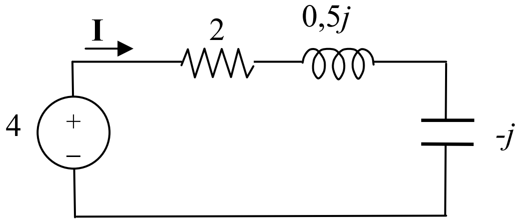
10.4

La corrente nel resistore vale $\mathbf{I}_R = \mathbf{I}\dfrac{j}{2+j}$. Il modulo è $\left|\mathbf{I}_R\right| = \dfrac{|\mathbf{I}|}{\sqrt{5}} = \dfrac{10}{\sqrt{5}}$ A. La potenza media è

$$P = \frac{1}{2}2\left|\mathbf{I}_R\right|^2 = 20 \text{ W}$$

10.7

Il circuito simbolico è mostrato di seguito. La potenza viene dissipata solo nel resistore.



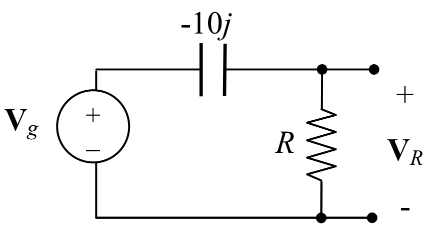
La corrente è

$$I = \frac{4}{2+0{,}5j - j} = \frac{4}{2-0{,}5j} \quad \Rightarrow \quad |I| = \frac{4}{\sqrt{4+0{,}25}} = 1{,}94 \text{ A}$$

$$P = \frac{1}{2}2|\mathbf{I}|^2 = 3{,}76 \text{ W}$$

10.9

Circuito simbolico.



$$\mathbf{V}_\mathrm{R} = 80 \qquad P = \frac{1}{2}\frac{|V_R|^2}{R} = 40 \text{ W} \quad \Rightarrow \quad R = 80\ \Omega$$

Con la formula del partitore di tensione:

$$\mathbf{V}_R = \mathbf{V}_g \frac{80}{80-j10} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{V}_g = \mathbf{V}_R \frac{80-j10}{80} = 80 - j10 \text{ V}$$

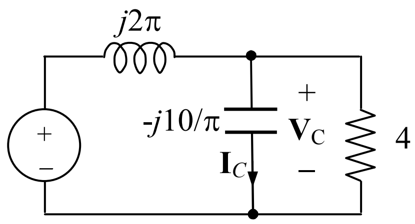
10.10

Per il c.c. virtuale dell'op-amp la corrente nel resistore di 2 kΩ ha ampiezza 2/2k = 1 mA. Per il c.a. virtuale la stessa corrente scorre nel resistore di 6 kΩ. La potenza dissipata è $P = ½\ 6\times10^3\times(10^{-3})^2$ = 3 mW. Si noti come la fase del generatore sia ininfluente.

10.13

Il circuito simbolico è mostrato di seguito. Dall'espressione della potenza si ricava l'ampiezza della tensione $\mathbf{V}_\mathrm{C}$:

$$P = \frac{1}{2}\frac{|\mathbf{V}_C|^2}{4} = 100 \qquad \Rightarrow \qquad |\mathbf{V}_C| = 20\sqrt{2}\ \text{V}$$



Inoltre

$$|\mathbf{I}_C| = \frac{|\mathbf{V}_C|}{|\mathbf{Z}_C|} = \frac{\pi}{10} 20\sqrt{2} = 2\pi\sqrt{2}\ \text{A} \Rightarrow \ I_{C,eff} = |\mathbf{I}_C| / \sqrt{2} = 2\pi\ \ \text{A}$$

10.14

Per il c.a. virtuale la tensione sul resistore da 40 Ω vale $20\frac{40}{40+80} = \frac{20}{3}$ V rms. L'operazionale funziona da *inseguitore* quindi la tensione di uscita ha valore efficace 20/3 V. Infine la potenza richiesta è: $P = \frac{V_{eff}^2}{R} = \frac{400}{9} \times \frac{1}{50} = \frac{8}{9}$ W.

10.15

Lo sfasamento si può ricavare ricordando che $\mathbf{S}=P+jQ$ e $Q/P = \tan\varphi$. Dunque $\varphi = \tan^{-1}(0{,}25) = 14°$.

10.16

La potenza di picco è pari alla somma della potenza attiva e della potenza apparente. Quest'ultima è il modulo di **S**; dunque: $p_{\max} = 5 + \sqrt{5^2 + 8^2} = 14{,}43$ W.

10.17

Per la LKC, la corrente nel bipolo è $\mathbf{I}_1 = 10 - \mathbf{I} = 6\angle 0°$ A (diretta verso il basso). La tensione coincide con la tensione del resistore, dunque $\mathbf{V}_1 = 20\angle 0°$. La potenza complessa è $\mathbf{S} = ½\, \mathbf{V}_1\mathbf{I}_1^* = 60 = P+jQ$. Quindi P=60 W e Q = 0 VAR.

10.18

Il fattore di potenza è cos φ. La potenza media è $P = S\cos\varphi$, dove S è la potenza apparente.
$P_A=10^4\times 0{,}8 = 8$ kW; $P_B=15\times 10^3\times 0{,}6 = 9$ kW. Quindi B assorbe maggiore potenza media.

10.19

La potenza attiva è associata al resistore mentre la potenza reattiva è dovuta all'induttore. Abbiamo

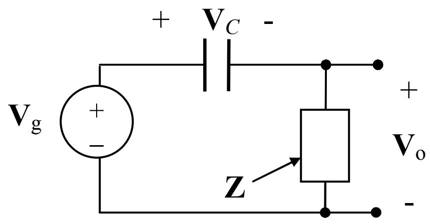
$$P = \frac{1}{2}100|\mathbf{I}|^2 = 10\ \text{W} \ \Rightarrow \qquad |\mathbf{I}|^2 = 0{,}2$$

$$Q = \frac{1}{2}X|\mathbf{I}|^2 = 10\ \text{VAR} \Rightarrow \qquad X = 100\ \Omega$$

Infine X = ωL ⇒ L = X/ω = 0,01 H.

