1 + R\mathbf{Y}_b)$$

(c) Conviene ricavare la matrice $[\mathbf{Z}]$ del doppio bipolo simmetrico nella figura seguente.

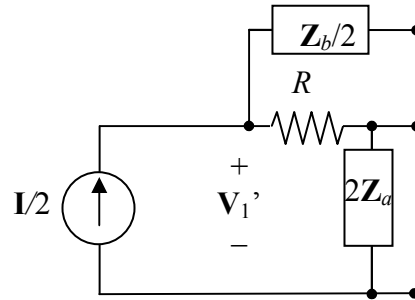


I parametri z_{11} e z_{21} si ottengono dallo schema seguente, in cui si utilizza la presenza di un asse di simmetria (pp. 183-185 del libro) e la sovrapposizione degli effetti. Il circuito aperto della porta 2 è rappresentato mediante due generatori di corrente di verso opposto.



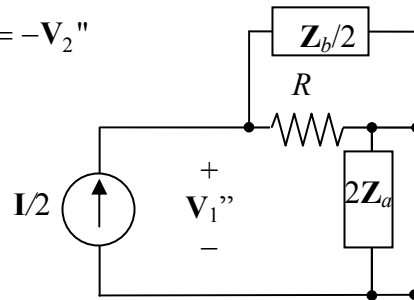
Il contributo dei generatori simmetrici si ricava dalla figura seguente:

$$V_1' = \frac{I}{2} (R + 2Z_a) = V_2'$$



Il contributo dei generatori antisimmetrici si ricava dalla figura seguente:

$$V_1'' = \frac{I}{2} \frac{RZ_b/2}{R + Z_b/2} = \frac{I}{2} \frac{RZ_b}{Z_b + 2R} = -V_2''$$



I parametri sono:

$$z_{11} = \frac{V_1}{I} = \frac{1}{2} (R + 2Z_a) + \frac{1}{2} \left(\frac{RZ_b}{Z_b + 2R} \right) \quad (1)$$

$$z_{21} = \frac{V_2}{I} = \frac{1}{2} (R + 2Z_a) - \frac{1}{2} \left(\frac{RZ_b}{Z_b + 2R} \right) \quad (2)$$

L'impedenza di ingresso in Figura E.14 (c) si ottiene con la formula (16.21) del libro; tenendo conto della simmetria, la condizione richiesta è

$$Z_{in} = z_{11} - \frac{z_{12}z_{21}}{z_{22} + R} = z_{11} - \frac{z_{12}^2}{z_{11} + R} = R$$

