8.1

Per $t \to \infty$ il condensatore si comporta come un circuito aperto pertanto la corrente tende a zero: la funzione non può essere la (c). Ricavando α e ω_0 si ottengono i seguenti valori: $\alpha = \frac{R}{2L} = 5 \times 10^3$ e $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 10^3$. Essendo $\alpha > \omega_0$ il circuito è sovrasmorzato quindi la corrente non può essere oscillatoria come nel grafico (a). La funzione richiesta è la (b).

8.2

Per $t \to \infty$ il condensatore si comporta come un circuito aperto: la corrente tende a zero, quindi anche v_R si annulla. Per $t=0^-$ l'interruttore è aperto quindi la corrente è nulla così come la tensione v_R. Pertanto v_R corrisponde al grafico (a).
Per $t \to \infty$ il condensatore si comporta come un circuito aperto e l'induttore come un c.c.; la corrente tende a zero quindi $v_R=0$. Dalla LKT deriva che v_C tende a 12 V. Inoltre $v_C(0^-) = 0$ come specificato nel testo; quindi v_C corrisponde al grafico (c).

8.3

E' un circuito RLC parallelo. Dalla espressione di $v(t)$ si deduce: $\alpha = ½$, $\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Dal valore di α ricaviamo la capacità: $\alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{1}{2} \Rightarrow C = 1$ F. Inoltre $\beta = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \omega_0 = 1$; essendo $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, abbiamo L = 1 H.

8.4

(1) Condizioni iniziali del circuito.
In $t = 0^-$ l'interruttore è in posizione 1 quindi la corrente dell'induttore è nulla. Il condensatore è un c.a. pertanto la sua tensione è 12 V.

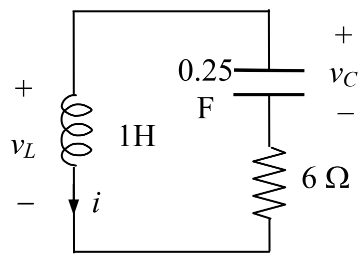
(2) α e ω_0
Con l'interruttore in posizione 2 si ottiene un circuito RLC serie con

$$\alpha = \frac{R}{2L} = 3 \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 2$$

$\alpha > \omega_0 \Rightarrow$ il circuito è sovrasmorzato. Le frequenze naturali sono:

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -3 + \sqrt{5} \cong -0{,}76 \qquad s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -3 - \sqrt{5} \cong -5{,}23$$

(3) Condizioni iniziali dell'equazione differenziale (ED).
Il valore $i(0^+)$ è nullo per la continuità della corrente dell'induttore. La derivata della corrente è $\frac{di}{dt}(0^+) = \frac{v_L(0^+)}{L}$, essendo v_L la tensione dell'induttore (figura seguente).



Con la LKT si scrive: $v_L(0^+) + 6i(0^+) - v_C(0^+) = 0 \Rightarrow\ v_L(0^+) = v_C(0^+) = 12\,\text{V}$ (la tensione del condensatore è continua). Infine $\frac{di}{dt}(0^+) = 12$.

(4) Calcolo dei coefficienti.

Utilizzando le formule (8.20) del libro, con $x = i$, abbiamo: $A_1 = \frac{6}{\sqrt{5}} \cong 2{,}68,\ A_2 = -\frac{6}{\sqrt{5}}$.

Infine, con la formula (8.11): $i(t) = \frac{6}{\sqrt{5}}\left(e^{-(3-\sqrt{5})t} - e^{-(3+\sqrt{5})t}\right)$A.

8.5

(1) Condizioni iniziali del circuito.

In $t = 0^-$ l'interruttore è chiuso. Il condensatore è un c.a. e l'induttore un c.c. Il resistore da 4 Ω non è percorso da corrente, dunque $i_L(0^-) = 9/3 = 3$ A, $v_C(0^-) = 0$ V.

(2) α e ω_0

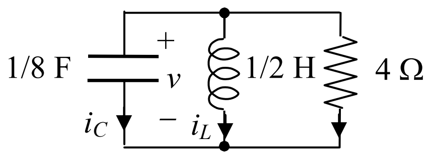
Con l'interruttore aperto si ottiene un circuito RLC parallelo. I parametri sono:

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = 1 \qquad\qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 4$$

$\alpha<\omega_0 \Rightarrow$ il circuito è sottosmorzato, con pulsazione $\beta = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = \sqrt{15}$ rad/s.

(3) Condizioni iniziali dell'ED.

Il valore $v(0^+)$ è nullo per la continuità della tensione del condensatore. La derivata della tensione è $\frac{dv}{dt}(0^+) = \frac{i_C(0^+)}{C}$, essendo i_C la corrente del condensatore (figura seguente).



Con la LKC si scrive: $i_C(0^+) + i_L(0^+) + v(0^+)/4 = 0 \Rightarrow\ i_C(0^+) = -i_L(0^+) = -3\,\text{A}$ (la corrente dell'induttore è continua). Infine $\frac{dv}{dt}(0^+) = -24$.

(4) Calcolo dei coefficienti.

