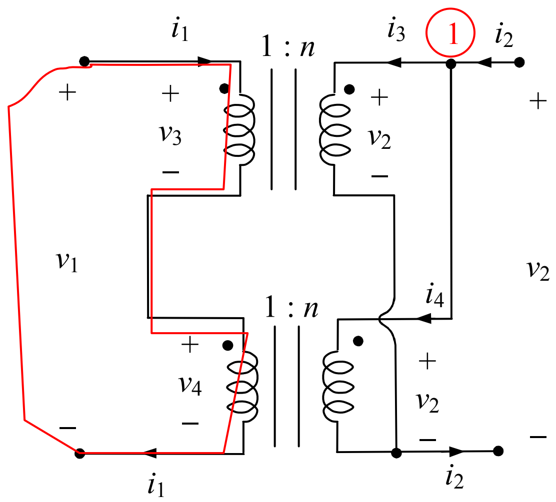
12.3

Applicando la LKT al percorso chiuso evidenziato si ricava

$$v_1 = v_3 + v_4 = 2\frac{v_2}{n}$$

Applicando la LKC al nodo 1 si ricava:

$$i_2 = i_3 + i_4 = -\frac{2}{n} i_1$$



12.7

Dalla relazione tra le correnti del trasformatore si ricava

$$i_2 = \frac{1}{n} i_1 \qquad \Rightarrow \qquad 1 = 2/n \qquad \Rightarrow \qquad n = 2$$

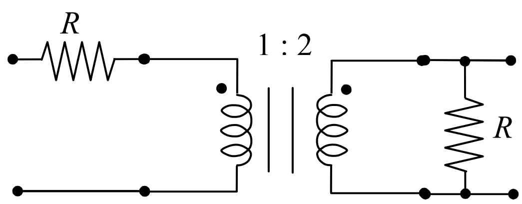
Dalla proprietà di trasformazione di resistenza

$$R_{in} = \frac{R}{n^2} = \frac{R}{4} = 8 \qquad \Rightarrow \qquad R = 32\ \Omega$$

12.9

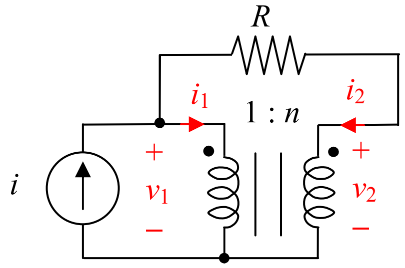
$$R_{eq} = \frac{5}{4} R = R + \frac{R}{4}$$

La resistenza $R/4$ si ottiene tra i morsetti del primario, se in parallelo al secondario c'è una resistenza R. Quindi la soluzione è la seguente.



12.10

Si applica un generatore di corrente ai terminali del bipolo.



Possiamo scrivere le seguenti relazioni:

LKC $\quad i = i_1 + i_2$

LKT e legge di Ohm $\quad i_2 = \dfrac{v_1 - v_2}{R}$

trasformatore $\quad v_2 = nv_1 \qquad i_1 = -ni_2$

Utilizzando le relazioni precedenti abbiamo

$$i = (1-n)i_2 = (1-n)\left(\frac{1-n}{R}\right)v_1$$

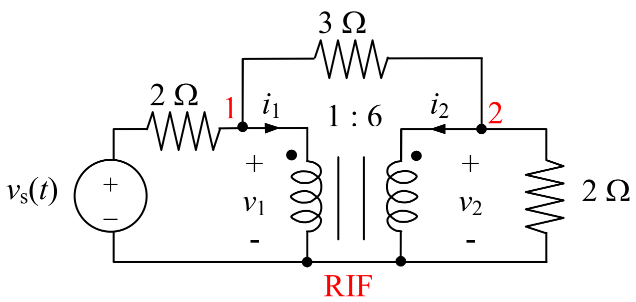
ovvero

$$v_1 = \frac{R}{(n-1)^2} i$$

Il rapporto v_1/i per definizione è la resistenza equivalente del bipolo.

12.11

Analisi nodale.



LKC nodo 1 $\quad \dfrac{v_s - v_1}{2} = \dfrac{v_1 - v_2}{3} + i_1$

LKC nodo 2 $\quad \dfrac{v_1 - v_2}{3} = \dfrac{v_2}{2} + i_2$

relazioni del trasformatore $\quad v_2 = 6v_1 \qquad i_2 = -\dfrac{1}{6} i_1$

Ricaviamo un sistema con due incognite, ad esempio v_1 e i_1. E' sufficiente sostituire v_2 e i_2 nelle equazioni LKC utilizzando le relazioni del trasformatore:

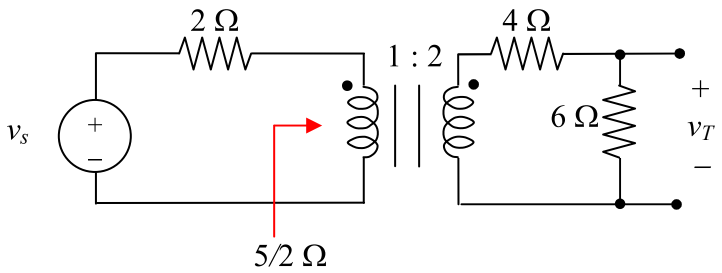
$$\begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -28 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3v_s \\ 0 \end{bmatrix}$$

Soluzione: $v_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} -3v_s & -6 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{-161} = \dfrac{3}{161} v_s \qquad i_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} 7 & -3v_s \\ -28 & 0 \end{vmatrix}}{-161} = \dfrac{84}{161} v_s$

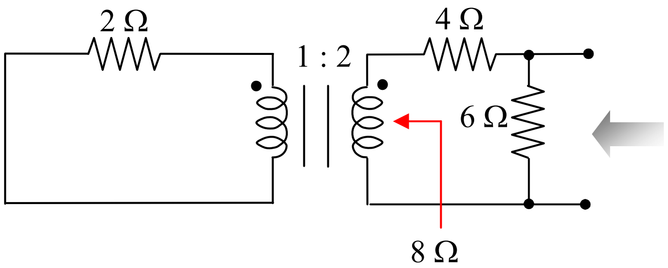
Utilizzando le relazioni del trasformatore: $v_2 = \dfrac{18}{161} v_s \qquad i_2 = -\dfrac{14}{161} v_s$

12.12

Riportando il circuito al primario si ottiene una resistenza equivalente 10/4 = 5/2 Ω. Perciò la tensione del primario è $v_1 = v_s \dfrac{5/2}{5/2+2} = \dfrac{5}{9} v_s$; la tensione del secondario è $v_2 = 2v_1 = \dfrac{10}{9} v_s$; la tensione a vuoto è $v_T = v_2 \dfrac{6}{6+4} = \dfrac{2}{3} v_s$.

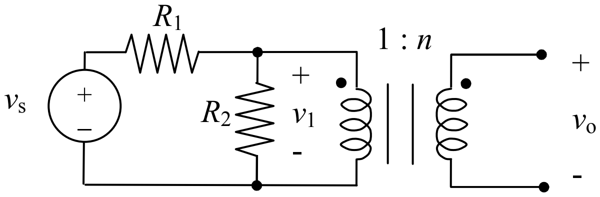


Per ottenere la resistenza equivalente si spegne il generatore (figura seguente). La resistenza vista tra i morsetti del secondario è $2n^2$ = 8 Ω. La resistenza equivalente è $R_T = 12 // 6 = 4$ Ω.



12.13

La corrente del secondario è nulla quindi lo è anche la corrente del primario. I resistori R_1 ed R_2 formano un partitore di tensione.



$$v_o = nv_1 = nv_s \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

Affinché il rapporto di trasferimento sia unitario deve essere

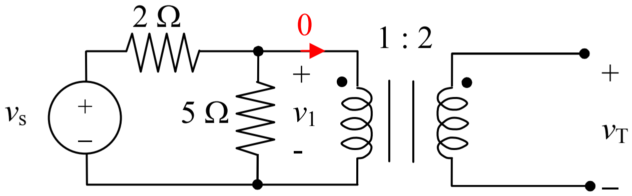
$$n\frac{R_2}{R_1+R_2}=1$$

Poiché abbiamo tre incognite la soluzione non è unica. Ad esempio, dalla relazione precedente si ricava

$$n=1+\frac{R_1}{R_2}$$

12.15

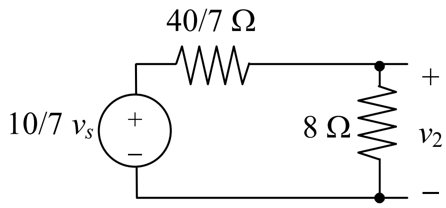
Conviene riportare il circuito al secondario del trasformatore applicando il teorema di Thevenin.
Lo schema per la tensione a vuoto è riportato di seguito. Poiché il secondario è aperto anche la corrente del primario è nulla.