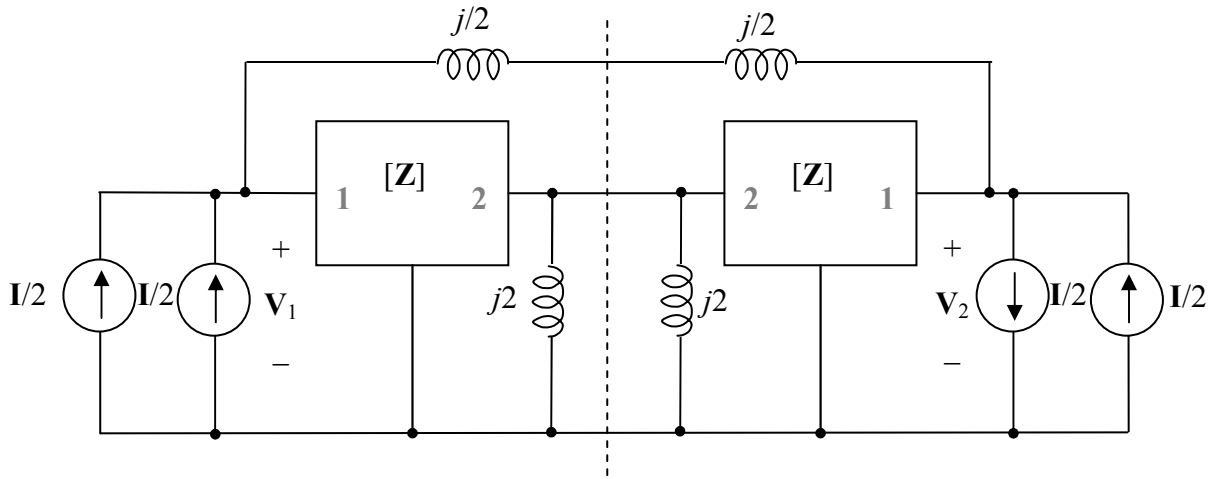
che equivale alla seguente

$$(z_{11} + z_{12})(z_{11} - z_{12}) = R^2$$

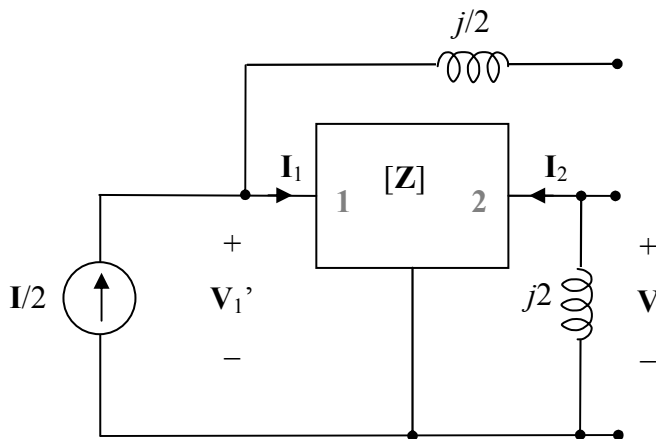
Sostituendo le espressioni (1) (2) si ottiene la condizione $Z_a Z_b = R^2$.

16.17

Possiamo sfruttare la simmetria del circuito sdoppiando le induttanze, come nella figura seguente.



Le porte del doppio bipolo complessivo sono chiuse con una coppia di generatori di corrente. La corrente di sinistra vale I , la corrente di destra è nulla (circuito aperto). Lo schema permette dunque di ricavare i parametri $z_{11} = V_1/I$ e $z_{21} = V_2/I$. Per la simmetria abbiamo inoltre $z_{22} = z_{11}$ e $z_{12} = z_{21}$. Applicando la *sovrapposizione degli effetti*, possiamo considerare i due casi in cui i generatori sono simmetrici oppure antisimmetrici (pp. 183-185 del libro). Il contributo dei generatori simmetrici si ricava dallo schema seguente, in cui i terminali a destra sono tutti aperti (indichiamo con un apice l'effetto dei generatori simmetrici).



Utilizzando la rappresentazione $[Z]$ possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} V_1' &= I_1 - I_2 \\ V &= I_1 + 2I_2 = -j2I_2 \end{aligned}$$

L'ultimo passaggio deriva dal fatto che la porta 2 è chiusa con una impedenza $j2$.

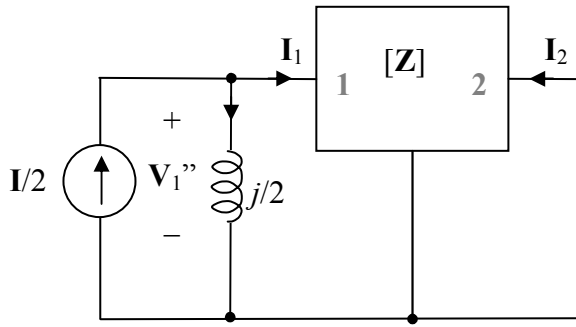
Per la LKC abbiamo: $I_1 = I/2$.

Ricavando I_2 dalla seconda relazione e sostituendola nella prima si ricava infine

$$V_1' = \frac{I}{2} \frac{3 + j2}{2(1 + j)}$$

$V_2' = V_1'$ per la simmetria.