Sostituendo questi valori nelle formule (8.24) ($x = v$), abbiamo: $A_1 = 0,\ A_2 = -\frac{24}{\sqrt{15}}$.

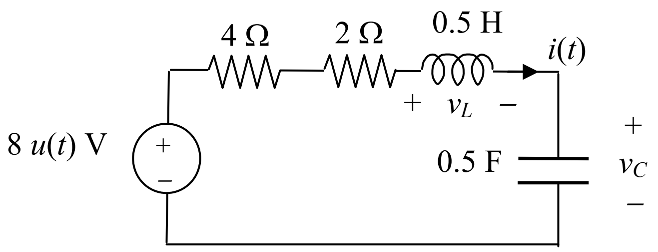
Infine, con la formula (8.15a): $v(t) = -\frac{24}{\sqrt{15}} e^{-t} sen(\sqrt{15}t)\,\text{V}$.

8.6

(1) Le condizioni iniziali del circuito sono date.

(2) α e ω_0

Conviene trasformare il generatore di corrente in un generatore di tensione (figura seguente).



Utilizzando il procedimento descritto alle pagine 269-270, si ottiene l'equazione differenziale:

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + 12\frac{di}{dt} + 4i = 0$$

con $\alpha = 6$ e $\omega_0 = 2$. Poiché $\alpha > \omega_0$ il circuito è sovrasmorzato, con le frequenze naturali:

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -6 + \sqrt{32} \qquad s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -6 - \sqrt{32}$$

(3) Condizioni iniziali dell'ED.

Il valore $i(0^+)$ è nullo (dato). La derivata della corrente è $\frac{di}{dt}(0^+) = \frac{v_L(0^+)}{L}$, essendo v_L la tensione dell'induttore. Con la LKT si scrive: $v_L(0^+) + 6i(0^+) + v_C(0^+) = 8 \Rightarrow v_L(0^+) = 8 - v_C(0^+) = 4\,\text{V}$. Infine $\frac{di}{dt}(0^+) = 8$.

(4) Calcolo dei coefficienti.

Con le formule (8.20) abbiamo: $A_1 = \frac{4}{\sqrt{32}}$, $A_2 = -\frac{4}{\sqrt{32}}$.

Infine, con la formula (8.11): $i(t) = \frac{4}{\sqrt{32}}\left(e^{s_1 t} - e^{s_2 t}\right)$ A.

8.7

(1) Condizioni iniziali del circuito.

In $t = 0^-$ l'interruttore è chiuso. Il condensatore è un c.a. e l'induttore un c.c. La corrente dell'induttore è $i(0^-) = 12/12 = 1$ A; la tensione del condensatore coincide con la tensione del resistore da 4 Ω, quindi $v_C(0^-) = 4\,i(0^-) = 4$ V.

(2) α e ω_0

Per $t > 0$ si ottiene un circuito RLC serie. I parametri sono:

$$\alpha = \frac{R}{2L} = 16 \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 8$$

$\alpha > \omega_0$ quindi il circuito è sovrasmorzato. Le frequenze naturali sono:

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -16 + 8\sqrt{3} \cong \text{-2,14} \qquad s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -16 - 8\sqrt{3} \cong \text{-29,85}$$

(3) Condizioni iniziali dell'ED.

$i(0^+) = 1$A per la continuità della corrente dell'induttore. La derivata della corrente è $\frac{di}{dt}(0^+) = \frac{v_L(0^+)}{L}$, essendo v_L la tensione dell'induttore (polarità coordinata con la corrente i).

Con la LKT si scrive (interruttore aperto):

$$v_L(0^+) + v_C(0^+) + 8i(0^+) = 12 \Rightarrow v_L(0^+) = 12 - 8 - 4 = 0\,\text{V}.$$

Perciò $\dfrac{di}{dt}(0^+) = 0$.

(4) Calcolo dei coefficienti.

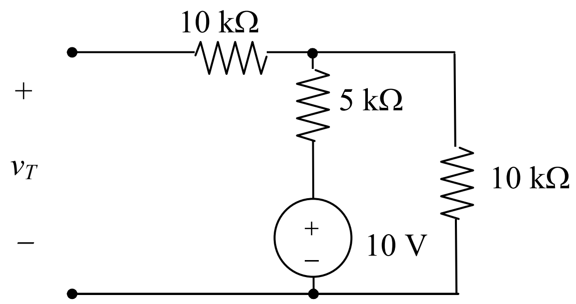
Con le formule (8.20) abbiamo: $A_1 = \dfrac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \cong 1{,}077$, $A_2 = \dfrac{2-\sqrt{3}}{-2\sqrt{3}} \cong -0{,}077$.

Infine, con la formula (8.11): $i(t) \cong 1{,}077e^{-2{,}14t} - 0{,}077e^{-29{,}85t}$ A.

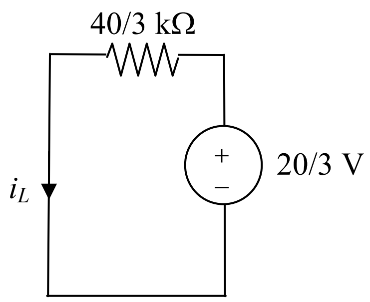
8.8

(1) Condizioni iniziali del circuito.