Quindi:

$$v_T=2v_1=2v_s\frac{5}{5+2}=\frac{10}{7}v_s$$

$$R_T=4(2//5)=\frac{40}{7}\Omega$$

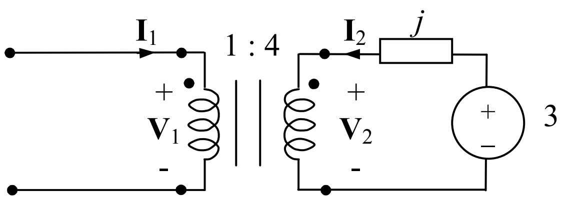


Il circuito riportato al secondario è mostrato a fianco.

$$\frac{v_2}{v_s}=\frac{10}{7}\frac{8}{8+\frac{40}{7}}=\frac{5}{6}$$

12.16

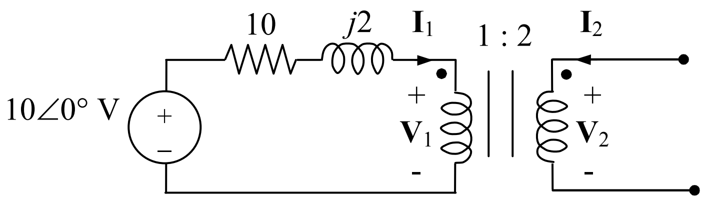
Tensione a vuoto. La corrente $\mathbf{I}_1$ è nulla quindi è nulla anche $\mathbf{I}_2$; pertanto $\mathbf{V}_T = \mathbf{V}_1 = (1/4)\ 3 = ¾$.



Impedenza equivalente. Si ricava con la formula della trasformazione di impedenza, $\mathbf{Z}_T=\frac{\mathbf{Z}_L}{n^2}=\frac{j}{16}\Omega$.

12.18

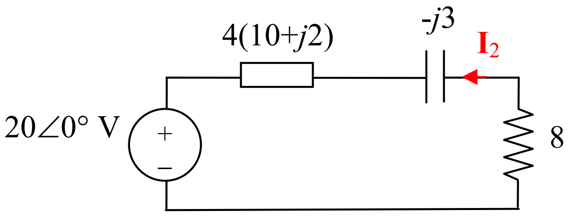
Conviene riportare il circuito al secondario del trasformatore applicando il teorema di Thevenin.
La corrente $\mathbf{I}_2$ è nulla, quindi è nulla anche $\mathbf{I}_1$; pertanto $\mathbf{V}_T = \mathbf{V}_2 = 2\mathbf{V}_1 = 20\angle 0°$.



L'impedenza equivalente si ottiene spegnendo il generatore e applicando la trasformazione di impedenza:

$$\mathbf{Z}_T = 4(10 + j2)\,\Omega$$

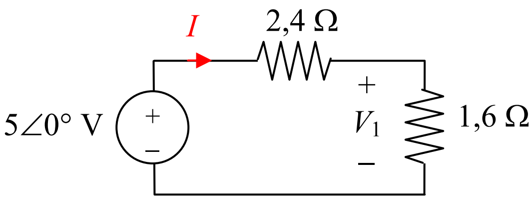
Il circuito riportato al secondario è mostrato di seguito.



$$\mathbf{I}_2 = \frac{-20}{48 + j5} \cong 0{,}41\angle\ 174°\ \text{A}$$

12.19

(a) Riportando il circuito al primario del primo trasformatore si ottiene lo schema seguente,



$$R_{eq} = \frac{(8 \times 4)//8}{4} = 1{,}6\ \Omega$$

dal quale si ricava

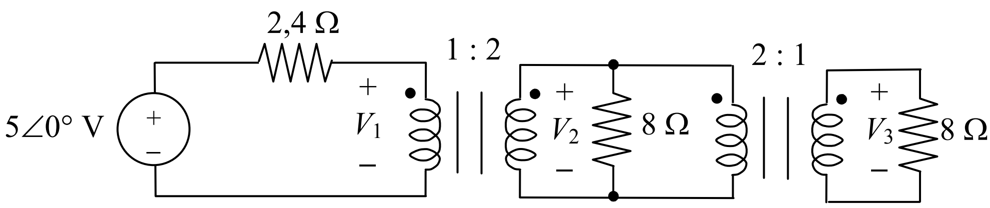
$$I = \frac{5}{2{,}4 + 1{,}6} = 1{,}25\ \text{A} \qquad \Rightarrow \qquad P_1 = \frac{1}{2} 2{,}4(1{,}25)^2 = 1{,}875\ \text{W}$$

$$V_1 = 1{,}6 \times 1{,}25 = 2\ \text{V}$$

Considerando il circuito originale si ricavano le altre potenze:

$$V_2 = 2V_1 = 4\ \text{V} \qquad \Rightarrow \qquad P_2 = \frac{1}{2}\frac{4^2}{8} = 1\ \text{W}$$

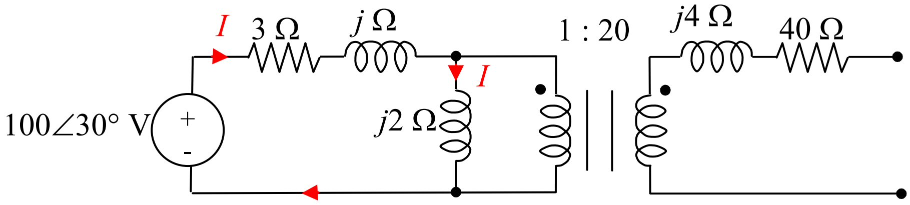
$$V_3 = \frac{V_2}{2} = 2\ \text{V} \qquad \Rightarrow \qquad P_3 = \frac{1}{2}\frac{2^2}{8} = 0{,}25\ \text{W}$$



$$P_{tot} = 1{,}875 + 1 + 0{,}25 = 3{,}125 \text{ W}$$

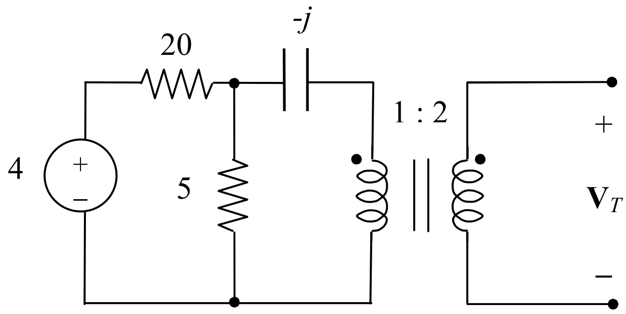
(b) Il secondario è aperto quindi la corrente scorre come indicato nella figura seguente. Perciò solo il resistore da 3 Ω dissipa potenza:

$$\mathbf{I} = \frac{100}{3(1+j)} \Rightarrow \qquad |\mathbf{I}| = \frac{100}{3\sqrt{2}} \text{ A} \quad \Rightarrow \qquad P = \frac{1}{2} 3 |\mathbf{I}|^2 \cong 833 \text{ W}$$



12.20

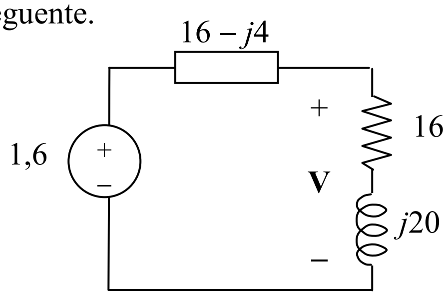
Riportiamo il circuito al secondario. Di seguito il circuito per ottenere la tensione a vuoto. Le correnti del trasformatore sono nulle quindi $\mathbf{V}_T$ è il doppio della tensione del resistore da 5 Ω:



$$V_T = 4\frac{5}{5+20} \times 2 = 1{,}6 \text{ V}$$

$$Z_T = 4(-j + 5 // 20) = 16 - j4 \ \Omega$$

Si ottiene lo schema seguente.

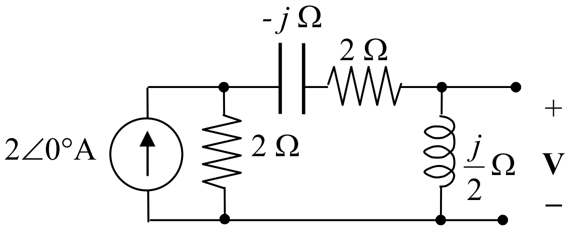


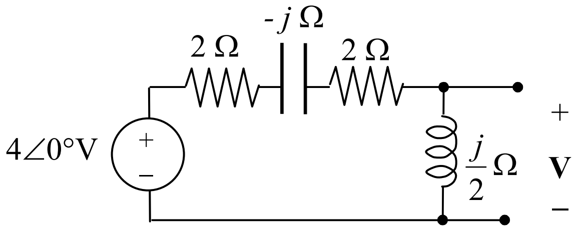
$$V = 1{,}6\frac{16+j20}{32+j16} = 0{,}4\frac{4+j5}{2+j} = 0{,}4\frac{\sqrt{41}}{\sqrt{5}} \angle \tan^{-1}(5/4) - \tan^{-1}(1/2) \cong 1{,}15\angle 24{,}8° \text{ V}$$