Il contributo dei generatori antisimmetrici si ricava dallo schema seguente, in cui la porta 2 è cortocircuitata (indichiamo con un doppio apice l'effetto dei generatori antisimmetrici).



Utilizzando la rappresentazione $[Z]$ possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} V_1'' &= I_1 - I_2 \\ 0 &= I_1 + 2I_2 \end{aligned}$$

Ricavando I_2 dalla seconda relazione e sostituendola nella prima si ricava

$$V_1'' = \frac{3}{2} I_1$$

Inoltre con la LKC abbiamo

$$I_1 = \frac{I}{2} - \frac{V_1''}{j/2}$$

che sostituito nella relazione precedente fornisce

$$V_1'' = \frac{3jI}{4(3+j)}$$

$V_2'' = -V_1''$ poiché i generatori sono antisimmetrici.

Sommando i due effetti abbiamo:

$$V_1 = \frac{I}{2} \frac{3+j2}{2(1+j)} + \frac{3jI}{4(3+j)} \Rightarrow z_{11} = \frac{V_1}{I} = \frac{3+j2}{2(1+j)} + \frac{3j}{4(3+j)} = 0,7 + j0,1 \Omega$$

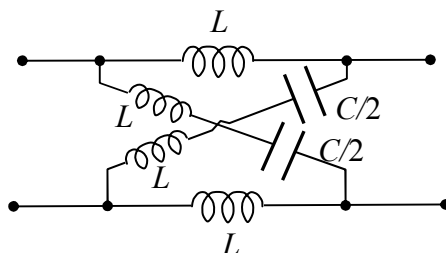
$$V_2 = \frac{I}{2} \frac{3+j2}{2(1+j)} - \frac{3jI}{4(3+j)} \Rightarrow z_{21} = \frac{V_2}{I} = \frac{3+j2}{2(1+j)} - \frac{3j}{4(3+j)} = 0,55 - j0,35 \Omega$$

16.18

Consideriamo come esempio il circuito a sinistra. Si tratta di una rete a T la cui rappresentazione $[Z]$ si ricava facilmente: $z_{11} = z_{22} = sL + \frac{1}{sC}$, $z_{12} = z_{21} = \frac{1}{sC}$. Utilizzando le relazioni (16.44) del libro abbiamo:

$$\begin{aligned} Z_a &= z_{11} + z_{12} = sL + \frac{2}{sC} & Z_b &= z_{11} - z_{12} = sL \end{aligned}$$

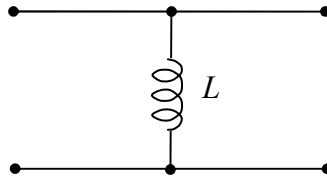
Il traliccio corrispondente è mostrato di seguito.



16.19

La rete è la connessione serie-serie del doppio bipolo con la matrice $[\mathbf{Y}]$ e del doppio bipolo nella figura seguente, che ha la matrice delle impedenze a vuoto

$$[\mathbf{Z}'] = j\omega L \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$



L'inversa della $[\mathbf{Y}]$ è

$$[\mathbf{Z}] = [\mathbf{Y}]^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

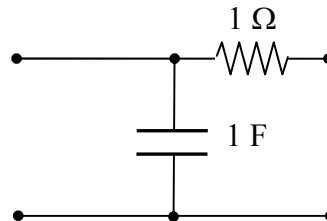
Infine possiamo sommare le due matrici:

$$[\mathbf{Z}]_{serie} = [\mathbf{Z}] + [\mathbf{Z}'] = \begin{bmatrix} 0,25 + j\omega L & 0,25 + j\omega L \\ -0,5 + j\omega L & 0,5 + j\omega L \end{bmatrix}$$