10.21

$\mathbf{V}_g = 10\,e^{j50°} = 10 \cos 50° + j\,10 \text{ sen } 50° = 6{,}43 + j\,7{,}66$ V
$\mathbf{V}_C = 5\,e^{-j40°} = 5 \cos(-40°) + j\,5 \text{ sen }(-40°) = 3{,}83 - j\,3{,}21$ V



Per la LKT possiamo scrivere $\mathbf{V}_C + \mathbf{V}_o - \mathbf{V}_g = 0$. Quindi

$$\mathbf{V}_o = \mathbf{V}_g - \mathbf{V}_C = 2{,}6 + j\,10{,}87 = \sqrt{2{,}6^2 + 10{,}87^2}\ \angle \tan^{-1}(10{,}87/2{,}6) = 11{,}17\ e^{j76{,}5°}\ \text{V}$$

La corrente nel bipolo di impedenza **Z** coincide con la corrente del condensatore che vale $\mathbf{I} = \dfrac{\mathbf{V}_C}{-j5} = \dfrac{5e^{-j40°}}{-j5} = j\ e^{-j40°} = e^{j50°}$ A. Dunque

$$P = \text{Re}[\mathbf{S}] = \text{Re}[\tfrac{1}{2}\,\mathbf{V}_o\,\mathbf{I}^*] = \text{Re}[5{,}585\,e^{j76{,}5°}\ e^{-j50°}] = 5{,}585 \cos(26{,}5°) \cong 5 \text{ W}$$

10.22

Bipolo (a): l'induttore assorbe una potenza reattiva positiva; il bipolo di ammettenza **Y** assorbe la potenza reattiva $Q = -\tfrac{1}{2} BV^2 = \tfrac{1}{2} V^2 > 0$. Dunque non può essere il carico incognito.

Bipolo (b): le impedenze dell'induttore e del condensatore si annullano a vicenda perciò il bipolo non assorbe potenza reattiva.

Bipolo (c): la reattanza è -5 quindi $Q = \tfrac{1}{2} XI^2 = -2{,}5\,I^2$; la potenza attiva è $P = \tfrac{1}{2} RI^2 = 10\,I^2$. La potenza reattiva è negativa e il rapporto $|Q/P| = 0{,}25$ come nel carico incognito.

Bipolo (d): $\varphi = 60° \Rightarrow Q = S \text{ sen } \varphi = S\ \sqrt{3}/2 > 0$.

Quindi il carico è il bipolo (c).

10.23

Affinché un bipolo non assorba potenza reattiva, la sua impedenza deve essere reale. In questo caso conviene considerare l'ammettenza:

$$\mathbf{Y} = j\omega C + \frac{1}{1+j} = j\omega C + \frac{1-j}{2}$$

La parte immaginaria si annulla se $\omega C = 1/2$ ovvero C=1/40 = 25 mF.

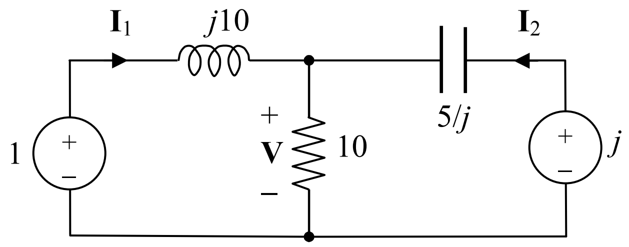
10.24

La corrente ha l'espressione $i(t) = \text{sen}(\omega t) = \cos(\omega t - 90°) = \cos(\omega t + 270°)$.
La tensione è $v(t) = 2\cos(\omega t + \theta_v)$. Per $t = 0$ si ha $v(0) = -1{,}6$ V, quindi $\cos(\theta_v) = -0{,}8$; $\cos^{-1}(-0{,}8) = 143°$, tuttavia anche l'angolo di 217° corrisponde allo stesso coseno. Per determinare l'angolo

corretto dobbiamo esaminare il grafico della tensione: in $t = 0$ la tensione è crescente quindi la fase iniziale è maggiore di 180°, angolo che corrisponde al minimo della sinusoide. Dunque $\theta_v = 217°$. La differenza di fase è $\varphi = \theta_v - \theta_i = 217° - 270° = -53°$. In un bipolo passivo la differenza di fase φ è compresa tra -90° e +90°, dunque il bipolo è passivo.

10.26

Circuito simbolico.



Con la formula di Millman:

$$\mathbf{V} = \frac{\frac{1}{j10} + j\frac{j}{5}}{\frac{1}{j10} + \frac{1}{10} + \frac{j}{5}} = \frac{1 - j2}{-1 + j} \qquad \Rightarrow |\mathbf{V}| = \sqrt{\frac{5}{2}}$$

$$P_R = \frac{1}{2}\,\frac{5}{2}\,\frac{1}{10} = \frac{1}{8}\,\mathrm{W}$$

Inoltre

$$\mathbf{I}_1 = \frac{1 - \mathbf{V}}{j10} = \frac{-2 + j3}{j10(-1 + j)} = -\frac{1}{20} - \frac{j}{4} \qquad \mathbf{I}_2 = (j - \mathbf{V})\frac{j}{5} = \frac{1 + j2}{5(1 - j)} = -\frac{1}{10} + j\frac{3}{10}$$

$$P_1 = \frac{1}{2}\mathrm{Re}[\mathbf{I}_1 *] = -\frac{1}{40}\,\mathrm{W} \qquad P_2 = \frac{1}{2}\mathrm{Re}[j\mathbf{I}_2 *] = \frac{3}{20}\,\mathrm{W}$$

Verifica:

$$\frac{3}{20} - \frac{1}{40} = \frac{5}{40} = \frac{1}{8}$$

10.27

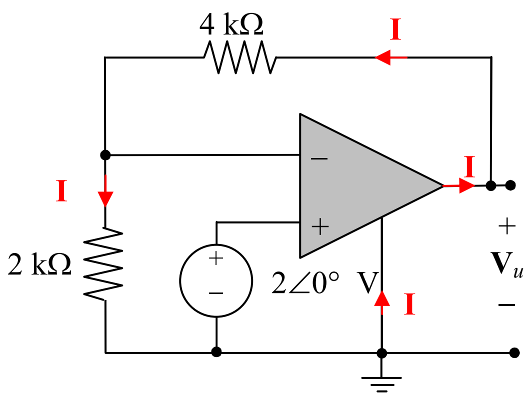
Il circuito è resistivo quindi possiamo considerare solo le ampiezze delle grandezze sinusoidali. Il generatore non eroga e non assorbe potenza perché non ha corrente. Per il c.c. virtuale e il c.a. virtuale si ha una sola corrente che vale:

$$I = \frac{2}{2k} = 1\ \mathrm{mA} \ \Rightarrow \quad P_1 = \frac{1}{2}2kI^2 = 1\ \mathrm{mW} \qquad P_2 = \frac{1}{2}4kI^2 = 2\ \mathrm{mW}$$

Inoltre il circuito è un amplificatore *non invertente*, quindi

$$V_u = 2\left(1 + \frac{4}{2}\right) = 6\ \mathrm{V}$$

La potenza erogata dall'operazionale è $P_{opamp} = \frac{1}{2}V_u I = 3$ mW; essa coincide con la somma delle potenze assorbite dai resistori.