12.21

La corrente del secondario ha fasore 1 quindi la corrente del primario ha fasore 2 (verso uscente dal puntino). Applicando il principio di sostituzione si ha lo schema sotto a sinistra. Quindi, con la trasformazione del generatore, si ottiene lo schema a destra, da cui si ricava

$$\mathbf{V} = 4\frac{j/2}{j/2+4-j} = \frac{j4}{8-j} = \frac{4}{\sqrt{65}}\angle\, 90° + \tan^{-1}(1/8) \cong 0{,}496\angle\, 97°\ \mathrm{V}$$

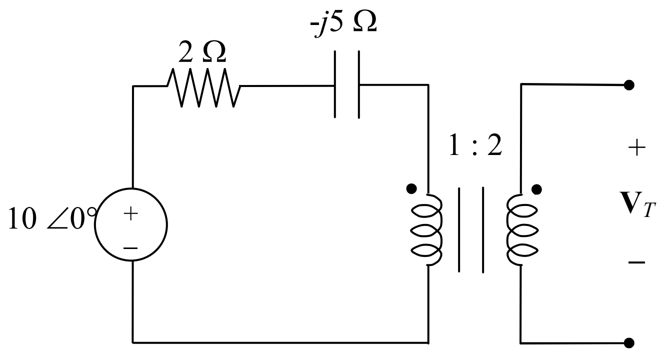




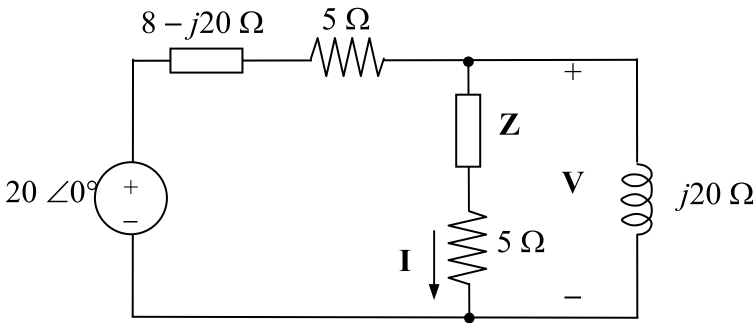
12.22

Riportiamo il circuito al secondario (figura seguente). Si ricava:

$$\mathbf{V}_T = 20\ \mathrm{V} \qquad \mathbf{Z}_T = 4(2-j5) = 8-j20\ \Omega$$



Il circuito riportato al secondario è mostrato di seguito, dove $\mathbf{Z} = \dfrac{j30}{3+j2}$ è l'impedenza equivalente del parallelo 15//j10.



$$\mathbf{Z}+5 = \frac{j30}{3+j2}+5 = \frac{5(3+j8)}{3+j2}\,\Omega$$

Con la formula di Millman si ricava:

$$\mathbf{V} = \frac{\dfrac{20}{13-j20}}{\dfrac{1}{13-j20} + \dfrac{3+j2}{5(3+j8)} + \dfrac{1}{j20}} = \frac{2000(3j-8)}{875+j2100} = \frac{80(3j-8)}{35+j84}$$

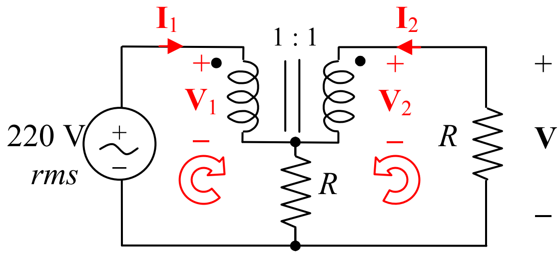
quindi

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}+5} = \frac{16j(3+j2)}{(35+j84)} = \frac{16\sqrt{13}}{\sqrt{8281}} \angle\, 90° + \tan^{-1}(2/3) - \tan^{-1}(84/35)$$

$$\mathbf{I} \cong 0{,}63 \angle\, 56{,}3° \text{ A}$$

12.23

Analisi delle maglie.



LKT maglia sinistra $\quad \mathbf{V}_1 + R(\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2) = 220$

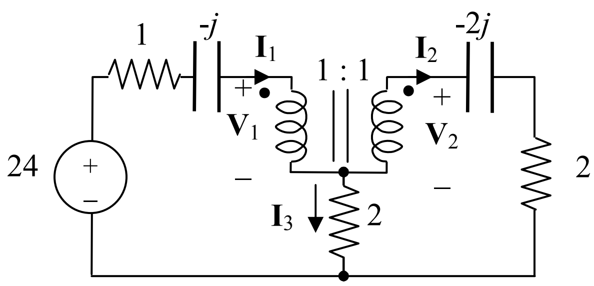
LKT maglia destra $\quad \mathbf{V}_2 + R(\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2) + R\mathbf{I}_2 = 0$

Rel. trasformatore $\quad \mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_1 \qquad \mathbf{I}_2 = -\mathbf{I}_1$

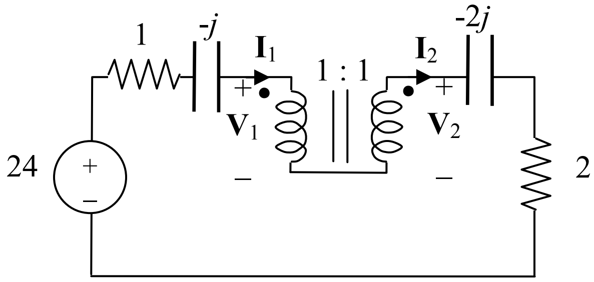
Poiché $\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 = 0$ si ricava facilmente la soluzione $\mathbf{V}_1 = 220$, $\mathbf{I}_2 = -220/R$. Infine $\mathbf{V} = -R\,\mathbf{I}_2 = 220$ V.

12.24

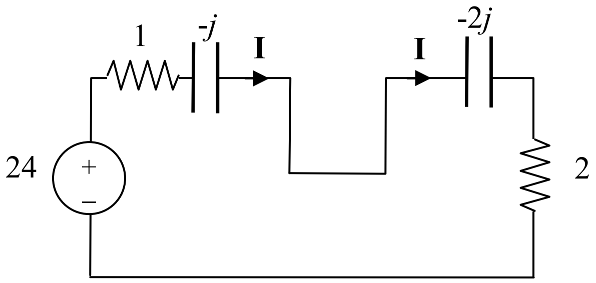
Con i versi indicati nella figura seguente si ha $\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_2$, $\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_2$, $\mathbf{I}_3 = 0$ (per la LKC).



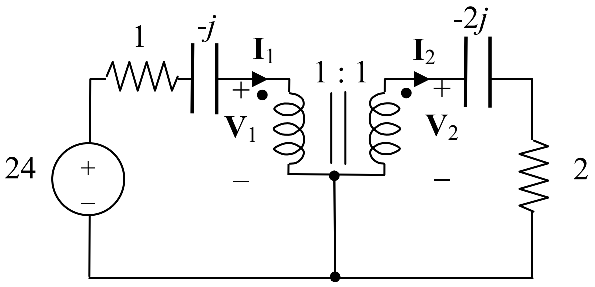
Il resistore centrale non è percorso da corrente dunque può essere eliminato (figura seguente).



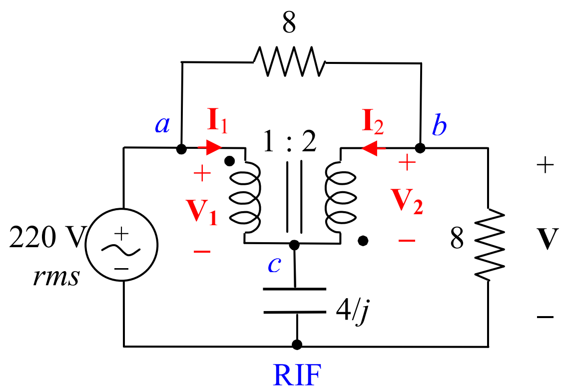
Inoltre, poiché $\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_2$, il trasformatore può essere sostituito da un corto circuito.



Dall'equazione LKT della maglia si ricava $\mathbf{I} = 8/(1-j)$ e quindi $P_1 = 16$ W e $P_2 = 32$ W; ovviamente la potenza del terzo resistore è nulla.
In alternativa si può sostituire il resistore centrale con un corto circuito (la tensione è nulla), riportando quindi al primario o al secondario per ricavare la corrente nei due resistori (figura seguente).