16.20

(a) La rete è la connessione serie-serie del doppio bipolo nella figura seguente, con matrice delle impedenze a vuoto

$$[\mathbf{Z}'] = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s} \\ \frac{1}{s} & 1 + \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$



e di una rete a T resistiva, con matrice delle impedenze a vuoto

$$[\mathbf{Z}''] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Sommando le due matrici si ottiene

$$[\mathbf{Z}] = \begin{bmatrix} \frac{2s+1}{s} & \frac{s+1}{s} \\ \frac{s+1}{s} & \frac{3s+1}{s} \end{bmatrix}$$

(b) La rete è la connessione serie-serie dei doppi bipoli seguenti:



Per la rete a π si ricava facilmente la matrice delle ammettenze:

$$[\mathbf{Y}] = \begin{bmatrix} s+1 & -s \\ -s & s+1 \end{bmatrix}$$

La matrice delle impedenze è

$$[\mathbf{Z}] = [\mathbf{Y}]^{-1} = \frac{1}{2s+1} \begin{bmatrix} s+1 & s \\ s & s+1 \end{bmatrix}$$

Per l'altro doppio bipolo si ricava facilmente

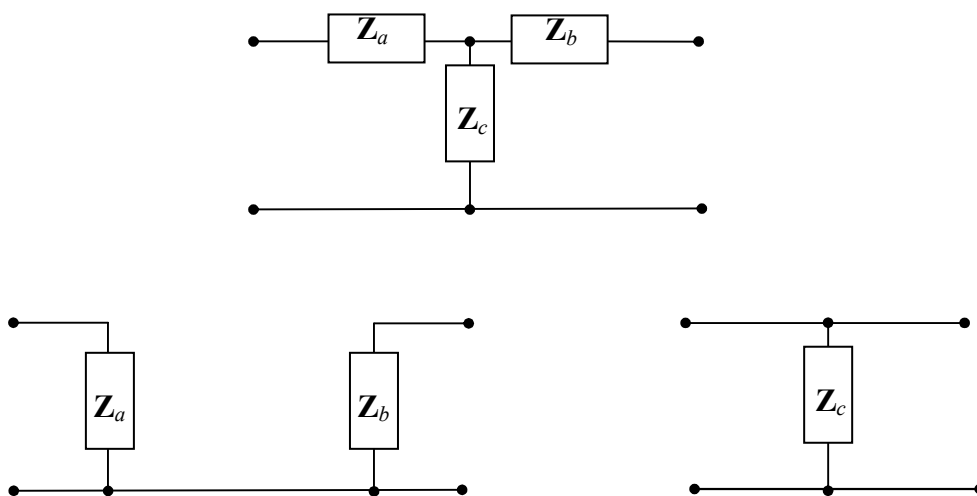
$$[\mathbf{Z}'] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Sommando le due matrici abbiamo

$$[\mathbf{Z}]_{serie} = [\mathbf{Z}] + [\mathbf{Z}'] = \frac{1}{2s+1} \begin{bmatrix} 3s+2 & 3s+1 \\ 3s+1 & 3s+2 \end{bmatrix}$$

16.21

La rete a T nella figura seguente si può ottenere come collegamento serie-serie dei doppi bipoli riportati di seguito.

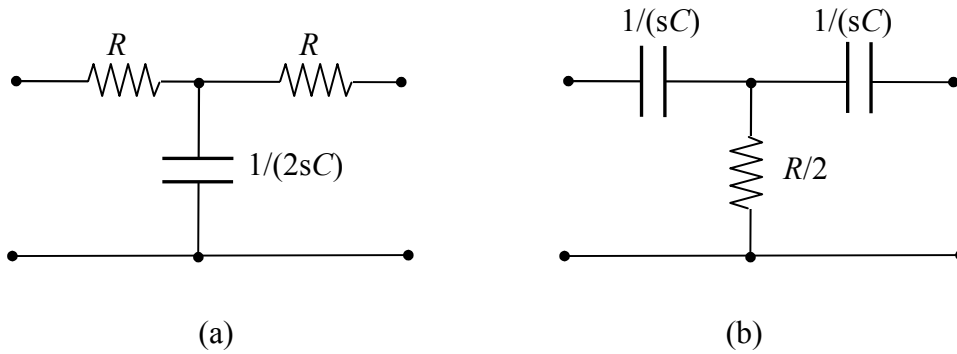


Le due matrici delle impedenze sono:

$$[\mathbf{Z}]^A = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_a & 0 \\ 0 & \mathbf{Z}_b \end{bmatrix} \quad [\mathbf{Z}]^B = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_c & \mathbf{Z}_c \\ \mathbf{Z}_c & \mathbf{Z}_c \end{bmatrix}$$