La condizione iniziale del condensatore è data ($v_C(0^-) = 2$V). Per ricavare $i_L(0^-)$ conviene applicare il teorema di Thevenin al bipolo mostrato di seguito.

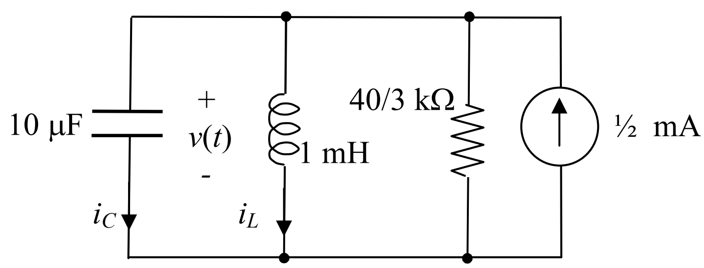


La tensione v_T coincide con la tensione ai capi del resistore a destra: $v_T = 10\dfrac{10k}{15k} = \dfrac{20}{3}$ V. La resistenza equivalente è $R_T = 10k + 10k \,//\, 5k = \dfrac{40}{3}$ kΩ. Sostituendo il bipolo equivalente di Thevenin si ottiene lo schema seguente per $t=0^-$, dal quale si ricava $i_L(0^-) = ½$ mA.



(2) α e ω_0

Per $t > 0$ conviene sostituire il bipolo di Thevenin con quello di Norton (la corrente di c.c. è stata ricavata sopra e vale ½ mA). In questo modo si ottiene il circuito RLC parallelo nella figura seguente.



Utilizzando il procedimento descritto alle pagine 269-270, si ottiene una equazione differenziale della forma (8.6) con $\alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{15}{4} = 3{,}75$ e $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 10^4$. Poiché $\alpha < \omega_0$, il circuito è sottosmorzato, con pulsazione $\beta = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \cong 10^4$ rad/s.

(3) Condizioni iniziali dell'ED.

$v(0^+) = v_C(0^+) = v_C(0^-) = 2$ V; $\frac{dv}{dt}(0^+) = \frac{i_C(0^+)}{C}$. La corrente $i_C(0^+)$ si ottiene con la LKC:

$$i_C(0^+) + i_L(0^+) + \frac{v(0^+)}{R_T} = ½ \text{ mA}$$

Poiché $i_L(0^+) = i_L(0^-) = ½$ mA, si ricava $i_C(0^+) = -3/20$ mA, e $\frac{dv}{dt}(0^+) = -15$.

(4) Calcolo dei coefficienti.

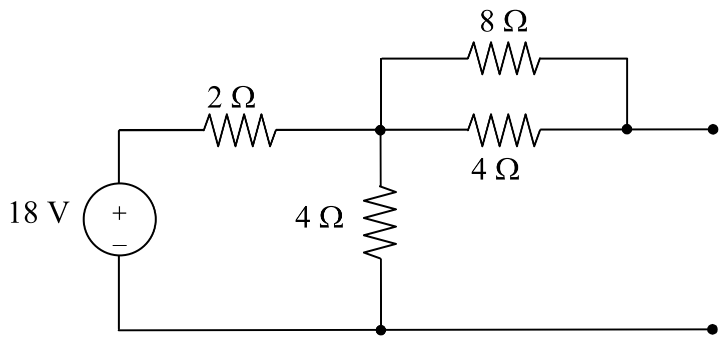
Sostituendo questi valori nelle formule (8.24) (x=v), si ricavano i coefficienti: $A_1 = 2$, $A_2 = -7{,}5 \times 10^{-4}$. Poiché $A_2 << A_1$, possiamo approssimare la soluzione con la seguente espressione:

$$v(t) \cong 2e^{-3{,}75t} \cos(10^4 t) \text{ V}$$

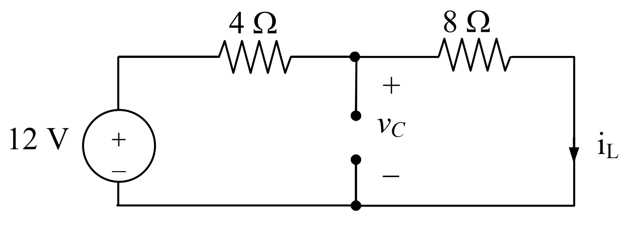
8.9

(1) Condizioni iniziali del circuito.

Conviene applicare il teorema di Thevenin al bipolo nella figura seguente. La tensione a vuoto è 12 V e la resistenza equivalente è 4 Ω.



Utilizzando il bipolo equivalente di Thevenin abbiamo il circuito seguente in $t = 0^-$. Si ricavano i seguenti valori: $i_L(0^-) = 1$ A, $v_C(0^-) = 12\frac{8}{12} = 8$ V.