10.28

(a) P = 1 kW, Q = −1 kVAR ⇒ $\varphi = \tan^{-1}(Q/P) = -45°$

(b) P = 2 kW, Q = −1 kVAR ⇒ $\varphi = \tan^{-1}(Q/P) = -26{,}56°$

10.29

(a) L'impedenza del parallelo R//C vale

$$\mathbf{Z}_{RC} = \frac{5(-j5)}{5-j5} = \frac{-j5}{1-j} = \frac{-j5(1+j)}{2} = \frac{5-j5}{2}$$

L'impedenza complessiva è $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_{RC} + 2 + j2 = \frac{9}{2} - \frac{j}{2}$. Quindi

$$\cos\varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2+X^2}} = \frac{9/2}{\sqrt{(9/2)^2+(1/2)^2}} = \frac{9}{\sqrt{82}} \cong 0{,}99$$

La reattanza è negativa quindi il fattore di potenza è in anticipo.

(b) Il bipolo è reattivo quindi Re[**Z**] = 0 ⇒ cos φ = 0.

(c) Per il bipolo in parallelo all'induttore possiamo scrivere:

$$P_1 = S_1 \cos\varphi_1 \Rightarrow S_1 = \frac{P_1}{\cos\varphi_1} = 25 \text{ kVA}$$

$$\varphi_1 = \cos^{-1}(0{,}8) = 36{,}87°$$

L'angolo è compreso tra 0° e 90° essendo il fattore di potenza in ritardo. Quindi:

$$Q_1 = S_1 \operatorname{sen}\varphi_1 = 25 \times 0{,}6 = 15 \text{ kVAR}$$

L'induttore assorbe una potenza reattiva $Q_L = -BV_{eff}^2 = 0{,}2 \times 220^2 = 9{,}68$ kVAR.
Per il bipolo complessivo abbiamo:

$$P = P_1 = 20 \text{ kW} \qquad Q = Q_1 + Q_L = 24{,}68 \text{ kVAR}$$

$$\cos\varphi = \frac{P}{\sqrt{P^2+Q^2}} = \frac{25}{\sqrt{25^2+24{,}68^2}} = 0{,}63$$

Il fattore di potenza è in ritardo poiché Q>0.

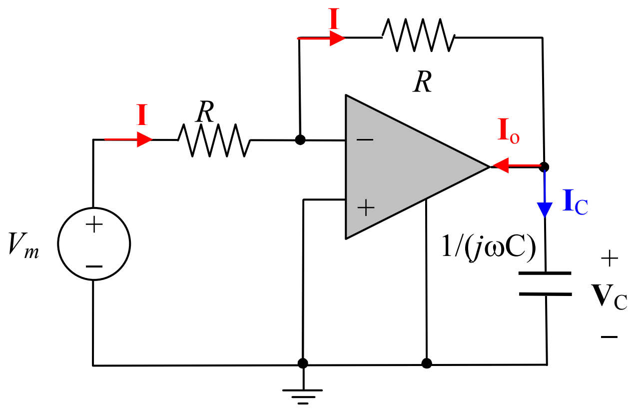
10.30

I bipoli hanno la stessa potenza media e lo stesso fattore di potenza; indicando con P_i e Q_i le potenze attiva e reattiva dei singoli bipoli abbiamo:

$$\cos\varphi = \frac{2P_i}{\sqrt{4P_i^2 + 4Q_i^2}} = \frac{P_i}{\sqrt{P_i^2 + Q_i^2}} = \cos\varphi_i = 0{,}8 \text{ in ritardo}$$

10.31

E' un *amplificatore invertente*. La corrente nei resistori ha fasore $\mathbf{I} = V_m/R = GV_m$, dove G è la conduttanza. La tensione del condensatore è $\mathbf{V}_C = -V_m$. La corrente di uscita dell'operazionale è $\mathbf{I}_o = \mathbf{I} - \mathbf{I}_C = GV_m + j\omega CV_m = V_m(G + j\omega C)$.



Potenze assorbite.

Generatore: $S = -\frac{1}{2}V_m GV_m$

Resistori: $S = \frac{1}{2}GV_m^2$

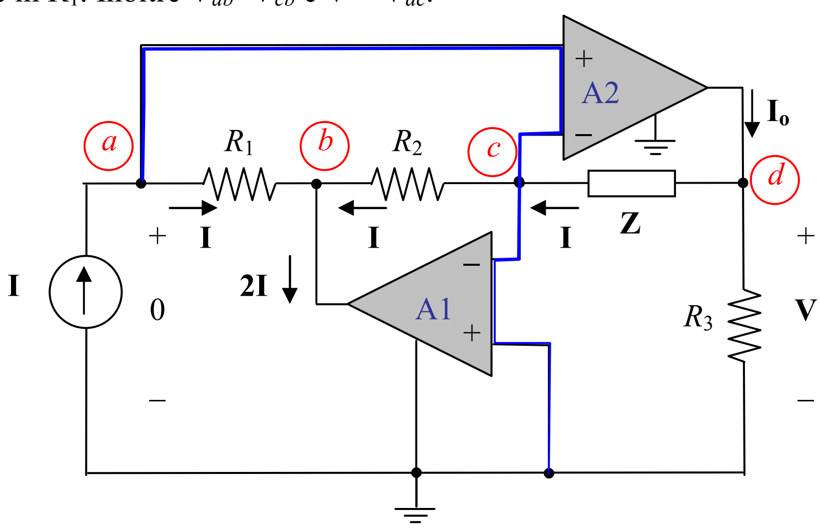
Condensatore: $S = \frac{1}{2}(-V_m)j\omega CV_m = \frac{-j\omega CV_m^2}{2}$

Op-amp: $S = \frac{1}{2}(-V_m)V_m(G - j\omega C) = -\frac{1}{2}GV_m^2 + j\frac{\omega CV_m^2}{2}$

Si verifica facilmente che la somma è nulla.

10.32

Il nodo a è a potenziale di riferimento a causa dei c.c. virtuali di A1 e A2. La corrente del generatore scorre in R_1. Inoltre $\mathbf{V}_{ab} = \mathbf{V}_{cb}$ e $\mathbf{V} = \mathbf{V}_{dc}$.



Di conseguenza le correnti nei resistori R_1 ed R_2 sono uguali ma con versi opposti. La corrente in **Z** deve coincidere con la corrente in R_2, dunque **V = ZI**. Infine $\mathbf{I_o} = \mathbf{I} + \mathbf{V}/R$.