16.23

Il doppio bipolo risulta dalla connessione parallelo-parallelo delle due reti a T mostrate di seguito.



La matrice delle impedenze per la rete in (a) si ricava facilmente:

$$[\mathbf{Z}^A] = \begin{bmatrix} R + 1/(2sC) & 1/(2sC) \\ 1/(2sC) & R + 1/2sC \end{bmatrix}$$

L'inversa è

$$[\mathbf{Y}^A] = [\mathbf{Z}^A]^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} R + 1/(2sC) & -1/(2sC) \\ -1/(2sC) & R + 1/2sC \end{bmatrix}$$

dove $\Delta = R(1+RCs)/(sC)$. La rete è simmetrica quindi basta calcolare y_{11} e y_{12} :

$$y_{11}^A = \frac{1 + 2RCs}{2R(1 + RCs)} \quad y_{12}^A = -\frac{1}{2R(1 + RCs)}$$

Per la rete in (b) abbiamo

$$[\mathbf{Z}^B] = \begin{bmatrix} \frac{1}{sC} + \frac{R}{2} & \frac{R}{2} \\ \frac{R}{2} & \frac{1}{sC} + \frac{R}{2} \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{Y}^B] = [\mathbf{Z}^B]^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \frac{1}{sC} + \frac{R}{2} & -\frac{R}{2} \\ -\frac{R}{2} & \frac{1}{sC} + \frac{R}{2} \end{bmatrix}$$

dove $\Delta = (1+RCs)/(sC)^2$. Si ottiene

$$y_{11}^B = \frac{(2 + RCs)sC}{2(1 + RCs)} \quad y_{12}^B = -\frac{R(sC)^2}{2R(1 + RCs)}$$

La matrice delle ammettenze richiesta è la somma delle matrici $[Y]$ delle reti in (a) e (b):

$$y_{11} = y_{11}^A + y_{11}^B = \frac{(RCs)^2 + 4RCs + 1}{2R(1 + RCs)} = y_{22}$$

$$y_{12} = y_{12}^A + y_{12}^B = -\frac{1 + (RCs)^2}{2R(1 + RCs)} = y_{21}$$

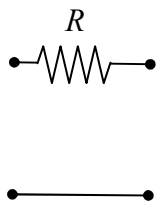
La funzione di trasferimento richiesta è (v. formula (16.15) del libro):

$$H(s) = -\frac{y_{21}}{y_{22}} = \frac{1 + (RCs)^2}{(RCs)^2 + 4RCs + 1}$$

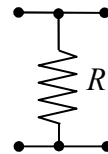
Il numeratore ha due zeri immaginari in $s = \pm j/(RC)$ quindi la risposta in frequenza si annulla per $\omega=1/(RC)$.

16.24

Utilizzando i risultati a pag. 690 del libro si ottiene:



$$[T^A] = \begin{bmatrix} 1 & R \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$[T^B] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/R & 1 \end{bmatrix}$$

Per il trasformatore abbiamo (v. pag. 658 del libro):

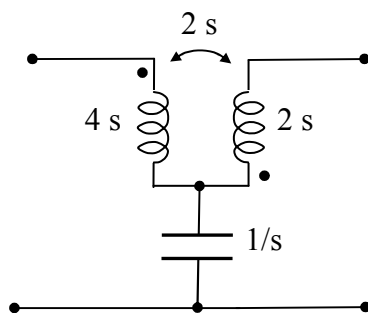
$$[T^C] = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Moltiplicando nell'ordine le tre matrici si ricava infine