(2) α e ω_0

Per $t > 0$ si ha un circuito RLC serie con $\alpha = \frac{R}{2L} = 1$, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \sqrt{5}$. Poiché $\alpha < \omega_0$, il circuito è sottosmorzato, con pulsazione $\beta = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = 2$ rad/s.

(3) Condizioni iniziali dell'ED.

$i_L(0^+) = i_L(0^-) = 1\,\mathrm{A}$; $\dfrac{di_L}{dt}(0^+) = \dfrac{v_L(0^+)}{L}$.

La tensione $v_L(0^+)$ si ottiene con la LKT: $v_L(0^+) - v_C(0^+) + 8i_L(0^+) = 0$. Quindi $\dfrac{di_L}{dt}(0^+) = 0$.

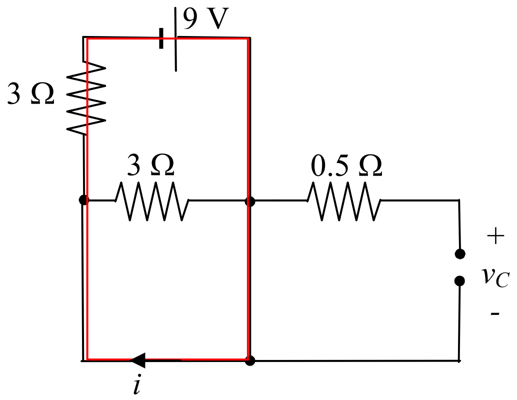
(4) Calcolo dei coefficienti.

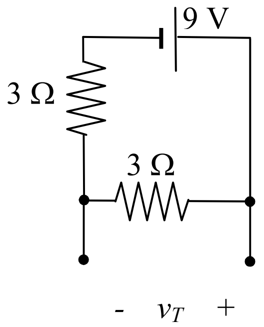
Sostituendo questi valori nelle formule (8.24) (x=i_L), si ricavano i coefficienti: $A_1 = i_L(0^+) = 1$, $A_2 = \alpha i_L(0^+)/\beta = 0{,}5$. Quindi abbiamo: $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} = \sqrt{5}/2$, $\phi = -\tan^{-1}(A_2/A_1) = -\tan^{-1}(1/2) \cong -0{,}46$. La soluzione è $i_L(t) = \dfrac{\sqrt{5}}{2} e^{-t} \cos(2t - 0{,}46)\,\mathrm{A}$.

8.10

(1) Condizioni iniziali del circuito.

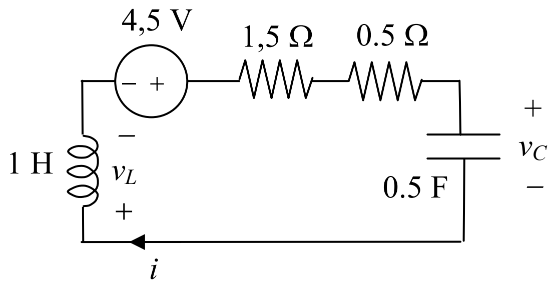
Il circuito in $t = 0^-$ è mostrato nella figura seguente, a sinistra. Con la LKT si verifica che $v_C(0^-) = 0$. La corrente i scorre seguendo il percorso indicato in rosso (il resistore centrale è cortocircuitato). Pertanto $i(0^-) = 9/3 = 3$ A.





(2) α e ω_0

Lo studio per t>0 si semplifica applicando il teorema di Thevenin al bipolo mostrato sopra a destra. Si ricava facilmente v_T = 4,5 V, R_T = 1,5 Ω. Sostituendo il bipolo equivalente si ottiene il circuito mostrato sotto.



E' un circuito RLC serie con $\alpha = \dfrac{R}{2L} = 1$, $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} = \sqrt{2}$. Il circuito è sottosmorzato ($\alpha < \omega_0$).

La pulsazione è $\beta = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = 1$ rad/s.

(3) Condizioni iniziali dell'ED.

$i(0^+) = i(0^-) = 3$ A; $\frac{di}{dt}(0^+) = \frac{v_L(0^+)}{L} = v_L(0^+)$. La tensione $v_L(0^+)$ si ottiene con la LKT: $v_L(0^+) + v_C(0^+) + 2i(0^+) = 4{,}5 \Rightarrow v_L(0^+) = -1{,}5\text{ V} = \frac{di}{dt}(0^+)$.

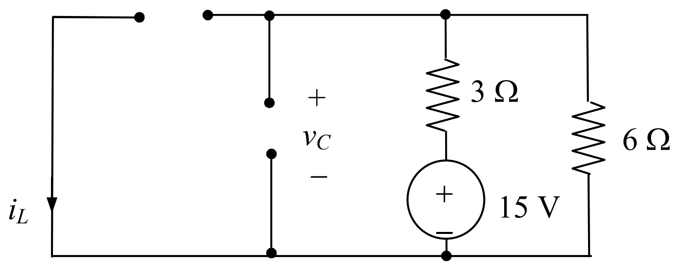
(4) Calcolo dei coefficienti.