12.25
Analisi nodale. Indichiamo i nodi con le lettere *a,b* e *c*.



LKC nodo *b* $\quad \dfrac{V_a - V_b}{8} = \dfrac{V_b}{8} + I_2$

LKC nodo *c* $\quad I_1 + I_2 = \dfrac{jV_c}{4}$

Rel. trasformatore $\quad \mathbf{V}_2 = -2\mathbf{V}_1 \Rightarrow V_b - V_c = -2(V_a - V_c)$

$$\mathbf{I}_2 = \frac{\mathbf{I}_1}{2}$$

Dalla prima relazione del trasformatore si ricava $\mathbf{V}_c = (\mathbf{V}_b + 440)/3$; sostituendo $\mathbf{V}_c$ e $\mathbf{I}_1$ nelle equazioni LKC e ponendo $\mathbf{V}_a = 220$, si ottiene il sistema seguente:

$$\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1/(j3) & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_b \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 220 \\ j440/3 \end{bmatrix}$$

Soluzione:

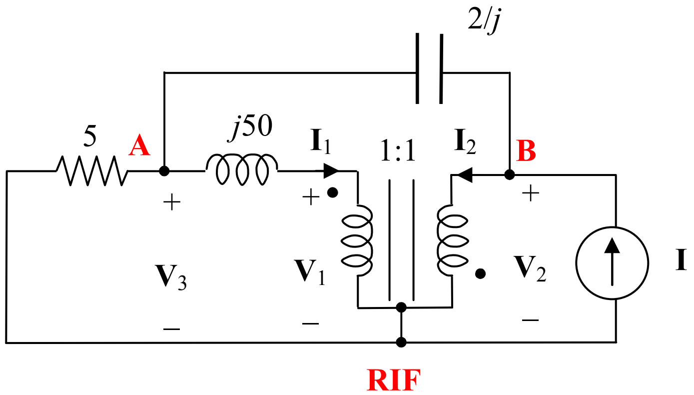
$$\mathbf{V}_b = \frac{\begin{vmatrix} 220 & 8 \\ j440/3 & 12 \end{vmatrix}}{24 - 8/(j3)} = \frac{110(4+j9)}{-1+j9} = 110\frac{\sqrt{16+81}}{\sqrt{1+81}}\angle \tan^{-1}(9/4) + \tan^{-1}(9) \pm 180°$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_b \cong 119{,}6 \angle -30{,}3° \text{ V } rms$$

Poiché la tensione del generatore è espressa come valore efficace, il modulo di **V** rappresenta il valore efficace.

12.26

Ricaviamo l'impedenza vista dal carico con l'interruttore chiuso.



Analisi nodale.

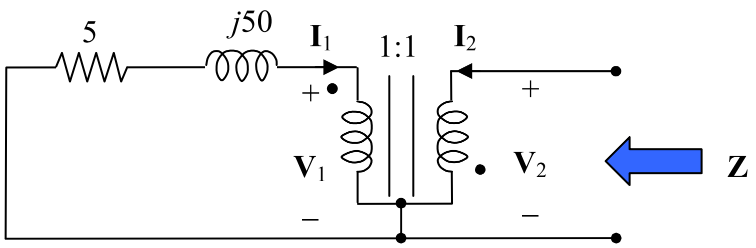
LKC nodo A $\mathbf{V}_3/5 + (\mathbf{V}_3 - \mathbf{V}_1)/(j50) + (\mathbf{V}_3 - \mathbf{V}_2)\,j/2 = 0$

LKC nodo B $\mathbf{I} = \mathbf{I}_2 + (\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_3)\,j/2$

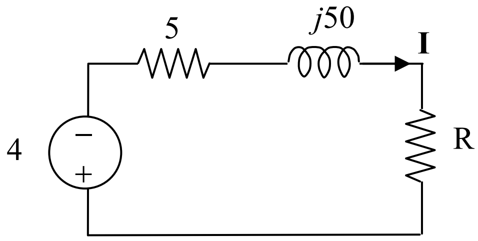
relazioni del trasformatore $\mathbf{I}_2 = \mathbf{I}_1$, $\mathbf{V}_2 = -\mathbf{V}_1$

Ricavando $\mathbf{V}_2$ si ottiene $\mathbf{V}_2 = 5\,\mathbf{I}$, quindi l'impedenza equivalente è 5 Ω. Per il teorema del massimo trasferimento di potenza, la potenza media sul carico è massima se $R = 5$ Ω.

Consideriamo ora il circuito con l'interruttore aperto (figura seguente). Essendo n=1, l'impedenza vista dal carico è $\mathbf{Z}_T = 5 + j50$ Ω.



Poiché il carico è resistivo il teorema del massimo trasferimento di potenza non è applicabile. Ricaviamo la potenza media in funzione di R e troviamo il massimo annullando la derivata. Riportando il circuito al secondario si ottiene lo schema seguente.

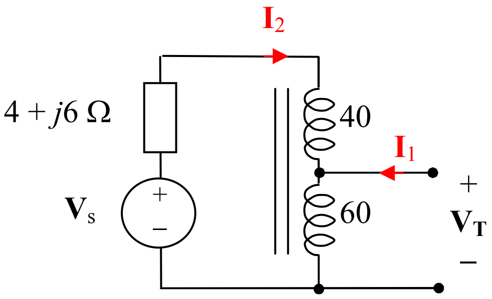


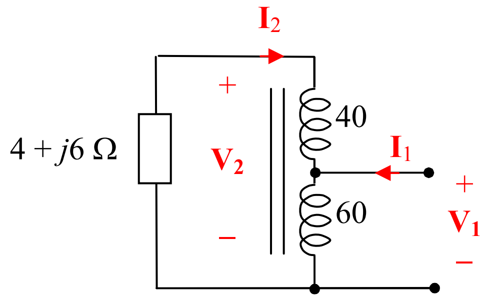
$$P = \frac{1}{2} R I^2 = \frac{1}{2} R \frac{16}{\left|5 + R + 50j\right|^2} = 8 \frac{R}{(5+R)^2 + 2500}$$

Annullando la derivata si ottiene $R = \sqrt{2525}\ \Omega$. Si noti che il valore ottimo di R è uguale al modulo dell'impedenza di Thevenin $\mathbf{Z}_T$ (v. pag. 389 del libro).

12.27

Le correnti $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$ sono proporzionali quindi, a morsetti aperti, $\mathbf{I}_2 = 0$; pertanto non c'è tensione ai capi dell'impedenza e $\mathbf{V}_T = \mathbf{V}_s$ (figura a sinistra).





Per determinare l'impedenza equivalente ricaviamo prima il rapporto di trasformazione:

$$n = \frac{N_1 + N_2}{N_2} = \frac{5}{3}$$

Quindi, utilizzando le relazioni dell'autotrasformatore, abbiamo (figura a destra):

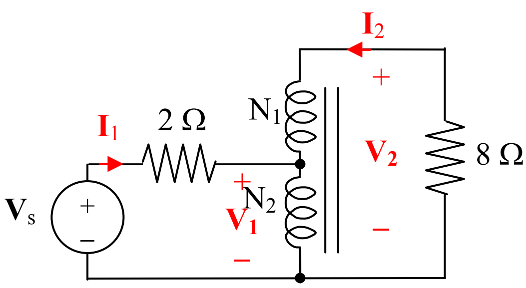
$$V_1 = \frac{V_2}{n} = -\frac{(4 + j6) I_2}{n} = \frac{4 + j6}{n^2} I_1$$

L'impedenza equivalente è $Z_T = \dfrac{4 + j6}{n^2} = 1{,}44 + j2{,}16\,\Omega$.

12.28

Rapporto N_1/N_2.

Utilizzando la notazione in figura abbiamo:



$$\frac{P_2}{P_1}=\frac{8I_2^2}{2I_1^2}=4\left(\frac{I_2}{I_1}\right)^2=\frac{4}{n^2}$$

dove $n=\dfrac{N_1+N_2}{N_2}=1+\dfrac{N_1}{N_2}$. Poiché $P_2/P_1 = 2$, si ricava $n=\sqrt{2}\Rightarrow N_1/N_2=\sqrt{2}-1$.

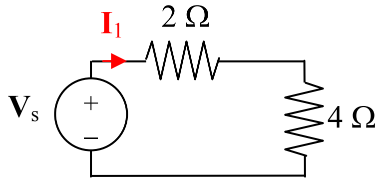
Valore efficace di v_s. Procedendo come nella soluzione dell'esercizio precedente si ricava

$$V_1=\frac{V_2}{n}=-\frac{8I_2}{n}=\frac{8}{n^2}I_1$$

Quindi la resistenza equivalente ai morsetti di ingresso è $R = 4\ \Omega$.

Il circuito equivale alla figura seguente, dalla quale si ricava: $V_s=6I_1 \Rightarrow V_s=6I_1$. Dalla espressione della potenza dissipata si ricava il valore efficace della corrente: $I_1=\sqrt{\dfrac{40}{2}}=2\sqrt{5}$ A.

Infine $V_s=12\sqrt{5}=26{,}8$ V.