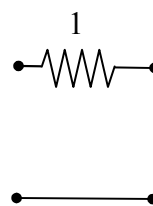
$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 2R \\ 1/2R & 2 \end{bmatrix}$$

16.25

Il doppio bipolo si ottiene dalla connessione parallelo-parallelo dei doppi bipoli seguenti:



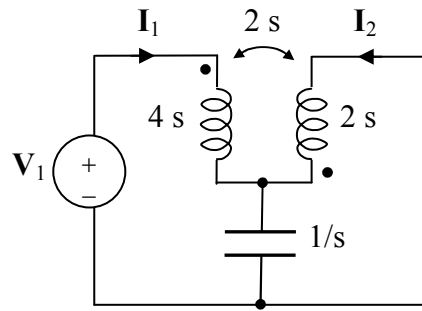
(a)



(b)

Il doppio bipolo in (a) è reciproco quindi è sufficiente ricavare y_{11} , y_{12} e y_{22} .

Consideriamo lo schema seguente.



Applicando la LKT alle due maglie si scrivono le equazioni

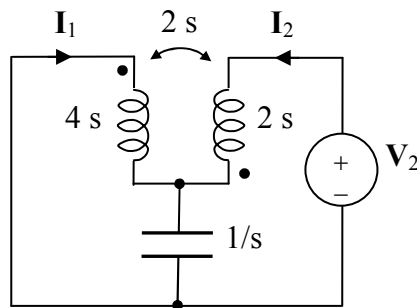
$$V_1 = 4sI_1 - 2sI_2 + \frac{1}{s}(I_1 + I_2)$$

$$0 = 2sI_2 - 2sI_1 + \frac{1}{s}(I_1 + I_2)$$

Ricavando I_2 dalla 2^a equazione e sostituendola nella prima si ricava

$$I_1 = \frac{2s^2 + 1}{4s^3 + 10s} V_1 \quad \Rightarrow \quad y_{11}^A = \left. \frac{I_1}{V_1} \right|_{V_2=0} = \frac{2s^2 + 1}{4s^3 + 10s}$$

Consideriamo lo schema seguente.



Applicando la LKT alle due maglie si scrivono le equazioni

$$0 = 4sI_1 - 2sI_2 + \frac{1}{s}(I_1 + I_2)$$

$$V_2 = 2sI_2 - 2sI_1 + \frac{1}{s}(I_1 + I_2)$$

da cui si ricava

$$y_{12}^A = \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{V_1=0} = \frac{2s^2 - 1}{4s^3 + 10s} = y_{21}^A \quad y_{22}^A = \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{V_1=0} = \frac{1 + 4s^2}{4s^3 + 10s}$$

Per la rete in (b) abbiamo (v. pag. 687 del libro):

$$[\mathbf{Y}^B] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Sommando le due matrici si ottiene la matrice $[\mathbf{Y}]$ desiderata. In particolare si ricava

$$y_{21} = y_{21}^A - 1 = \frac{-4s^3 + 2s^2 - 10s - 1}{4s^3 + 10s}$$

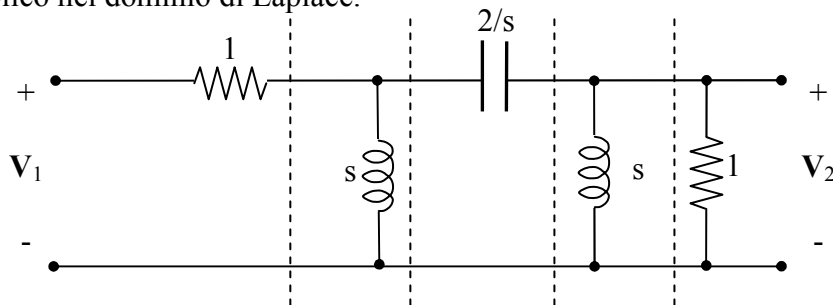
$$y_{22} = y_{22}^A + 1 = \frac{4s^3 + 4s^2 + 10s + 1}{4s^3 + 10s}$$