Potenza nei resistori R_1 ed R_2:

$$P_{R_1} = P_{R_2} = ½\ \mathrm{R}\ |\mathbf{I}|^2 = 8\ \mathrm{mW}$$

Potenza in **Z**:

$$P_Z = ½\ \mathrm{Re}[\mathbf{Z}]\ |\mathbf{I}|^2 = 6\ \mathrm{mW}$$

Potenza in R_3:

$$|\mathbf{Z}| = 5\times10^3 \qquad |\mathbf{V}| = |\mathbf{Z}||\mathbf{I}| = 5\times10^3 \times 2\times10^{-3} = 10\ \mathrm{V} \Rightarrow P_{R_3} = \frac{1}{2}\frac{|\mathbf{V}|^2}{R} = 100/8000 = 12{,}5\ \mathrm{mW}$$

Potenza complessa erogata dall'operazionale A1:

$$\mathbf{S} = ½\ \mathbf{V}_b\ (-2\mathbf{I})^* = (-R\mathbf{I})\ (-\mathbf{I}^*) = R|\mathbf{I}|^2 = 16\ \mathrm{mW} = P_{A1}$$

Potenza complessa erogata dall'operazionale A2:

$$\mathbf{S} = ½\ \mathbf{V}\ \mathbf{I}_o^* = ½\ \mathbf{Z}\ \mathbf{I}\left(\mathbf{I} + \frac{\mathbf{ZI}}{R}\right)^* = ½\ \mathbf{Z}|\mathbf{I}|^2\left(1 + \frac{\mathbf{Z}^*}{R}\right) = ½\ \mathbf{Z}|\mathbf{I}|^2 + ½\ |\mathbf{I}|^2\frac{|\mathbf{Z}|^2}{R}$$

$$P_{A2} = \mathrm{Re}[\mathbf{S}] = ½\ 3\times4\times10^{-3} + ½\ 4\ (25/4)\times10^{-3} = (6 + 12{,}5)\times10^{-3} = 18{,}5\ \mathrm{mW}$$

Poiché il generatore di corrente non eroga potenza (la tensione è nulla), si verifica facilmente la proprietà di conservazione della potenza media. La fase del generatore è ininfluente.

10.33

Considerando il circuito simbolico alla pulsazione ω si ricavano le espressioni delle potenze medie nei due resistori:

$$P_1 = \frac{1}{2}RI_1^2 = \frac{1}{2}R\frac{V_m^2}{R^2 + (\omega L)^2}$$

$$P_2 = \frac{1}{2}RI_2^2 = \frac{1}{2}R\frac{V_m^2}{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} = \frac{1}{2}R\frac{V_m^2(\omega C)^2}{1 + (\omega RC)^2}$$

Il rapporto delle potenze è

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{(\omega C)^2\left[R^2 + (\omega L)^2\right]}{1 + (\omega RC)^2} = \frac{(\omega RC)^2\left[1 + \left(\frac{\omega L}{R}\right)^2\right]}{1 + (\omega RC)^2} = (\omega RC)^2 = \omega^2 C^2\frac{L}{C} = \omega^2 LC$$

dove si è utilizzata la condizione $RC = L/R$ ovvero $R^2 = L/C$.
L'impedenza vista dal generatore è R, infatti:

$$\mathbf{Z} = \frac{(R + j\omega L)\left(R + \dfrac{1}{j\omega C}\right)}{R + j\omega L + R + \dfrac{1}{j\omega C}} = \frac{(R + j\omega L)(1 + j\omega RC)}{1 - \omega^2 LC + j2\omega RC} = \frac{R(1 - \omega^2 LC) + j\omega R(RC + L/R)}{1 - \omega^2 LC + j2\omega RC} = R$$

Nell'ultimo passaggio si è utilizzata la condizione $RC = L/R$.

Quindi la potenza media erogata dal generatore è $\frac{1}{2}\frac{V_m^2}{R}$.

10.35

$\varphi_1 = \cos^{-1}(0{,}8) = 36{,}87° \Rightarrow \tan\varphi_1 = 0{,}75$. Utilizzando la formula (10.39) del libro abbiamo l'equazione

$$33\times 10^{-6} = \frac{5\times 10^3(0{,}75 - \tan\varphi_2)}{100\pi 380^2}$$

dalla quale si ricava

$$\tan\varphi_2 = 0{,}45 \quad\Rightarrow\quad \varphi_2 = 24{,}25° \quad\Rightarrow\quad \cos\varphi_2 = 0{,}91$$

10.36

Prima del rifasamento. Il fasore della corrente è

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}_g}{5{,}4 + j7{,}5} \Rightarrow \quad I_{eff} = \frac{380}{\sqrt{5{,}4^2 + 7{,}5^2}} = 41{,}1 \text{ A}$$

Il fasore della tensione è

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_g \frac{5 + j7{,}5}{5{,}4 + j7{,}5} \quad\Rightarrow\quad V_{eff} = \frac{380\sqrt{25 + 7{,}5^2}}{\sqrt{5{,}4^2 + 7{,}5^2}} = 370{,}6 \text{ V}$$

Potenza media dissipata nella linea e potenza media del carico:

$$P_d = 0{,}4 I_{eff}^2 = 675{,}7 \text{ W} \qquad P_u = 5 I_{eff}^2 = 8446 \text{ W}$$

Rendimento:

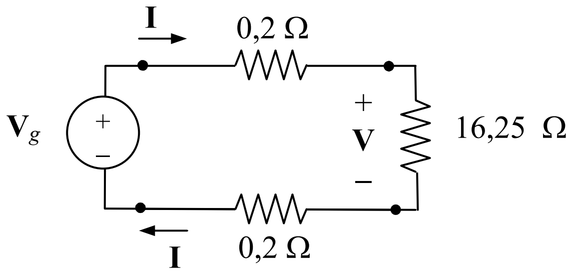
$$\eta = \frac{P_u}{P_u + P_d} = 0{,}926$$

Dopo il rifasamento. Il condensatore di rifasamento viene collegato in parallelo al carico; la capacità C deve essere tale da annullare la parte immaginaria dell'ammettenza

$$\mathbf{Y} = j\omega C + \frac{1}{5 + j7{,}5} = j\omega C + \frac{5 - j7{,}5}{81{,}25}$$

Con l'inserimento del condensatore l'impedenza si riduce ad una resistenza di 81,25/5 = 16,25 Ω. Per determinare le grandezze richieste possiamo fare riferimento allo schema seguente.