$A_1 = i(0^+) = 3$, $A_2 = \frac{di/dt(0^+) + \alpha i_L(0^+)}{\beta} = 1{,}5$. Quindi abbiamo: $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \cong 3{,}354$, $\phi = -\tan^{-1}(A_2 / A_1) = -\tan^{-1}(1/2) \cong -0{,}46$. La soluzione è $i(t) = 3{,}354e^{-t}\cos(t - 0{,}46)$ A.

8.11

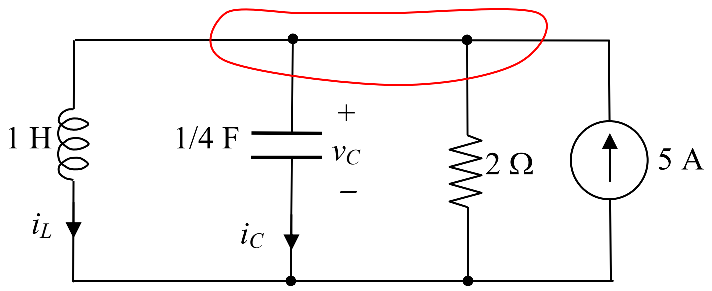
(1) Condizioni iniziali del circuito.

Il circuito in $t = 0^-$ è mostrato nella figura seguente. La corrente i_L è nulla, mentre la tensione v_C si ricava con la formula del partitore: $v_C(0^-) = 15 \times 6/9 = 10$ V.



(2) α e ω_0

Trasformando il generatore di tensione in un generatore di corrente, e combinando le resistenze in parallelo, si ottiene lo schema seguente, per $t > 0$.



E' un circuito RLC parallelo con un generatore costante. La tensione v_C è descritta da una equazione differenziale del 2° ordine con $\alpha = \frac{1}{2RC} = 1$, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 2$. Poiché $\alpha < \omega_0$ il circuito è sottosmorzato, con pulsazione $\beta = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = \sqrt{3}$ rad/s.

(3) Condizioni iniziali dell'ED.

$v_C(0^+) = v_C(0^-) = 10$; $\frac{dv_C}{dt}(0^+) = \frac{i_C(0^+)}{C}$. La corrente $i_C(0^+)$ si ottiene con la LKC:

$$i_C(0^+) + i_L(0^+) + \frac{v_C(0^+)}{2} = 5 \qquad \Rightarrow \qquad i_C(0^+) = 0\text{ A}$$

(4) Calcolo dei coefficienti.
Sostituendo questi valori nelle formule (8.24) (x=v_C), si ricavano i coefficienti: $A_1 = v_C(0^+) = 10$, $A_2 = \alpha v_C(0^+)/\beta = 10/\sqrt{3}$. La tensione è

$$v_C(t) = e^{-t}\left[10\cos(\sqrt{3}t) + \frac{10}{\sqrt{3}} sen(\sqrt{3}t)\right] \text{V} \qquad (1)$$

La corrente i si ottiene con la LKC:

$$i = i_L = 5 - i_C - v_C/2 = 5 - \frac{1}{4}\frac{dv_C}{dt} - \frac{v_C}{2} \qquad (2)$$

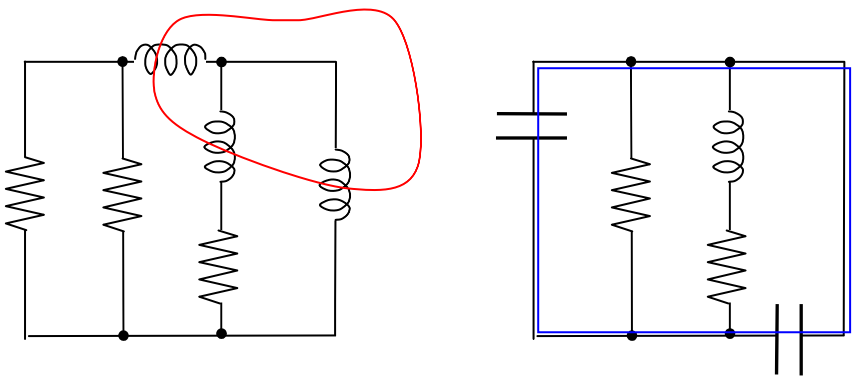
Sostituendo l'espressione (1) nella (2) si ottiene: $i(t) = e^{-t}\,[-5\cos(\sqrt{3}\,t) + \frac{5}{\sqrt{3}}\,\text{sen}(\sqrt{3}\,t)] + 5$ A.

8.12
Nel caso di smorzamento critico la risposta presenta un massimo o un minimo all'istante $t_0 = \frac{1}{\alpha} - \frac{A_2}{A_1}$ (Figura (8.3) del libro). Poiché $i(0^+) = 0$, applicando la LKT abbiamo $v_L(0^+) = -v_C(0^+)$; quindi $\frac{di}{dt}(0^+) = \frac{v_L(0^+)}{L} = -\frac{4}{L}$. La derivata in 0^+ è negativa dunque la risposta presenta un minimo in t_0. I coefficienti della soluzione sono: $A_1 = \frac{di}{dt}(0^+) + \alpha i(0^+) = -\frac{4}{L}$ e $A_2 = i(0^+) = 0$. Pertanto $t_0 = 1/\alpha = 4\times10^{-3} \Rightarrow \alpha = 250$. Inoltre

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L10^{-3}}} = \alpha = 250 \Rightarrow \quad L = 0{,}016 \text{ H}$$

Infine, poiché $\alpha = \frac{R}{2L} = 250$, ricaviamo $R = 8\ \Omega$.