Infine

$$\mathbf{H}(s) = -\frac{y_{21}}{y_{22}} = \frac{4s^3 - 2s^2 + 10s + 1}{4s^3 + 4s^2 + 10s + 1} = \frac{4s^3 + 4s^2 + 10s + 1 - 6s^2}{4s^3 + 4s^2 + 10s + 1} = 1 - \frac{6s^2}{4s^3 + 4s^2 + 10s + 1}$$

16.26

Circuito simbolico nel dominio di Laplace.



Utilizzando i risultati a pag. 690 del libro si ricavano le matrici di trasmissione dei singoli stadi:

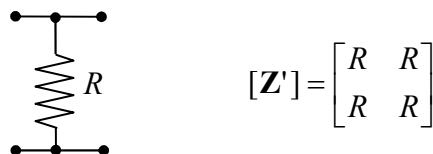
$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/s & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2/s \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/s & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Sviluppando i prodotti, per l'elemento (1,1) si ottiene $\mathbf{A} = \frac{2(s+1)(s^2 + s + 1)}{s^3}$, quindi

$$\mathbf{H}(s) = \frac{1}{\mathbf{A}} = \frac{s^3}{2(s+1)(s^2 + s + 1)}$$

16.27

(a) Il doppio bipolo è la connessione serie-serie del BJT con il doppio bipolo nella figura seguente.



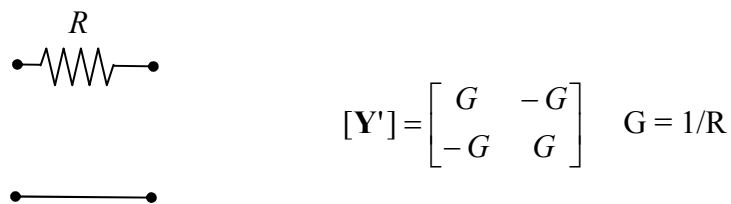
La matrice delle impedenze del transistor si ricava dalla Tabella 16.2 del libro (pag. 657):

$$[\mathbf{Z}'] = \frac{1}{h_{22}} \begin{bmatrix} \Delta_H & h_{12} \\ -h_{21} & 1 \end{bmatrix}$$

dove $\Delta_H = h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21}$. Sommando le due matrici si ricava:

$$[\mathbf{Z}] = \begin{bmatrix} \frac{\Delta_H}{h_{22}} + R & \frac{h_{12}}{h_{22}} + R \\ \frac{-h_{21}}{h_{22}} + R & \frac{1}{h_{22}} + R \end{bmatrix}$$

(b) Il doppio bipolo è la connessione parallelo-parallelo del BJT con il doppio bipolo nella figura seguente.



La matrice delle ammettenze del transistor si ricava dalla Tabella 16.2 del libro:

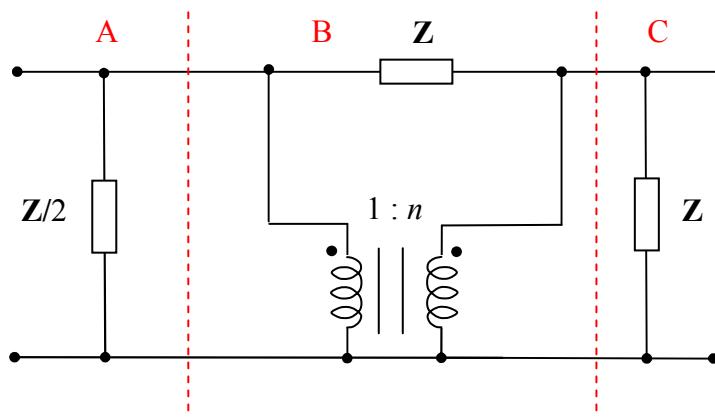
$$[\mathbf{Y}'] = \frac{1}{h_{11}} \begin{bmatrix} 1 & -h_{12} \\ h_{21} & \Delta_H \end{bmatrix}$$

dove $\Delta_H = h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21}$. Sommando le due matrici si ricava:

$$[\mathbf{Y}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{h_{11}} + G & -\frac{h_{12}}{h_{11}} - G \\ \frac{h_{21}}{h_{11}} - G & \frac{\Delta_H}{h_{11}} + G \end{bmatrix}$$

16.28

Il doppio bipolo può essere visto come la connessione in cascata di tre stadi (figura seguente).