La tensione **V** coincide con la tensione del carico, essendo il condensatore in parallelo. La potenza assorbita dal resistore equivalente di 16,25 Ω coincide con la potenza assorbita dal carico poiché il condensatore non assorbe potenza media.



$$I_{eff} = \frac{380}{16,65} \cong 22,8\,\mathrm{A} \qquad V_{eff} = 380\frac{16,25}{16,65} \cong 371\,\mathrm{V}$$

$$P_d = 0,4 I_{eff}^2 \cong 208\,\mathrm{W} \qquad P_u = 16,25 I_{eff}^2 \cong 8447\ \mathrm{W}$$

$$\eta = \frac{P_u}{P_u + P_d} = 0,976$$

10.37

Il 50% dell'energia attiva è pari a 850 kWh, il 75% è 1275 kWh. La quantità di energia reattiva compresa tra il 50% e il 75% di quella attiva è 1275-850 = 425 kVARh, quella eccedente il 75% è 1460-1275 = 185 kVARh. Quindi la penale è 0,03×425+0,04×185 = 20,15 €.
Il fattore di potenza medio è

$$\cos\varphi = \frac{1700}{\sqrt{1700^2 + 1460^2}} = 0,76$$

10.38

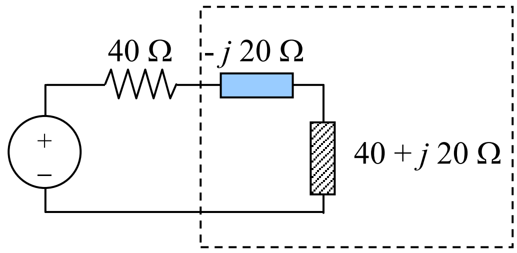
Lo sfasamento attuale è $\varphi_1 = \tan^{-1}\frac{6}{10} = 31°$. L'angolo desiderato è $\varphi_2 = \cos^{-1} 0,9 = 25,8°$. Con la formula (10.39) si ricava

$$C = \frac{10\times 10^3 (0,6 - 0,48)}{100\pi 380^2} = 26,45\ \mu\mathrm{F}$$

Approssimando il valore a 26,5 μF, la capacità si può realizzare collegando in parallelo 26 condensatori da 1 μF e la serie di due condensatori da 1 μF.

10.39

L'impedenza di carico deve essere coniugata dell'impedenza del generatore (40 Ω). Possiamo inserire un bipolo di impedenza –*j*20 Ω come nella figura seguente. Tale bipolo è un condensatore di capacità tale per cui 20 = 1/(ωC) ⇒ C=1/(20ω) = 0,159 mF. Il carico modificato vale 40 Ω quindi assorbe la massima potenza media. Tale potenza è assorbita dal bipolo di impedenza 40+*j*20 poiché il condensatore non assorbe potenza media.



10.40

L'impedenza del generatore per ω = 10^3 rad/s è: $\mathbf{Z}_s = \dfrac{-j10^6}{10^3(1-j)} = \dfrac{10^3(1-j)}{2}\,\Omega$.

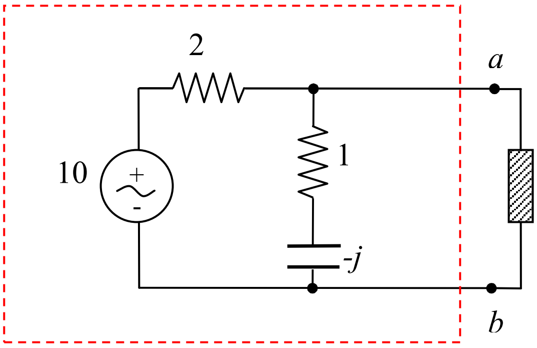
Per avere la massima potenza sul carico deve essere $R + j\omega L = \mathbf{Z}_s{}^* = \dfrac{10^3(1+j)}{2}$, quindi R = 500 Ω,

L = 500/ω = ½ H. La massima potenza è $P_{disp} = \dfrac{V_s^2}{8R_s} = \dfrac{1}{8\times 500} = 0{,}25$ mW.

10.41

Applicando il teorema di Thevenin al bipolo nel riquadro si ottiene:

$$\mathbf{V}_T = 10\frac{1-j}{3-j} = 2\sqrt{5}\angle -26{,}56° \qquad \mathbf{Z}_T = \frac{2(1-j)}{3-j} = \frac{2(1-j)(3+j)}{10} = \frac{4-j2}{5}\,\Omega$$



Il bipolo incognito deve avere impedenza $\mathbf{Z} = \dfrac{4+j2}{5}\,\Omega$. Tale impedenza corrisponde alla serie di un resistore di resistenza 4/5 = 0,8 Ω e di un induttore di induttanza (2/5)/ω = 0,4 mH. La potenza massima è

$$P_{\max} = \frac{V_T^2}{8R_T} = \frac{20}{8\times(4/5)} = 3{,}125 \text{ W}$$

10.42

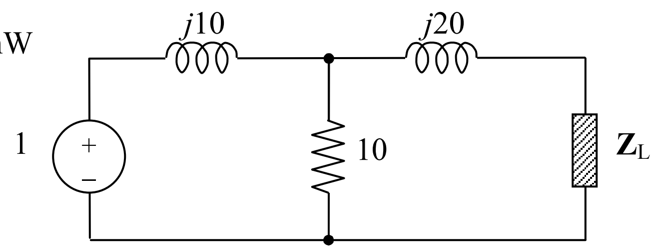
Procedendo come nell'esercizio precedente si ha:

$$\mathbf{V}_T = \frac{10}{10+j10} = \frac{1}{\sqrt{2}}\angle -45°$$

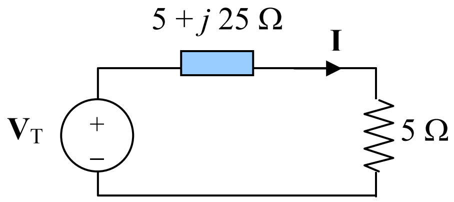
$$\mathbf{Z}_T = j20 + \frac{10\,j10}{10+j10} = \frac{j30-20}{1+j} = \frac{10+j50}{2} = 5 + j25\ \Omega$$

$\mathbf{Z}_L = 5 - j25\ \Omega$

$$P_{disp} = \frac{V_T^2}{8R_T} = \frac{1/2}{8\times 5} = 12{,}5 \text{ mW}$$



Per ricavare la potenza assorbita da un carico di 5 Ω si considera il circuito seguente.



$$|\mathbf{I}| = \left|\frac{\mathbf{V}_T}{5 + j25 + 5}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{10^2 + 25^2}} = \frac{1}{\sqrt{1450}} \text{ A} \quad \Rightarrow \qquad P = \frac{1}{2} 5 |\mathbf{I}|^2 = 1{,}72 \text{ mW}$$