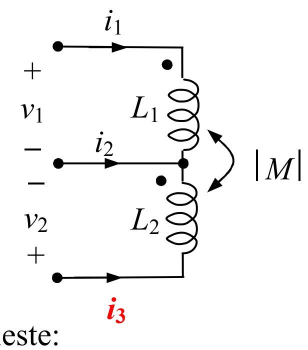


12.32

Chiamiamo i_3 la corrente del secondo induttore, con verso coordinato con la polarità della tensione v_2. Tenendo conto della posizione dei puntini le relazioni dei due induttori sono:

$$v_1=L_1\frac{di_1}{dt}-|M|\frac{di_3}{dt}$$

$$v_2=-|M|\frac{di_1}{dt}+L_2\frac{di_3}{dt}$$



Con la LKC si ricava

$$i_3=-i_1-i_2$$

Sostituendo i_3 nelle relazioni precedenti si ottengono le relazioni richieste:

$$v_1=(L_1+|M|)\frac{di_1}{dt}+|M|\frac{di_2}{dt}$$

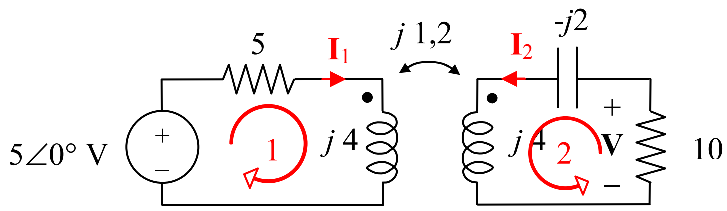
$$v_2=-(L_2+|M|)\frac{di_1}{dt}-L_2\frac{di_2}{dt}$$

12.33

Ricaviamo il valore di $\omega|M|$:

$$k=\frac{|M|}{\sqrt{L_1L_2}}=\frac{\omega|M|}{\sqrt{(\omega L_1)(\omega L_2)}}\quad\Rightarrow\quad \omega|M|=0{,}3\sqrt{4\times 4}=1{,}2$$

Analisi delle maglie.



LKT maglia 1 $\qquad 5\mathbf{I}_1 + j4\mathbf{I}_1 + j1{,}2\mathbf{I}_2 = 5$

LKT maglia 2 $\qquad 10\mathbf{I}_2 - j2\mathbf{I}_2 + j4\mathbf{I}_2 + j1{,}2\mathbf{I}_1 = 0$

Sistema:
$$\begin{bmatrix} 5+j4 & j1{,}2 \\ j1{,}2 & 10+j2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

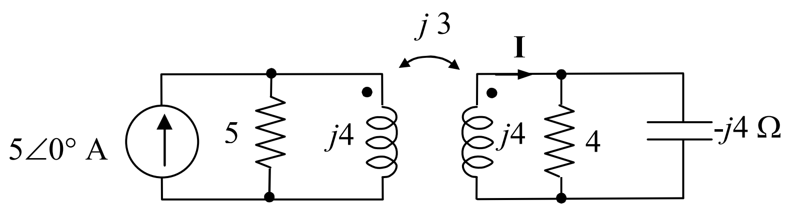
Soluzione:
$$\mathbf{I}_2 = \frac{\begin{vmatrix} 5+j4 & 5 \\ j1{,}2 & 0 \end{vmatrix}}{43{,}44+j50} = \frac{-j6}{43{,}44+j50} \qquad \Rightarrow \mathbf{V} = -10\mathbf{I}_2 = \frac{j60}{43{,}44+j50} \cong 0{,}9 \angle 41° \text{ V}$$

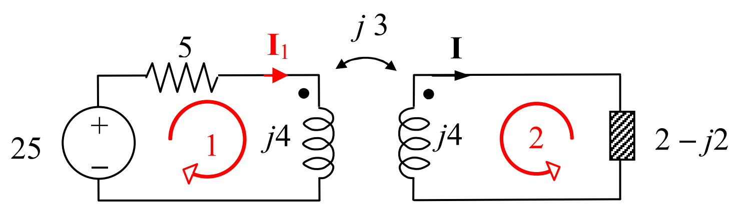
12.34

Ricaviamo il valore di ωL_2:

$$k = \frac{\omega|M|}{\sqrt{(\omega L_1)(\omega L_2)}} \qquad \Rightarrow \qquad \omega L_2 = \frac{(\omega M)^2}{k^2 \omega L_1} = \frac{9}{0{,}75^2 \times 4} = 4$$

Il circuito simbolico può essere trasformato in un circuito con due maglie ($2-j2$ è l'impedenza equivalente del parallelo $R//C$).





Analisi delle maglie ($\mathbf{I}_2 = -\,\mathbf{I}$):

LKT maglia 1 $\qquad 5\mathbf{I}_1 + j4\mathbf{I}_1 - j3\mathbf{I} = 25$

LKT maglia 2 $\qquad -(2-j2)\mathbf{I} - j4\mathbf{I} + j3\mathbf{I}_1 = 0$

Sistema: $$\begin{bmatrix} 5+j4 & -j3 \\ j3 & -2-j2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Soluzione:
$$\mathbf{I} = \frac{\begin{vmatrix} 5+j4 & 25 \\ j3 & 0 \end{vmatrix}}{-11-j18} = \frac{j75}{11+j18} \cong 3{,}55 \angle 31{,}4° \text{ A}$$

12.35

Con le relazioni degli induttori e la legge di Ohm si scrivono le relazioni seguenti:

$$\mathbf{V}_1 = j\omega L_1 \mathbf{I}_1 + j\omega|M|\mathbf{I}_2$$

$$\mathbf{V}_2 = j\omega|M|\mathbf{I}_1 + j\omega L_2 \mathbf{I}_2 = -\mathbf{Z}_L \mathbf{I}_2$$

Dalla seconda si ricava

$$\mathbf{I}_2 = -\frac{j\omega|M|}{j\omega L_2 + \mathbf{Z}_L}\mathbf{I}_1$$

Sostituendo $\mathbf{I}_2$ nella prima equazione si ottiene

$$\mathbf{V}_1 = \left[j\omega L_1 + \frac{(\omega M)^2}{j\omega L_2 + \mathbf{Z}_L} \right]\mathbf{I}_1 \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{Z}_{in} = j\omega L_1 + \frac{(\omega M)^2}{j\omega L_2 + \mathbf{Z}_L}$$

L'impedenza vista dal carico si può ricavare dall'espressione di $\mathbf{Z}_{in}$ scambiando i pedici 1 e 2 e ponendo $\mathbf{Z}_L = 0$:

$$\mathbf{Z}_o = j\omega L_2 + \frac{(\omega M)^2}{j\omega L_1} = j\omega L_2 - j\omega\frac{M^2}{L_1} = j\omega\left(L_2 - \frac{M^2}{L_1} \right)$$

12.36

Utilizzando l'espressione ottenuta nell'esercizio precedente abbiamo:

$$\mathbf{Z}_{in} = j\omega L + \frac{(\omega M)^2}{R_L + j\omega L} = \frac{j\omega L R_L - \omega^2 L^2 + \omega^2 M^2}{R_L + j\omega L} \qquad (1)$$

Con l'approssimazione $(R_L)^2 << (\omega L)^2$ e utilizzando la relazione $M = kL$, si ottiene:

$$|\mathbf{Z}_{in}| \cong \frac{\sqrt{(\omega L R_L)^2 + \omega^4 (M^2 - L^2)^2}}{\omega L} = \sqrt{R_L^2 + \omega^2 L^2 (k^2 - 1)^2}$$

$$\angle \mathbf{Z}_{in} = \tan^{-1}\frac{\omega L R_L}{\omega^2 (M^2 - L^2)} + \pi - \tan^{-1}\frac{\omega L}{R_L} = \tan^{-1}\frac{R_L}{\omega L (k^2 - 1)} - \tan^{-1}\frac{\omega L}{R_L} + \pi$$

Il termine π deriva dal fatto che il numeratore della (1) ha parte reale negativa (M<L).

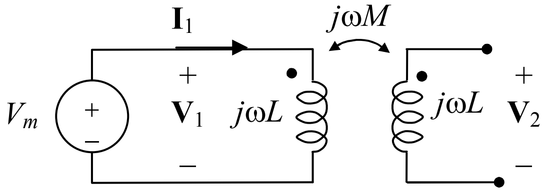
Per k=0 il modulo dell'impedenza vale circa ωL, mentre per k→1 il modulo tende a R_L.

Per k=0 l'angolo dell'impedenza è $\angle \mathbf{Z}_{in} = -\tan^{-1}\dfrac{R_L}{\omega L} - \tan^{-1}\dfrac{\omega L}{R_L} + \pi = -\dfrac{\pi}{2} + \pi = \dfrac{\pi}{2}$

Per k→1 l'angolo tende a $\dfrac{\pi}{2} - \tan^{-1}\dfrac{\omega L}{R_L}$; se $\omega L >> R_L$ l'angolo dell'impedenza tende a zero.

12.37

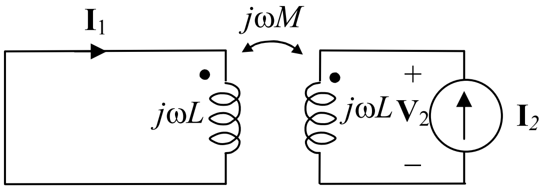
Applichiamo il teorema di Thevenin ai terminali di R_L.
Tensione a vuoto.



Relazioni degli induttori:

$$V_m = j\omega L\, \mathbf{I}_1$$
$$\mathbf{V}_2 = j\omega M\, \mathbf{I}_1 \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{V}_T = \mathbf{V}_2 = k\, V_m$$

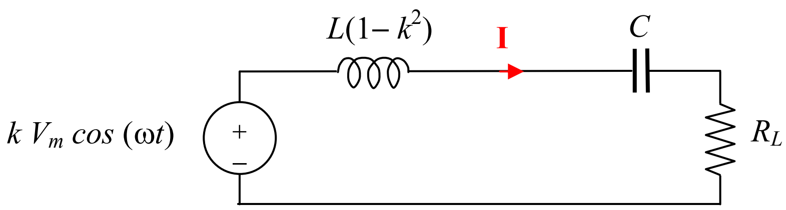
Impedenza equivalente.