Utilizzando i risultati a pag. 690 del libro si ottengono facilmente le matrici di trasmissione del primo e dell'ultimo stadio:

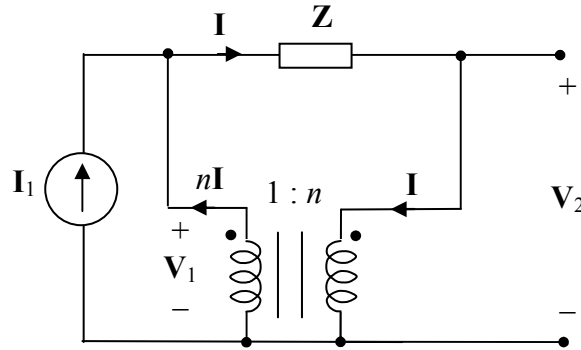
$$[\mathbf{T}^A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2/Z & 1 \end{bmatrix} \quad [\mathbf{T}^C] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/Z & 1 \end{bmatrix}$$

Lo stadio centrale è la connessione parallelo-parallelo del trasformatore con il bipolo di impedenza Z ; tuttavia il trasformatore ideale non ha la rappresentazione $[\mathbf{Y}]$ quindi non possiamo sfruttare tale connessione; conviene ricavare direttamente i parametri di trasmissione.

Anzitutto, grazie alla relazione del trasformatore ideale abbiamo $V_1 = V_2/n$, dunque possiamo affermare che $\mathbf{A} = 1/n$ e $\mathbf{B}=0$.

I parametri \mathbf{C} e \mathbf{D} vanno ricavati con il procedimento descritto a pag. 655 del libro.

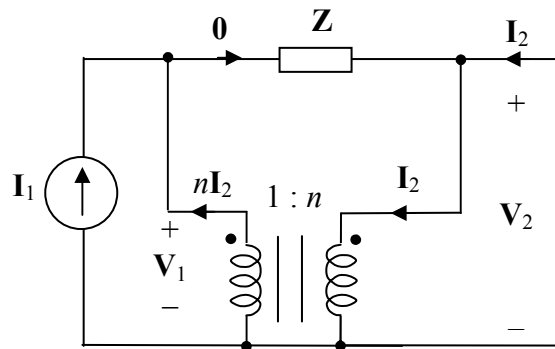
\mathbf{C} si ottiene dallo schema seguente con la porta 2 aperta.



$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{I} - n\mathbf{I} = (1-n) \frac{V_1 - V_2}{Z} = (1-n) \frac{V_2 \left(\frac{1}{n} - 1 \right)}{Z} = V_2 \frac{(1-n)^2}{nZ}$$

$$\mathbf{C} = \frac{\mathbf{I}_1}{V_2} = \frac{(1-n)^2}{nZ}$$

\mathbf{D} si ottiene dallo schema seguente con la porta 2 in c.c.



Poiché $V_1=V_2/n=0$ la corrente in Z è nulla, quindi $\mathbf{I}_1 = -n\mathbf{I}_2 \Rightarrow \mathbf{D} = -\frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{I}_2} = n$.

La matrice di trasmissione richiesta è:

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{Z} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{n} & 0 \\ \frac{(1-n)^2}{nZ} & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{Z} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{n} & 0 \\ \frac{2n^2 - 2n + 3}{nZ} & n \end{bmatrix}$$