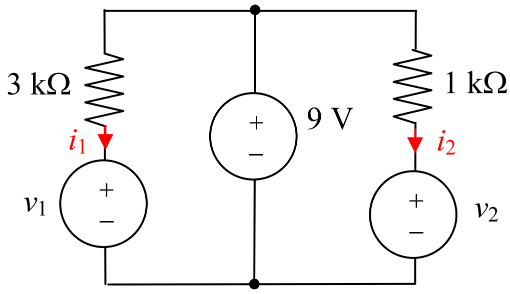
8.13
In (a) esiste un taglio di induttori, quindi l'ordine è $n = 3-1 = 2$. In (b) esiste un percorso chiuso che attraversa solo condensatori, quindi $n = 3 - 1 = 2$.



8.14
In (a) l'ordine è 2 poiché non esistono vincoli derivanti dalle leggi di Kirchhoff. In (b) l'ordine è 1 poiché esiste un taglio costituito da induttori e un generatore di corrente.

8.15

Lo schema per ottenere le equazioni di stato è mostrato di seguito. Dobbiamo ricavare i_1 e i_2 in funzione di v_1 e v_2.



Con la LKT e la legge di Ohm si ottengono le relazioni seguenti:

$$i_1 = \frac{9 - v_1}{3 \times 10^3} \qquad i_2 = \frac{9 - v_2}{10^3}$$

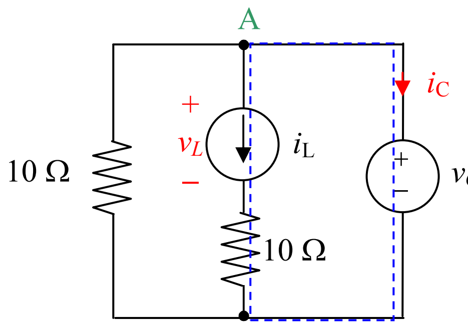
Le equazioni di stato sono:

$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{i_1}{C_1} = -\frac{10^3}{3} v_1 + 3 \times 10^3$$

$$\frac{dv_2}{dt} = \frac{i_2}{C_2} = -10^3 v_2 + 9 \times 10^3$$

8.16

Lo schema per ottenere le equazioni di stato è mostrato di seguito. Dobbiamo ricavare i_C e v_L in funzione di v_C e i_L.



Applicando la LKC al nodo A abbiamo:

$$\frac{v_C}{10} + i_L + i_C = 0 \qquad \Rightarrow \qquad i_C = -\frac{v_C}{10} - i_L$$

Applicando la LKT alla maglia tratteggiata si ricava:

$$v_L = v_C - 10 i_L$$

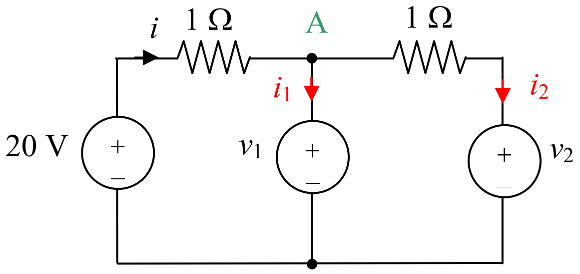
Le equazioni di stato sono:

$$\frac{dv_C}{dt} = \frac{i_C}{C} = -2v_C - 20 i_L$$

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{v_L}{L} = v_C - 10 i_L$$

8.17

Lo schema per ottenere le equazioni di stato è mostrato di seguito. Dobbiamo ricavare i_1 e i_2 in funzione di v_1 e v_2.



Con la LKT si ottiene: $i = 20 - v_1$ $\quad i_2 = v_1 - v_2$

Con la LKC al nodo A si ricava: $i_1 = i - i_2 = 20 - v_1 - v_1 + v_2$

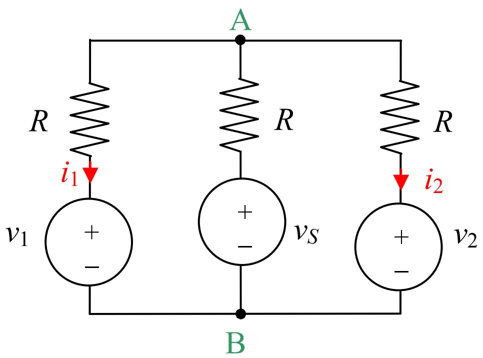
Le equazioni di stato sono:

$$\frac{dv_1}{dt} = i_1 = -2v_1 + v_2 + 20$$

$$\frac{dv_2}{dt} = i_2 = v_1 - v_2$$

8.18

Lo schema per ottenere le equazioni di stato è mostrato di seguito. Dobbiamo ricavare i_1 e i_2 in funzione di v_1 e v_2.