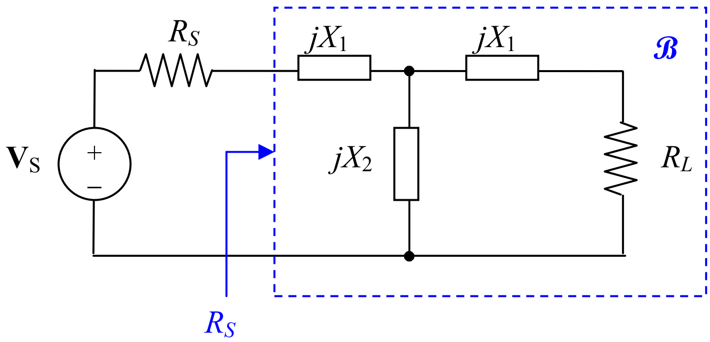
10.43

L'impedenza vista dal bipolo è $\mathbf{Z}_\mathrm{T}$ = (4+j2)//j = (4+j22)/25 Ω. Affinché il bipolo assorba la massima potenza media deve essere $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_\mathrm{T}^*$ ovvero

$$\mathbf{Z} = \frac{4 - j22}{25}\,\Omega$$

10.44

Poiché il quadripolo di adattamento non assorbe potenza media, possiamo imporre che l'impedenza equivalente del bipolo $\mathcal{B}$ sia pari a R_S. In questo caso la potenza disponibile del generatore viene assorbita dal bipolo $\mathcal{B}$ e quindi dal carico R_L.

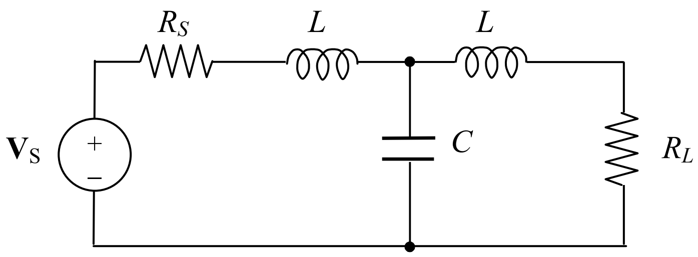


La condizione è

$$\mathbf{Z}_{eq} = jX_1 + \frac{(jX_1 + R_L)jX_2}{jX_1 + R_L + jX_2} = R_S$$

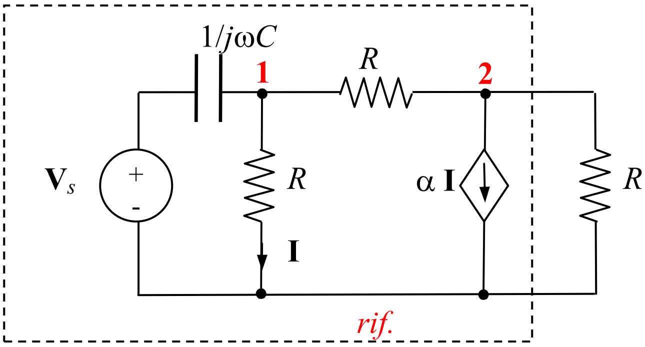
Ponendo $X_2 = -X_1$ e semplificando si ottiene la condizione $X_1^2 = R_S R_L$, ovvero $X_1 = \pm\sqrt{R_S R_L}$.

Con R_S = 5 Ω, R_L = 10 Ω si ha $X_1 = \pm\sqrt{50} \cong \pm 7$ Ω. Se si sceglie X_1 = 7 Ω, X_2 = -7 Ω, si ha il circuito nella figura seguente, in cui L = 7/ω, C = 1/(7ω). Si noti che l'adattamento dipende dalla frequenza.



10.45

Applicando il teorema di Thevenin al bipolo nel riquadro, sia la tensione a vuoto sia l'impedenza equivalente sono funzioni di α, mentre il carico è fissato (*R*). In questo caso non possiamo applicare il teorema del massimo trasferimento di potenza. Per risolvere l'esercizio dobbiamo ricavare la potenza assorbita dal resistore in funzione di α e determinare il massimo.



LKC nodo 1 $$j\omega C(\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_s) + \frac{\mathbf{V}_1}{R} + \frac{\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2}{R} = 0$$

LKC nodo 2 $$\frac{\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1}{R} + \alpha\frac{\mathbf{V}_1}{R} + \frac{\mathbf{V}_2}{R} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 2 + j\omega RC & -1 \\ 1-\alpha & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j\omega RC\mathbf{V}_s \\ 0 \end{bmatrix}$$

Soluzione:

$$\mathbf{V}_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 + j\omega RC & j\omega RC\mathbf{V}_s \\ 1-\alpha & 0 \end{vmatrix}}{-2(2 + j\omega RC) + 1 - \alpha} = \frac{j\omega RC\mathbf{V}_s(1-\alpha)}{3 + \alpha + 2j\omega RC}$$

La potenza assorbita dal resistore è

$$P = \frac{|\mathbf{V}_2|^2}{2R}$$

Per determinare il massimo possiamo considerare la funzione

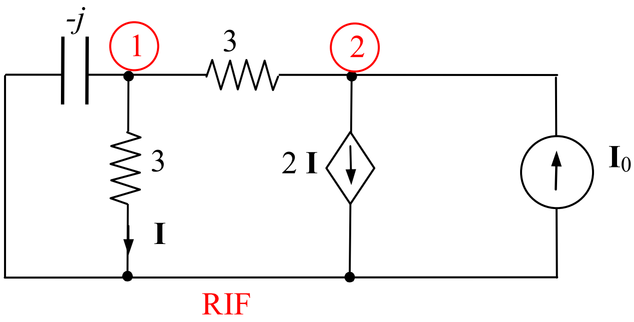
$$\frac{(1-\alpha)^2}{(3+\alpha)^2 + 4(\omega RC)^2}$$

La derivata rispetto ad α si annulla per α=1 e α= -3-(ωRC)^2. Il primo valore è un minimo (la funzione si annulla); il secondo valore corrisponde ad un massimo.
La potenza massima è

$$P_{\max} = \frac{V_m^2(4 + (\omega RC)^2)}{2R}$$

10.46

Ricaviamo l'impedenza vista dal carico, spegnendo il generatore di tensione. L'impedenza vista dal carico è $\mathbf{V}_2/\mathbf{I}_0$.