Relazioni degli induttori:

$$0 = j\omega L\, \mathbf{I}_1 + j\omega M\, \mathbf{I}_2$$
$$\mathbf{V}_2 = j\omega M\, \mathbf{I}_1 + j\omega L\, \mathbf{I}_2 \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{Z}_T = \frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{I}_2} = j\omega L(1-k^2)$$

Sostituendo il circuito equivalente di Thevenin si ottiene lo schema RLC serie.

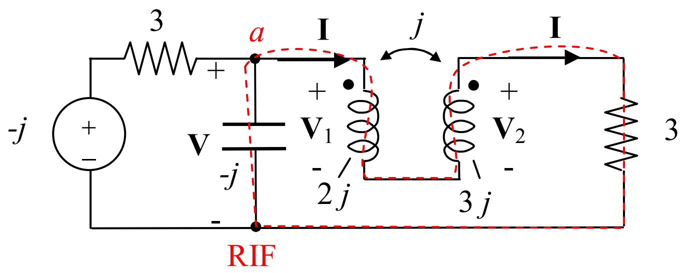


La potenza media si ottiene con la relazione seguente

$$P = \frac{1}{2}R_L|I|^2 = \frac{1}{2}R_L \frac{k^2 V_m^2}{R_L^2 + \left[\omega L(1-k^2) - \dfrac{1}{\omega C}\right]^2}$$

12.38

Il circuito simbolico è riportato nella figura seguente. Nella figura sono indicate le tensioni $\mathbf{V}_1$ e $\mathbf{V}_2$ degli induttori, la corrente comune **I**, la tensione **V** del condensatore e il riferimento per l'analisi nodale.



Equazione LKC del nodo *a*:

$$\frac{\mathbf{V}+j}{3}+j\mathbf{V}+\mathbf{I}=0 \qquad (1)$$

Per ricavare l'espressione della corrente **I** applichiamo la LKT alla maglia tratteggiata utilizzando le relazioni degli induttori accoppiati:

$$\mathbf{V}=\mathbf{V}_1-\mathbf{V}_2+3\,\mathbf{I}=j2\,\mathbf{I}-j\,\mathbf{I}-(\text{-}3j\,\mathbf{I}+j\,\mathbf{I})+3\mathbf{I}$$

da cui si ricava

$$\mathbf{I}=\frac{\mathbf{V}}{3+3j} \qquad (2)$$

Sostituendo **I** nella (1) e risolvendo l'equazione si ricava

$$\mathbf{V}=\frac{1-j}{-1+4j}$$

Calcoliamo le potenze. Per il resistore in serie al generatore possiamo ricavare la tensione

$$\mathbf{V}_{R_1}=-j-\mathbf{V}=\frac{3+2j}{-1+4j}$$

la potenza è

$$P_{R_1}=\frac{1}{2}\frac{\left|\mathbf{V}_{R_1}\right|^2}{3}=\frac{13}{6\times 17}\cong 127\,\text{mW}$$

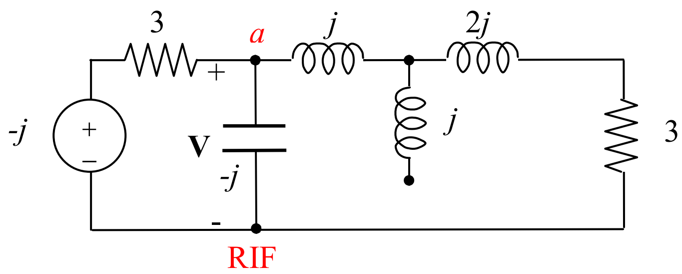
Per il resistore di destra possiamo ricavare la corrente dalla relazione (2):

$$\mathbf{I}=\frac{\mathbf{V}}{3+3j}=\frac{-j}{3(-1+4j)}$$

dunque

$$P_{R_2}=\frac{1}{2}3\left|\mathbf{I}\right|^2=\frac{1}{6\times 17}\cong 9.8\,\text{mW}$$

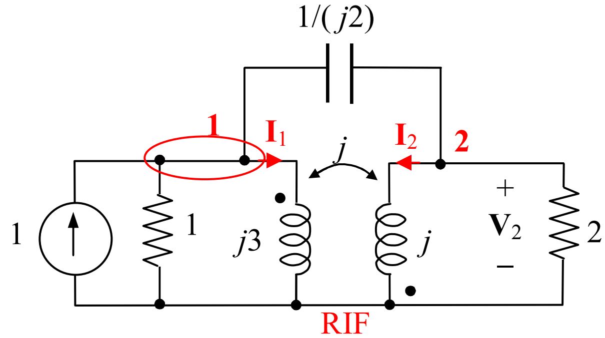
Metodo alternativo. Si possono sostituire gli induttori accoppiati con il circuito equivalente a T mostrato nella figura seguente.



L'induttore verticale non è percorso da corrente dunque gli induttori accoppiati equivalgono ad un semplice induttore di impedenza 3*j*. Si ricava la tensione **V** quindi si procede come sopra.

12.39

Analisi nodale.



LKC nodo 1 $\qquad \mathbf{V}_1 + (\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2) j2 + \mathbf{I}_1 = 1$

LKC nodo 2 $\qquad 0{,}5\mathbf{V}_2 + (\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1) j2 + \mathbf{I}_2 = 0$

Rel. induttori
$$\mathbf{V}_1 = j3\mathbf{I}_1 - j\mathbf{I}_2$$
$$\mathbf{V}_2 = -j\mathbf{I}_1 + j\mathbf{I}_2$$

Invertendo le relazioni precedenti si ricavano le correnti degli induttori:

$$\begin{bmatrix}\mathbf{V}_1\\ \mathbf{V}_2\end{bmatrix} = j\begin{bmatrix}3 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{I}_1\\ \mathbf{I}_2\end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{bmatrix}\mathbf{I}_1\\ \mathbf{I}_2\end{bmatrix} = \frac{1}{j2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{V}_1\\ \mathbf{V}_2\end{bmatrix}$$

Sostituendo nelle equazioni LKC si ottiene il sistema:

$$\begin{bmatrix}1 + j1{,}5 & -j2{,}5\\ -j2{,}5 & 0{,}5 + j0.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{V}_1\\ \mathbf{V}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$$

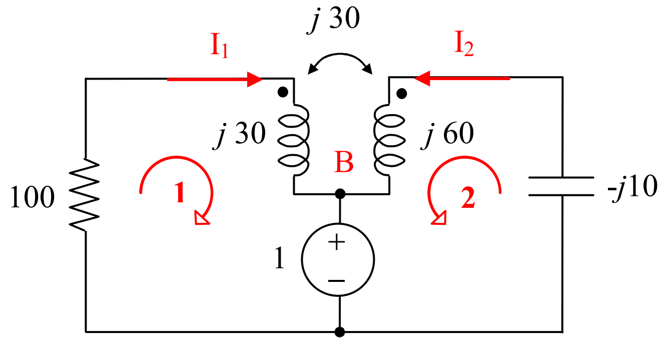
Soluzione:

$$\mathbf{V}_2 = \frac{\begin{vmatrix}1 + j1{,}5 & 1\\ -j2{,}5 & 0\end{vmatrix}}{6 + j1{,}25} = \frac{j2{,}5}{6 + j1{,}25} \cong 0{,}4\angle 78°$$

$v_2(t) = 0{,}4\cos(t + 78°)\ \mathrm{V}$

12.40

Analisi delle maglie.



LKT maglia 1 $\qquad j30\mathbf{I}_1 + j30\mathbf{I}_2 + 1 + 100\mathbf{I}_1 = 0$

LKT maglia 2 $\qquad j60\mathbf{I}_2 + j30\mathbf{I}_1 + 1 - j10\mathbf{I}_2 = 0$

Sistema:

$$\begin{bmatrix} 100 + j30 & j30 \\ j30 & j50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

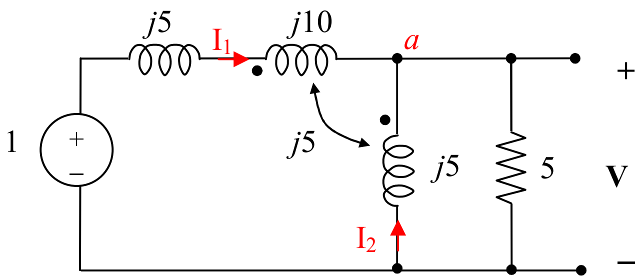
Soluzione:

$$\mathbf{I}_2 = \frac{\begin{vmatrix} 100 + j30 & -1 \\ j30 & -1 \end{vmatrix}}{-600 + j5000} = \frac{1}{6 - j50} \qquad \Rightarrow \mathbf{V}_C = -j10(-\mathbf{I}_2) = \frac{j10}{6 - j50} \cong 0{,}2\angle 173°$$