Con la formula di Millman si ottiene

$$v_{AB} = \frac{v_1 + v_2 + v_S}{3}$$

Le correnti si possono esprimere con le seguenti formule:

$$i_1 = \frac{v_{AB} - v_1}{R} \qquad i_2 = \frac{v_{AB} - v_2}{R}$$

Sostituendo l'espressione precedente di v_{AB} si ottiene:

$$i_1 = \frac{-2v_1 + v_2 + v_S}{3R} \qquad i_2 = \frac{v_1 - 2v_2 + v_S}{3R}$$

Le equazioni di stato sono:

$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{i_1}{C} = \frac{-2v_1 + v_2 + v_S}{3RC}$$

$$\frac{dv_2}{dt} = \frac{i_2}{C} = \frac{v_1 - 2v_2 + v_S}{3RC}$$

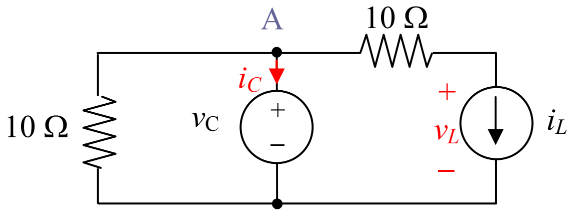
La matrice di stato è:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{3RC}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Il determinante è $\Delta = \frac{1}{3(RC)^2} > 0$; la traccia è T = - 4 < 0; quindi il circuito è stabile.

8.19

Lo schema per ottenere le equazioni di stato è mostrato di seguito. Dobbiamo ricavare i_C e v_L in funzione di v_C e i_L.



LKC nodo A: $\quad \frac{v_C}{10} + i_C + i_L = 0 \quad \Rightarrow \quad i_C = -0{,}1v_C - i_L$

LKT maglia di destra: $\quad 10i_L + v_L - v_C = 0 \quad \Rightarrow \quad v_L = v_C - 10i_L$

Le equazioni di stato sono:

$$\frac{dv_C}{dt} = i_C = -0{,}1v_C - i_L$$

$$\frac{di_L}{dt} = v_L = v_C - 10i_L$$

La matrice di stato è

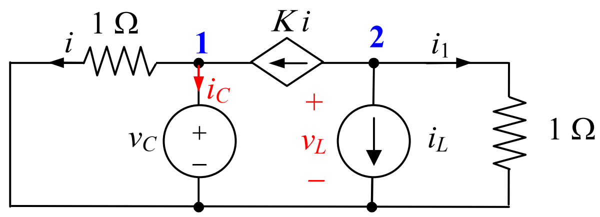
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -0{,}1 & -1 \\ 1 & -10 \end{bmatrix}$$

Abbiamo: 2α = -T = 10,1; $\omega_0^2 = \Delta = 2$. Il termine $y(t)$ è nullo poiché non ci sono generatori indipendenti. L'equazione differenziale è:

$$\frac{d^2v_C}{dt^2} + 10{,}1\frac{dv_C}{dt} + 2v_C = 0$$

8.20

Per studiare la stabilità è necessario determinare la matrice di stato e studiarne la traccia e il determinante. Lo schema per ottenere le equazioni di stato è mostrato di seguito. Dobbiamo ricavare i_C e v_L in funzione di v_C e i_L. Il generatore di tensione è stato spento poiché non influisce sulla matrice di stato ma solo sul vettore di ingresso.



LKC nodo 1: $i + i_C = Ki$

LKC nodo 2: $Ki + i_L + i_1 = 0$

Per la legge di Ohm abbiamo $i = v_C$ mentre $i_1 = v_L$. Sostituendo si ottiene:

LKC nodo 1: $v_C + i_C = Kv_C \quad \Rightarrow \quad i_C = (K-1)v_C$

LKC nodo 2: $Kv_C + i_L + v_L = 0 \quad \Rightarrow \quad v_L = -Kv_C - i_L$

Le equazioni di stato sono:

$$\frac{dv_C}{dt} = i_C = (K-1)v_C$$

$$\frac{di_L}{dt} = v_L = -Kv_C - i_L$$

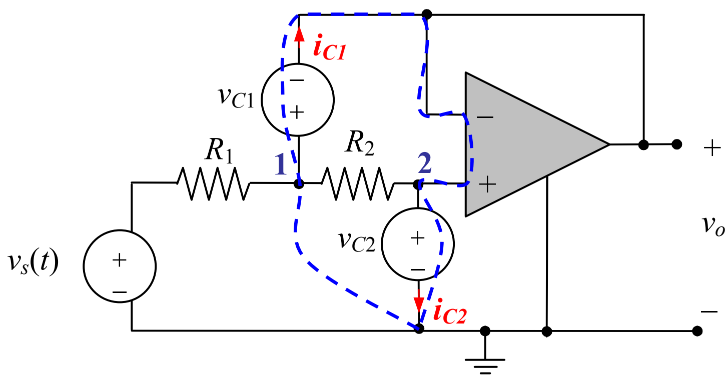
La matrice di stato è

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} K-1 & 0 \\ -K & -1 \end{bmatrix}$$

Il circuito è stabile se T = K–2 < 0 e Δ = 1–K > 0. Entrambe le condizioni sono soddisfatte se K<1.