LKC nodo 1
$$j\mathbf{V}_1 + \frac{\mathbf{V}_1}{3} = \frac{\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1}{3}$$

LKC nodo 2
$$\frac{\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2}{3} + \mathbf{I}_0 = 2\frac{\mathbf{V}_1}{3}$$

$$\begin{bmatrix} 2+j3 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3\mathbf{I}_0 \end{bmatrix}$$

Soluzione:
$$\mathbf{V}_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2+j3 & 0 \\ -1 & -3\mathbf{I}_0 \end{vmatrix}}{-3-j3} = \frac{2+j3}{1+j}\mathbf{I}_0$$

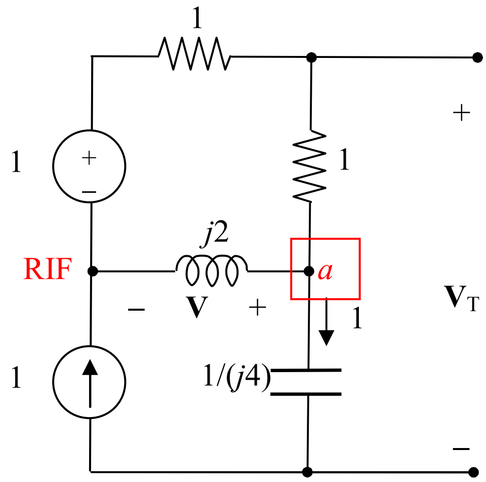
Quindi
$$\mathbf{Z}_T = \frac{2+j3}{1+j}\Omega$$

Per avere la massima potenza deve essere verificata la condizione
$$\frac{jX\,2{,}6}{jX+2{,}6} = \mathbf{Z}_T{}^* = \frac{2-j3}{1-j}$$

La soluzione è
$$X = \frac{5{,}2-j7{,}8}{-0{,}4+j0{,}6} = -13\ \Omega$$

10.47

Si applica il teorema di Thevenin al bipolo collegato al bipolo di impedenza **Z.**
La tensione $\mathbf{V}_T$ si può ricavare con l'analisi nodale (figura seguente).



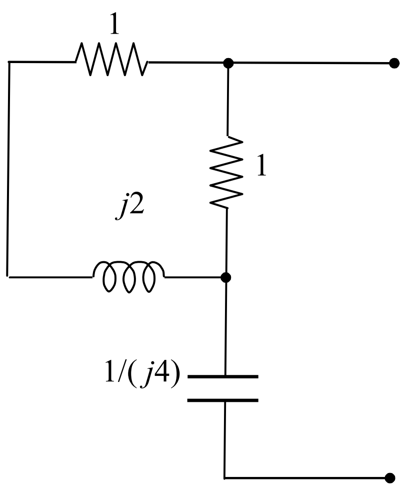
La corrente del condensatore ha fasore 1 perché è in serie al generatore di corrente. Inoltre i due resistori sono in serie. Applicando la LKC al nodo ***a*** si ottiene:

$$\frac{\mathbf{V}}{j2}+\frac{\mathbf{V}-1}{2}+1=0 \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{V} = -\,(1+j)/2$$

La tensione $\mathbf{V}_\mathrm{T}$ è la somma della tensione del resistore verticale e della tensione sul condensatore. La prima è $(1-\mathbf{V})/2$, la seconda è $1/(j4)$: si ottiene $\mathbf{V}_\mathrm{T} = ¾$ V.

L'impedenza equivalente si ricava dallo schema mostrato di seguito, ottenuto spegnendo i generatori:

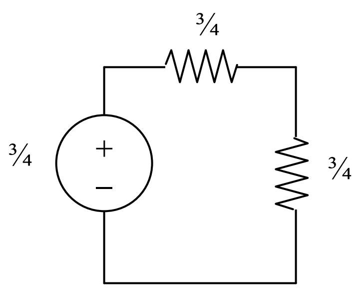
$$\mathbf{Z}_\mathrm{T} = 1//(1+j2) + 1/(j4) = \frac{1+j2}{2+j2}+\frac{1}{j4}=\frac{(1+j2)(1-j)}{4}-\frac{j}{4}=\frac{3}{4}\,\Omega$$



La potenza massima si ottiene con la formula

$$P_{\max} = \frac{|\mathbf{V}_T|^2}{8\ \ \mathrm{Re}[\mathbf{Z}_T]} = 3/32\ \mathrm{W}$$

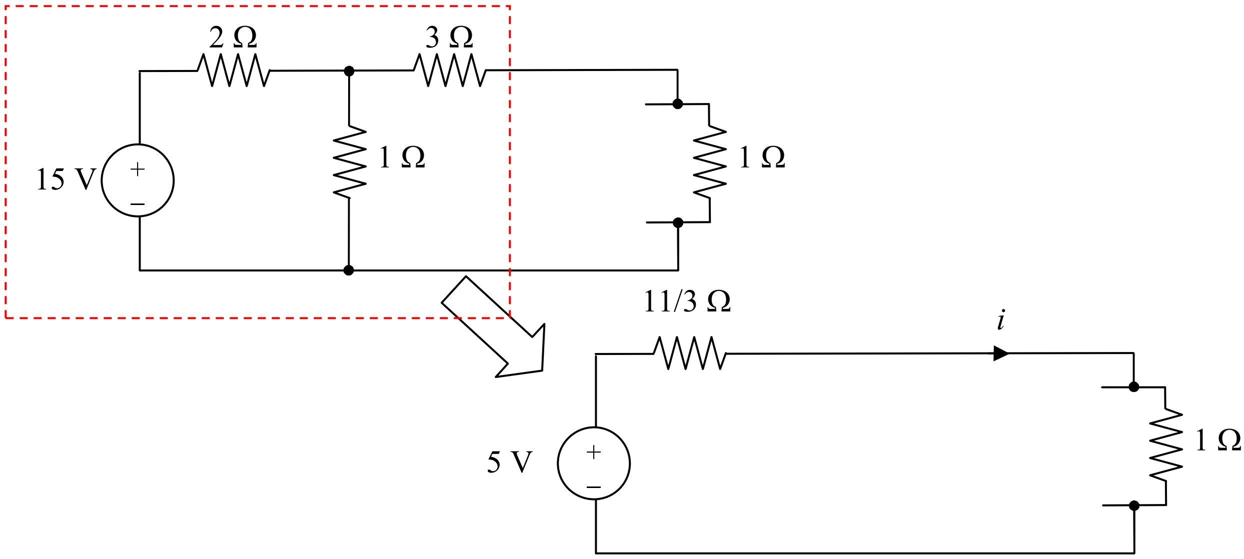
che corrisponde al circuito equivalente mostrato a destra.