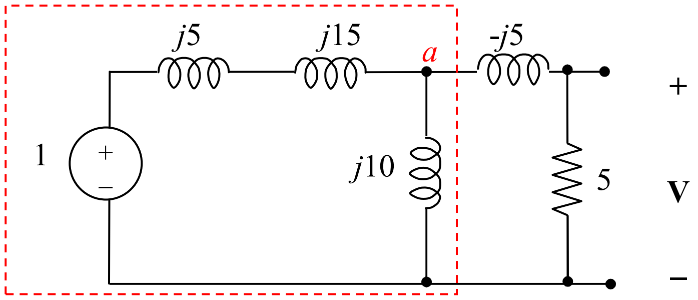
$$v_C(t) = 0{,}2\cos(10t + 173°)\,\text{V}$$

12.41

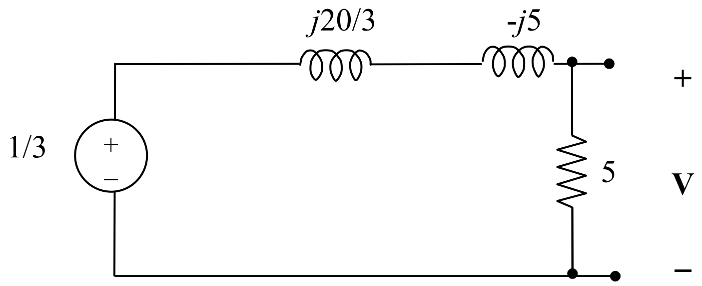
Circuito simbolico. Con i versi indicati per le correnti la mutua induttanza è *negativa*.



Con la *trasformazione a T* degli induttori accoppiati si ottiene lo schema seguente.



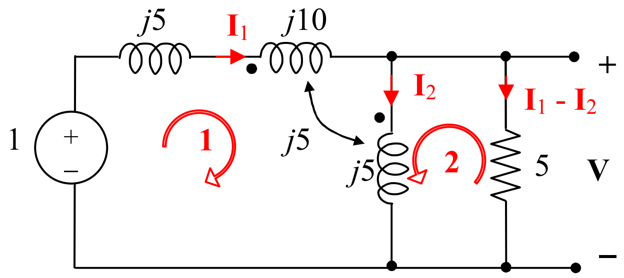
Applicando il teorema di Thevenin al bipolo nel riquadro si ottiene un partitore di tensione,



da cui si ricava:

$$\mathbf{V} = \frac{1}{3}\frac{5}{5 - j5 + \frac{j20}{3}} = \frac{1}{3 + j} = \frac{1}{\sqrt{10}}\angle\text{-}18{,}4° \qquad \Rightarrow \qquad v(t) = \frac{1}{\sqrt{10}}\cos(5t - 18{,}4°)\,\mathrm{V}$$

In alternativa si può risolvere con l'*analisi delle maglie*. Assumendo i versi delle correnti nella figura seguente, la mutua induttanza è positiva. Le polarità delle tensioni degli induttori si assumono coordinate con le correnti.



LKT maglia 1 $\qquad j5\mathbf{I}_1 + j10\mathbf{I}_1 + j5\mathbf{I}_2 + j5\mathbf{I}_2 + j5\mathbf{I}_1 - 1 = 0$

LKT maglia 2 $\qquad j5\mathbf{I}_2 + j5\mathbf{I}_1 - 5(\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2) = 0$

Sistema:

$$\begin{bmatrix} j20 & j10 \\ -5 + j5 & 5 + j5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

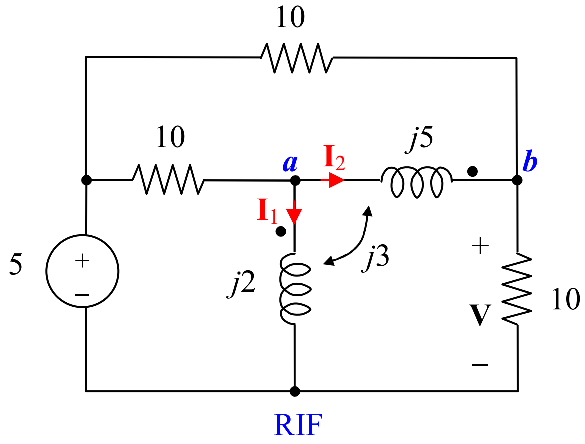
Soluzione:

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & j10 \\ 0 & 5 + j5 \end{vmatrix}}{-50 + j150} = \frac{1 + j}{-10 + j30} \qquad \mathbf{I}_2 = \frac{\begin{vmatrix} j20 & 1 \\ -5 + j5 & 0 \end{vmatrix}}{-50 + j150} = \frac{1 - j}{-10 + j30}$$

$$\mathbf{V} = 5(\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2) = \frac{j}{-1 + j3} = \frac{1}{3 + j}$$

12.42

Analisi nodale. Con i versi delle correnti indicati nel circuito simbolico della figura seguente, la mutua induttanza è negativa.



$$\text{LKC nodo } \boldsymbol{a} \qquad \frac{5-\mathbf{V}_a}{10} = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2$$

$$\text{LKC nodo } \boldsymbol{b} \qquad \frac{5-\mathbf{V}_b}{10} + \mathbf{I}_2 = \frac{\mathbf{V}_b}{10}$$

$$\text{Rel. induttori} \qquad \begin{aligned} \mathbf{V}_1 &= \mathbf{V}_a = j2\mathbf{I}_1 - j3\mathbf{I}_2 \\ \mathbf{V}_2 &= \mathbf{V}_a - \mathbf{V}_b = -j3\mathbf{I}_1 + j5\mathbf{I}_2 \end{aligned}$$

Invertendo le relazioni precedenti si ricavano le correnti degli induttori:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_a \\ \mathbf{V}_a - \mathbf{V}_b \end{bmatrix} = j\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = -j\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{V}_a \\ \mathbf{V}_a - \mathbf{V}_b \end{bmatrix}$$

Sostituendo nelle equazioni LKC si ottiene il sistema:

$$\begin{bmatrix} 1-j130 & j50 \\ j50 & 2-j20 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{V}_a \\ \mathbf{V}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

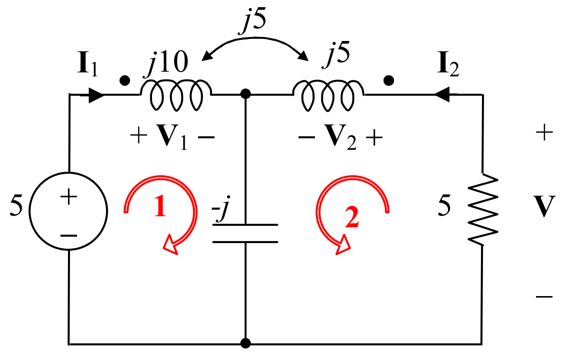
Soluzione:

$$\mathbf{V}_b = \frac{\begin{vmatrix} 1-j130 & 5 \\ j50 & 5 \end{vmatrix}}{-98-j280} = \frac{5-j900}{-(98+j280)} \cong 3\angle 19{,}6°$$

$$v(t) = 3\cos(t + 19{,}6°)\ \text{V}$$

12.43

Il circuito simbolico è mostrato di seguito. Con i versi di riferimento scelti per le correnti, la mutua induttanza è positiva. Possiamo utilizzare l'*analisi delle maglie*.



LKT maglia 1 $\quad j10\mathbf{I}_1 + j5\mathbf{I}_2 - j(\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2) - 5 = 0$

LKT maglia 2 $\quad j5\mathbf{I}_1 + j5\mathbf{I}_2 - j(\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2) + 5\mathbf{I}_2 = 0$

Sistema:

$$\begin{bmatrix} j9 & j4 \\ j4 & 5+j4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

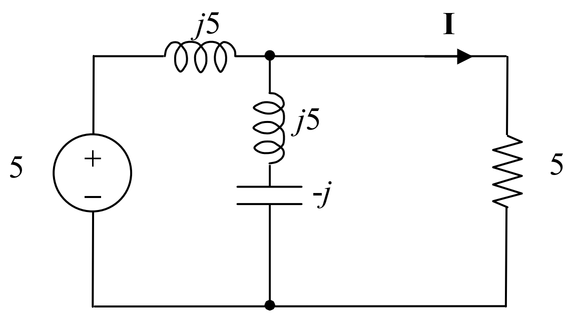
Soluzione:

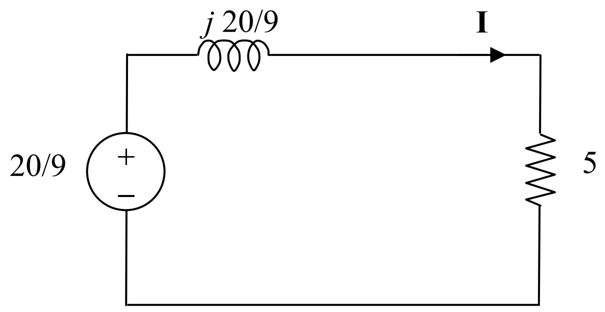
$$\mathbf{I}_2 = \frac{\begin{vmatrix} j9 & 5 \\ j4 & 0 \end{vmatrix}}{-20 + j45} = \frac{j20}{20 - j45}$$

Infine:

$$P = \frac{1}{2}5|\mathbf{I}_2|^2 = \frac{5}{2}\,\frac{400}{400+2025} \cong 0.41 \text{ W}$$

In alternativa si può utilizzare il *circuito equivalente a T*, conveniente in questo caso poiché $L_2 - M = 0$ (figura sotto a sinistra). Per ricavare la corrente **I** si può ricorrere al teorema di Thevenin, ottenendo lo schema semplificato a destra.





