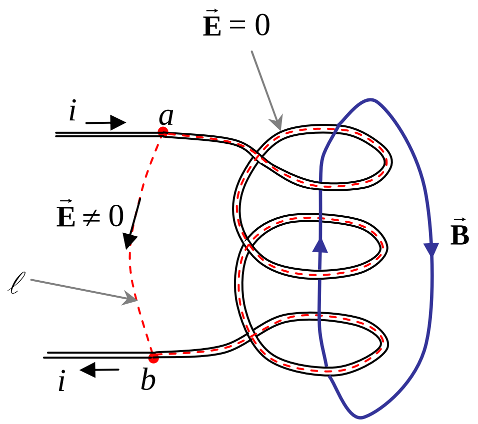
Induttore e legge di Faraday

La relazione caratteristica dell'induttore ($v = L\, di/dt$) è basata sulla seguente relazione tra la tensione e la derivata del flusso magnetico:

$$v = \frac{d\Phi}{dt} \tag{1}$$

La relazione (1) richiede alcune precisazioni. Il primo dubbio che può sorgere riguarda il segno meno, che come è noto, compare nella legge di Faraday-Lenz ma non nella (1). Per chiarire tale punto supponiamo che l'induttore sia percorso dalla corrente i (Fig. 1). Questa genera un campo magnetico $\vec{\mathbf{B}}$ le cui linee di flusso hanno il verso in figura.

Figura 1



Consideriamo una linea chiusa γ (tratteggiata) che attraversa l'induttore e si richiude all'esterno con la linea ℓ, che unisce i terminali a e b. La legge di Faraday consente di scrivere

$$\oint_\gamma \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi(t)}{dt} \tag{2}$$

dove $\vec{\mathbf{E}}$ è il campo elettrico e Φ è il flusso di $\vec{\mathbf{B}}$ attraverso γ (il verso di integrazione coincide con il verso della corrente). Assumendo l'induttore costituito da un conduttore ideale (conducibilità infinita), in ogni suo punto il campo elettrico è nullo, perciò

$$\oint_\gamma \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{l} = \int_b^a \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{l}$$

dove il secondo integrale si assume calcolato lungo la linea ℓ. Per Φ crescente, l'integrale è negativo quindi il campo elettrico tra i terminali ha il verso indicato in Figura 1.
La tensione v ai capi dell'induttore va intesa come integrale del campo elettrico lungo la linea ℓ, *da a verso b*, quindi

$$v = \int_a^b \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{l} = -\int_b^a \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{l} = -\oint_\gamma \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{l} \tag{3}$$

ovvero

$$v = \frac{d\Phi}{dt} \tag{4}$$

Sostituendo nella (4) $\Phi = L\, i$ si ottiene la relazione caratteristica dell'induttore.
E' facile verificare che la (4) è in accordo con la legge di Lenz; infatti, se tra i morsetti *a* e *b* fosse inserito un resistore, la tensione *v* tenderebbe a far circolare nel resistore una corrente che si sottrarrebbe ad *i* (per *i* crescente).
Si noti che, nella situazione descritta in Fig. 1, il campo elettrico *non è conservativo* perciò la tensione (4) dipende dalla linea ℓ, che è stata tracciata con una certa arbitrarietà. Tuttavia, se ℓ è tale che tutte le linee di flusso di $\vec{\mathbf{B}}$ sono interne a γ, il risultato non dipende dall'esatto andamento di ℓ e possiamo parlare di tensione dell'induttore senza ambiguità.

Un' ultima precisazione riguarda la LKT. Quando si applica questa legge si assume un campo elettrico conservativo, quindi si deve considerare un percorso chiuso attraverso il quale non c'è flusso magnetico. Ad esempio, scrivendo la LKT in Fig. 2, dobbiamo utilizzare un percorso chiuso come quello tratteggiato, per il quale si ha

$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{l} = 0 \qquad (5)$$

La (5) equivale a: $v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 0$; la tensione v_3 è definita come illustrato sopra.

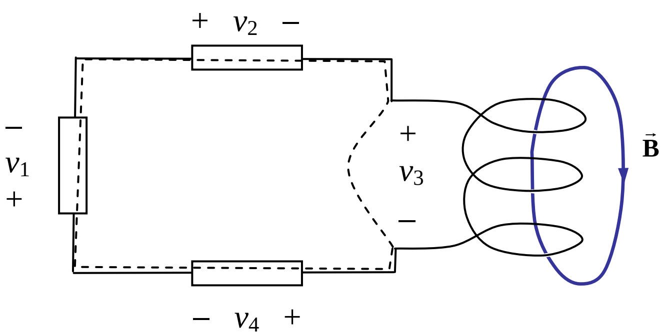


Figura 2 – LKT in presenza di un induttore.