10.48

Spegnendo il generatore sinusoidale si ha la figura seguente. Applicando il teorema di Thevenin si ricava

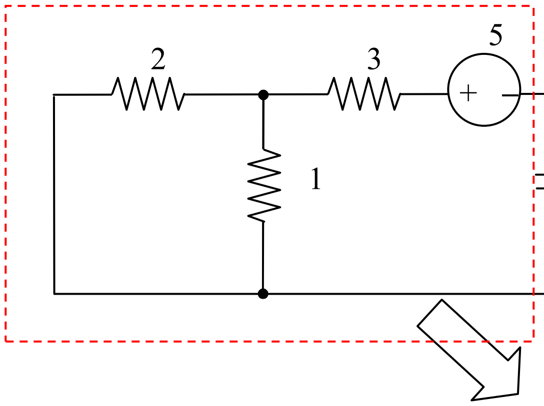
$$i = \frac{5}{\frac{11}{3}+1} = \frac{15}{14}\,\mathrm{A} \qquad \Rightarrow \qquad P_1 = \left(\frac{15}{14}\right)^2 \cong 1{,}15\ \mathrm{W}$$

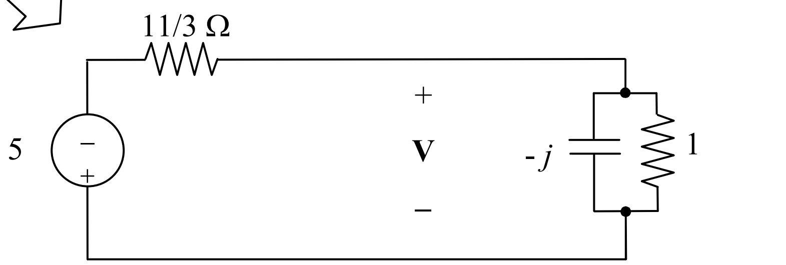


Spegnendo il generatore costante si ha il circuito simbolico seguente. Applicando il teorema di Thevenin si ottiene il circuito mostrato sotto. Si ottiene ($\mathbf{Z} = 1//(-j)$):

$$\mathbf{V} = -5\frac{\mathbf{Z}}{\frac{11}{3}+\mathbf{Z}} = \frac{-15(1-j)}{25-j3}$$

$$P_2 = \frac{1}{2}|\mathbf{V}|^2 = \frac{1}{2}\,\frac{225\times 2}{625+9} \cong 0{,}35\ \mathrm{W}$$

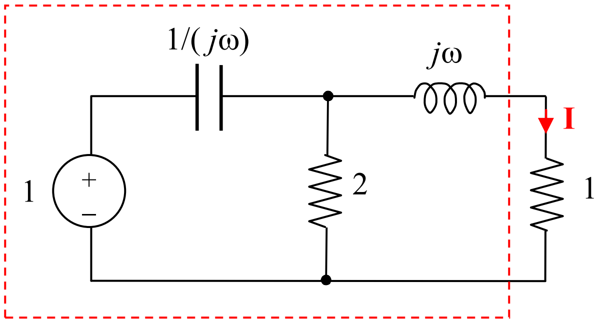




Infine $P = P_1 + P_2 = 1{,}5\ \mathrm{W}$.

10.49

Poiché per entrambe le frequenze il fasore del generatore è lo stesso, conviene considerare un solo circuito simbolico, ricavando la potenza media del resistore in funzione di ω.



Applicando il teorema di Thevenin al bipolo nel riquadro si ottiene:

$$\mathbf{V}_T = \frac{2}{2+\frac{1}{j\omega}} = \frac{j2\omega}{1+j2\omega} \qquad \mathbf{Z}_T = \frac{\frac{2}{j\omega}}{2+\frac{1}{j\omega}} + j\omega = \frac{2+j\omega-2\omega^2}{1+j2\omega}$$

Quindi

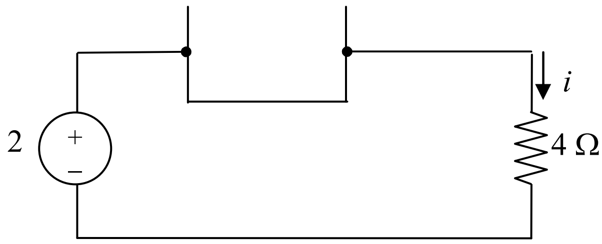
$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}_T}{\mathbf{Z}_T+1} = \frac{j2\omega}{3+j3\omega-2\omega^2} \quad \Rightarrow \quad P = \frac{1}{2}|\mathbf{I}|^2 = \frac{1}{2}\,\frac{4\omega^2}{9-3\omega^2+4\omega^4}$$

Sostituendo nell'espressione precedente ω=1 e ω=2 si ricavano le potenze:

$$P_1 = \frac{1}{5}\,\mathrm{W} \qquad P_2 = \frac{8}{61}\,\mathrm{W} \quad \Rightarrow \quad P = P_1 + P_2 \cong 0{,}33\ \mathrm{W}$$

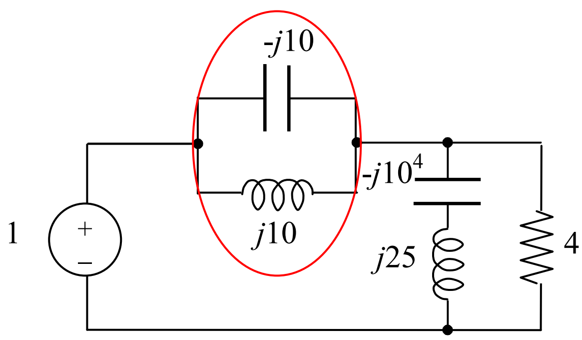
10.50

ω = 0



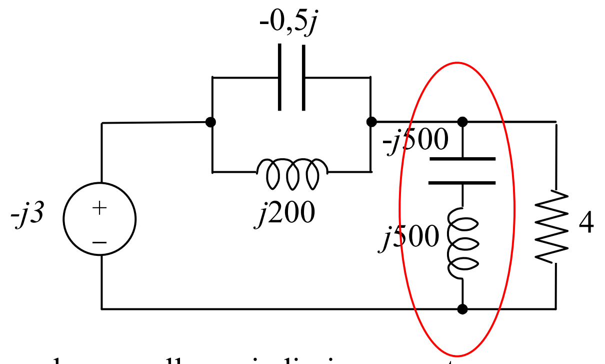
$$P = Ri^2 = 4\left(\frac{2}{4}\right)^2 = 1\ \mathrm{W}$$

ω = 100 rad/s



Il parallelo L//C ha ammettenza $\mathbf{Y} = \frac{1}{j10} - \frac{1}{j10} = 0$, quindi si comporta come un c.a. Pertanto la corrente del resistore è nulla, così come la potenza media.

ω = 2000 rad/s



La serie L-C ha impedenza nulla, quindi si comporta come un c.c. Il resistore è cortocircuitato dunque la corrente è nulla, così come la potenza media. La potenza complessivamente assorbita dal resistore è 1 W.