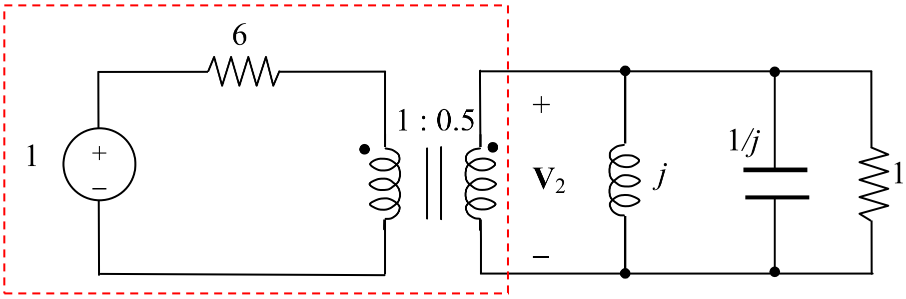
Infine

$$\mathbf{I} = \frac{20}{9}\frac{1}{5 + j\dfrac{20}{9}} = \frac{4}{9 + j4}$$

$$P = ½\, 5\, |\mathbf{I}|^2 \cong 0.41 \text{ W}$$

12.44

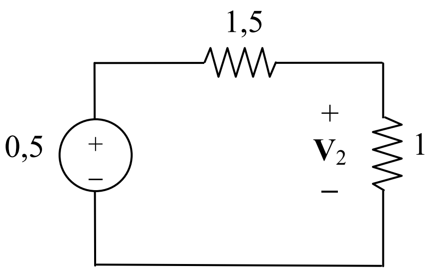
(a) Il circuito simbolico è riportato in figura. L'ammettenza del parallelo *RLC* è $\mathbf{Y} = 1 + j + \dfrac{1}{j} = 1\,\text{S}$, perciò il parallelo dei tre bipoli equivale al solo resistore.



Applicando il teorema di Thevenin al bipolo nel riquadro si ottiene:

$$\mathbf{V}_\text{T} = 0{,}5 \text{ V} \qquad \mathbf{Z}_\text{T} = 6\times 0{,}5^2 = 1{,}5\ \Omega$$

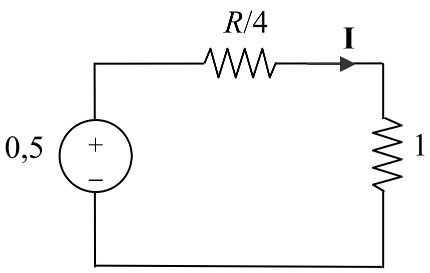
Dal circuito riportato al secondario si ricava:



$$\mathbf{V}_2 = 0{,}5\frac{1}{2{,}5} = 0{,}2$$

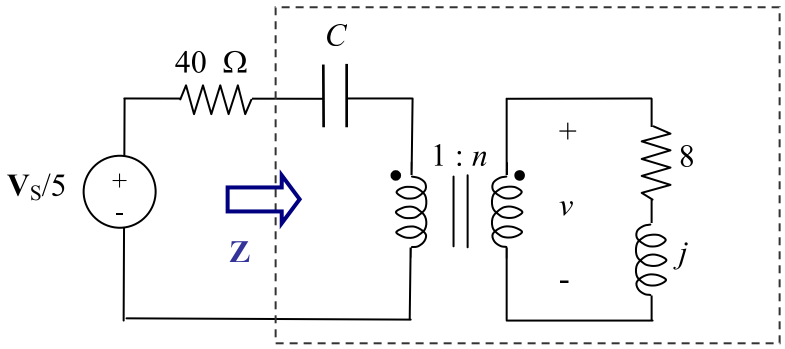
$$v_2(t) = 0{,}2\cos(t)\,\text{V}$$

(b) Procedendo come sopra si ottiene il circuito seguente. Affinché la potenza sia massima l'ampiezza della corrente **I** deve essere massima, dunque $R = 0\ \Omega$.



12.45

(a) Applicando il teorema di Thevenin si ottiene lo schema nella figura seguente. Il carico assorbe la massima potenza media se l'impedenza **Z** è pari a 40 Ω.



Quindi:

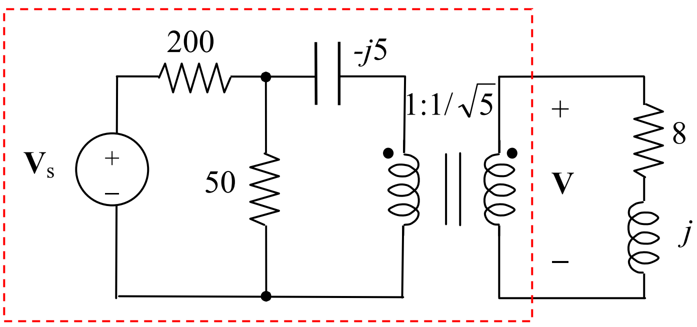
$$\frac{-j}{10^3 C}+\frac{8+j}{n^2}=40 \;\Rightarrow \qquad \text{(i)}\ \frac{8}{n^2}=40 \qquad \text{(ii)}\ \frac{1}{10^3 C}=\frac{1}{n^2}$$

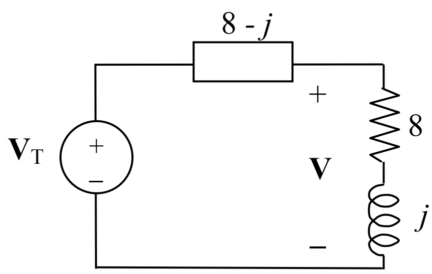
dalle quali si ricava

$$n=\sqrt{\frac{8}{40}}=\frac{1}{\sqrt{5}} \qquad\qquad C=0{,}2\ \text{mF}$$

(b) Il circuito simbolico è riportato sotto a sinistra. Applicando il teorema di Thevenin al bipolo nel riquadro si ottiene:

$$\mathbf{V}_\mathrm{T}=\frac{\mathbf{V}_s}{5\sqrt{5}}\ \mathrm{V} \qquad\qquad \mathbf{Z}_\mathrm{T}=8-j\ \Omega$$



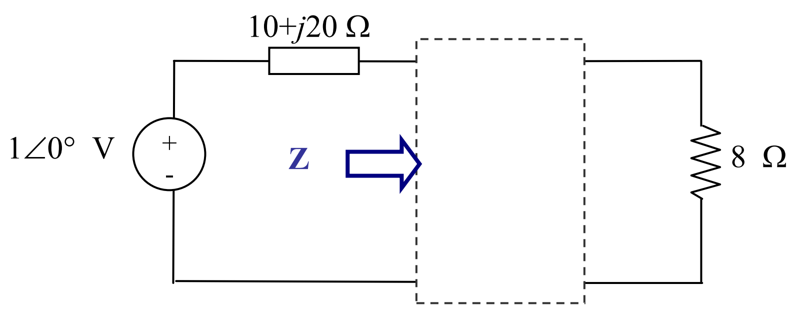


Dal circuito riportato al secondario si ricava

$$\mathbf{V}=\frac{\mathbf{V}_s}{5\sqrt{5}}\frac{8+j}{16} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{V}_s}=\frac{8+j}{80\sqrt{5}}$$

12.46

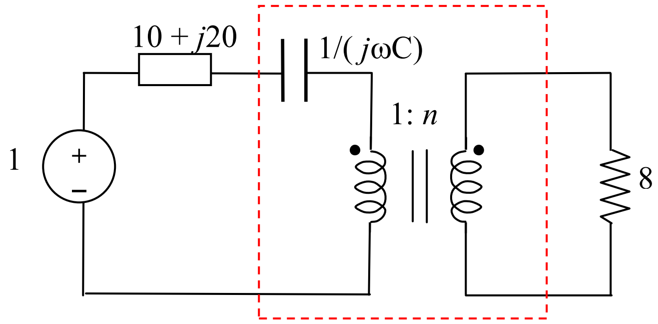
Poiché il quadripolo non assorbe potenza media, possiamo imporre che l'impedenza **Z** sia pari a 10- j20 Ω.



Possiamo utilizzare il quadripolo nella figura seguente:

$$\mathbf{Z} = \frac{-j}{\omega C} + \frac{8}{n^2} = 10 - j20$$

$$\frac{1}{\omega C} = 20 \Rightarrow C = \frac{1}{40\pi 10^3} \cong 8\ \mu\text{F} \qquad\qquad \frac{8}{n^2} = 10 \Rightarrow n = \sqrt{0{,}8} \cong 0{,}89$$



La potenza massima si ricava con la formula $P_{\max} = \dfrac{V_s^2}{8R_s} = \dfrac{1}{80} = 0{,}0125$ W.