8.21

Lo schema per ottenere le equazioni di stato è mostrato di seguito. Dobbiamo ricavare i_{C1} e i_{C2} in funzione di v_{C1} e v_{C2}.



LKC nodo 1: $$i_{C1} = \frac{v_s - v_1}{R_1} - \frac{v_1 - v_2}{R_2}$$

LKC nodo 2: $$i_{C2} = \frac{v_1 - v_2}{R_2}$$

Applicando la LKT al percorso chiuso indicato dal tratteggio si ricava: $v_1 = v_{C1} + v_{C2}$; inoltre $v_2 = v_{C2}$. Sostituendo nelle equazioni precedenti si ottiene

$$i_{C1} = -\frac{v_{C1}}{R_1} - \frac{v_{C1}}{R_2} - \frac{v_{C2}}{R_1} + \frac{v_s}{R_1}$$

$$i_{C2} = \frac{v_{C1}}{R_2}$$

Utilizzando le relazioni dei condensatori si scrivono le equazioni di stato:

$$\frac{dv_{C1}}{dt} = -\frac{v_{C1}}{R_1C_1} - \frac{v_{C1}}{R_2C_1} - \frac{v_{C2}}{R_1C_1} + \frac{v_s}{R_1C_1}$$

$$\frac{dv_{C2}}{dt} = \frac{v_{C1}}{R_2C_2}$$

La matrice di stato è

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\left(\frac{1}{R_1C_1} + \frac{1}{R_2C_1}\right) & -\frac{1}{R_1C_1} \\ \frac{1}{R_2C_2} & 0 \end{bmatrix}$$

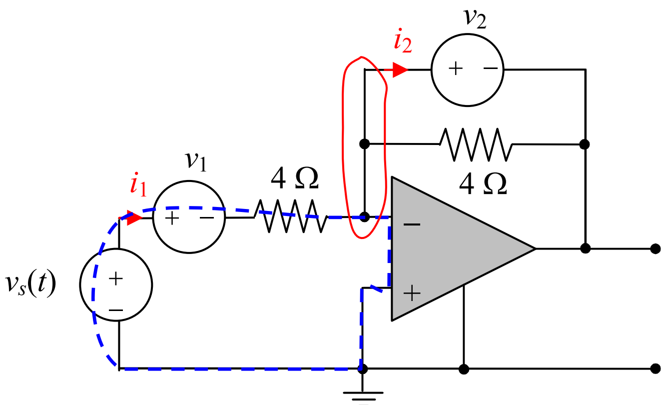
Ricaviamo i coefficienti dell'equazione differenziale: $\alpha = -T/2 = \frac{1}{2C_1}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$, $\omega_0^2 = \Delta = \frac{1}{R_1C_1R_2C_2}$. Si ha lo smorzamento critico se $\alpha = \omega_0$ (pag. 271 del libro); imponendo la condizione si ottiene l'equazione

$$\frac{(R_1 + R_2)^2}{4R_1R_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

Poiché le incognite sono quattro, esistono infinite soluzioni. Ad esempio, si verifica facilmente che la condizione è soddisfatta se $R_1=R_2$ e $C_1=C_2$.

8.22

Lo schema per ottenere le equazioni di stato è mostrato di seguito. Dobbiamo ricavare i_1 e i_2 in funzione di v_1 e v_2.



Applicando la LKT al percorso indicato dalla linea tratteggiata abbiamo l'equazione $-v_s + v_1 + 4i_1 = 0$, dalla quale si ricava:

$$i_1 = -\frac{v_1}{4} + \frac{v_s}{4}$$

Applicando la LKC alla linea chiusa in rosso si ottiene l'equazione $i_1 = i_2 + v_2 / 4$, dalla quale si ricava:

$$i_2 = i_1 - \frac{v_2}{4} = -\frac{v_1}{4} - \frac{v_2}{4} + \frac{v_s}{4}$$

Utilizzando le relazioni dei condensatori si scrivono le equazioni di stato:

$$\frac{dv_1}{dt} = i_1 = -\frac{v_1}{4} + \frac{v_s}{4} \qquad (1)$$

$$\frac{dv_2}{dt} = 16i_2 = -4v_1 - 4v_2 + 4v_s \qquad (2)$$

La matrice di stato è

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & 0 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}$$

Il valore nullo di a_{12} corrisponde al fatto che la variabile v_1 è descritta da una equazione di primo grado in cui non compare v_2 (equazione (1)); pertanto v_1 evolve in modo indipendente da v_2. Ciò si spiega fisicamente considerando che, per il c.c. virtuale dell'operazionale, la variabile v_1 può essere dedotta dal semplice circuito RC nella figura seguente. Al contrario, la variabile v_2 dipende da v_1 (v. equazione (2)).